УДК 531/534:57

И. Т. Селезов[1], В. Н. Кузнецов[2], О. В. Звонарева[2]

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСА ДАВЛЕНИЯ В УПРУГОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ КОАКСИАЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ЖИДКОСТЬЮ

Исследуется распространение неустановившихся гидроупругих волн вдоль слоя жидкости между упругой внешней и жесткой внутренней цилиндрическими оболочками. Жидкость предполагается вязкой сжимаемой, материал оболочки – вязкоупругим. Движение оболочки описывается уравнениями Кирхгофа – Лява, а движение жидкости – уравнениями, осредненными по радиальной координате. Задача решается на основе интегрального преобразования Лапласа по времени с последующим численным обращением. Проводится анализ распространения импульса давления.

Распространение гидроупругих волн в цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью, представляет большой научный и практический интерес как в инженерных приложениях, так и в гемодинамике. И не случайно эта проблема была предметом многочисленных исследований применительно к гемодинамике [3, 4, 6–11], в частности, отметим [8], где приведена обширная литература, характеризующая состояние проблемы.

В работе [2] рассматриваются задачи распространения волн в жидкости, находящейся между коаксиальными цилиндрическими оболочками. В этих задачах жидкость рассматривалась несжимаемой, что ограничивает анализ спектра частот рамками основного типа колебаний. Однако в общем случае при рассмотрении колебаний основного типа нельзя полностью исключить влияние сжимаемости плотной жидкости на движение оболочки. В наибольшей степени сжимаемость проявляется при осесимметричных колебаниях системы.

В отличие от многочисленных предыдущих исследований, относящихся к распространению волн в оболочке с жидкостью, здесь рассматривается задача со вставкой и, в отличие от работы [2], в которой жидкость предполагалась несжимаемой и идеальной, здесь учитываются вязкость и сжимаемость жидкости и, кроме того, материал оболочки рассматривается вязкоупругим. Различные применяемые модели вязкоупругости представлены в [9].

1. Постановка задачи. Движение оболочки описывается уравнениями теории оболочек Кирхгофа – Лява с учетом вязкоупругих свойств согласно модели Кельвина – Фойгта. В случае осесимметричных колебаний система связанных уравнений для перемещений оболочки записывается в виде

$$\left(\frac{E}{1-\nu_0^2}+\frac{4\eta(3\xi+\eta)}{3\xi+4\eta}\frac{\partial}{\partial t}\right)h\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}-$$

$$-\left(\frac{E\nu_0}{1-\nu_0^2}+\frac{2\eta(3\xi+2\eta)}{3\xi+4\eta}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{h}{R}\frac{\partial u_r}{\partial x}=\rho_0 h\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}+N_x;$$

$$\left(\frac{E\nu_0}{1-\nu_0^2}+\frac{2\eta(3\xi+2\eta)}{3\xi+4\eta}\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{h}{R}\frac{\partial u_x}{\partial x}-$$

$$-h\left(\frac{E}{1-\nu_0^2}+\frac{4\eta(3\xi+\eta)}{3\xi+4\eta}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+\frac{1}{R^2}\right)u_r=\rho_0 h\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}+N_r, \qquad (1)$$

где x – продольная координата ($x \ge 0$); t – время; u_x – продольное перемещение; u_r – радиальное перемещение; R – радиус внешней оболочки;

h – толщина стенки; E – модуль Юнга; ν_0 – коэффициент Пуассона; η и ξ – коэффициенты вязкости стенки оболочки; ρ_0 – плотность материала оболочки.

Силы N_x и N_r, действующие на стенку со стороны жидкости, выражаются формулами

$$N_x = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=R},$$

$$N_r = \left[-p + \lambda\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_r}{r}\right) + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=R}, \tag{2}$$

где p – давление; v_x, v_r – компоненты скорости; μ и λ – коэффициенты вязкости жидкости. Эти силы определяются из решений уравнений гидродинамики.

Движение жидкости описывается уравнениями Навье – Стокса в цилиндрической системе координат r, θ, x. В случае осесимметричных движений система связанных уравнений для продольной и радиальной скоростей записывается в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \nu_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + \nu_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\left[\frac{4}{3}\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r}\right)\right],$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \nu_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \nu_x\frac{\partial v_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \nu\left[\frac{4}{3}\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{4}{3r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \right.$$
$$\left. - \frac{4}{3}\frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3}\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x}\right)\right], \tag{3}$$

где ν – кинематический коэффициент вязкости; ρ – плотность жидкости.

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial v_r}{\partial r} + \rho\frac{v_r}{r} + \rho\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_r\frac{\partial \rho}{\partial r} + v_x\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \tag{4}$$

Выпишем граничные условия. Условия совместности движения упругой стенки оболочки с примыкающими к ней частицами жидкости имеют вид

$$v_r = \frac{\partial u_r}{\partial t}, \qquad v_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} \qquad \text{при} \quad r = R. \tag{5}$$

На поверхности внутренней жесткой цилиндрической вставки выполняются условия прилипания

$$v_r = 0, \qquad v_x = 0 \qquad \text{при} \quad r = R_1, \tag{6}$$

где R_1 – радиус внутренней вставки, $R_1 < R$.

Граничные условия на торце оболочки задаются в виде

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}\bigg|_{x=0} = 0, \qquad u_r\big|_{x=0} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}\bigg|_{x=0} = 0. \tag{7}$$

В этом случае в сечении $x = 0$ равны нулю продольные напряжения, радиальное перемещение и изгибающий момент (свободное опирание). В жидкости в сечении $x = 0$ равно нулю дополнительное давление, создаваемое деформацией оболочки.

На поверхность жидкости в сечении $x = 0$ действует заданное давление

$$p\Big|_{x=0} = f(t). \tag{8}$$

Начальные условия принимаются нулевыми:

$$v_r\Big|_{t=0} = v_x\Big|_{t=0} = 0, \qquad p\Big|_{t=0} = 0,$$

$$u_x\Big|_{t=0} = u_r\Big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial u_x}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial u_r}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0. \tag{9}$$

Условия регулярности формулируются в виде

$$v_x = v_r = u_x = u_r \to 0, \quad p \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{10}$$

2. Метод решения. Принимая во внимание допущения относительно потока жидкости в оболочке [1, 11] и учитывая допущение, что жидкость при сжатии подчиняется закону Гука [1], т. е. объемный модуль упругости $K = \rho(\partial p/\partial \rho)$, можно получить соотношение

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{K}\frac{\partial p}{\partial t}.$$

При таких предположениях приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_x}{\partial r}\right), \tag{11}$$

$$\frac{1}{K}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \tag{12}$$

Введем среднюю скорость V в слое жидкости между оболочками, которая определяется зависимостью

$$\pi(R^2 - R_1^2)V = \int_{R_1}^{R} 2\pi r v_x dr. \tag{13}$$

Здесь предполагается интегрирование в пределах невозмущенной области $[R_1, R]$ вместо $[R_1, R + u_r(x,t)]$.

Уравнение (12) после осреднения по переменной r в пределах $[R_1, R]$ с учетом (13) принимает вид

$$\frac{1}{K}\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{2R}{R^2 - R_1^2}\frac{\partial u_r}{\partial t} = 0. \tag{14}$$

Преобразуя аналогичным образом уравнение движения (12) и обозначая через $2aV$ член, характеризующий сопротивление трения, получаем

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} - 2aV = 0. \tag{15}$$

В соответствии с гипотезой квазистационарности при неустановившемся движении вязкой ньютоновской жидкости сохраняются характеристики сопротивления, установленные для стационарного движения. Коэффициент $2a$ в уравнении (15) в этом случае будет

$$2a = \frac{4\nu}{b}(R^2 - R_1^2)V,$$

где

$$b = -\frac{1}{2}(R^4 - R_1^4) + a_2\left[\frac{1}{2}(R^2 \ln R - R_1^2 \ln R_1) - \frac{1}{4}(R^2 - R_1^2)\right] - \frac{1}{2}a_3(R^2 - R_1^2),$$

$$a_2 = \frac{R^2 - R_1^2}{\ln R - \ln R_1}, \qquad a_3 = \frac{R^2 \ln R_1 - R_1^2 \ln R}{\ln R_1 - \ln R}.$$

При этом полагается, что прогибы оболочки малы в сравнении с радиусом R.

В дальнейшем вводятся безразмерные величины по формулам

$$\bar{x} = \frac{x}{R}, \quad \tau = \frac{\nu \mathrm{Re}}{R^2} t, \quad \bar{u}_x = \frac{u_x}{R}, \quad \bar{u}_r = \frac{u_r}{R}, \quad \bar{V} = \frac{V}{v_0}, \quad \bar{P} = \frac{P}{\rho v_0^2},$$

$$a = \frac{\rho v_0^2}{K}, \quad A = k\frac{3\xi + \eta}{3\xi + 4\eta}, \quad B = k\frac{3\xi + 2\eta}{3\xi + 4\eta}, \quad k = 2\eta \frac{v_0}{\mathrm{R}} \frac{1 - v_0^2}{E},$$

$$U = \frac{v_0}{c_0}, \quad c_0^2 = \frac{E}{\rho_0 (1 - v_0^2)}, \quad k_0 = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{R}{h} U^2, \tag{16}$$

где v_0 – характерная скорость течения; Re – число Рейнольдса.

В безразмерном виде в соответствии с (16) система уравнений гидроупругости принимает следующий вид:

– *для оболочки*

$$\left(1 + 2A\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial \bar{x}^2} - \left(v_0 + B\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \bar{x}} = U^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_x}{\partial \tau^2} - \frac{4k_0}{\mathrm{Re}}\bar{V},$$

$$\left(v_0 + B\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial \bar{x}} - \left(1 + 2A\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\left(\frac{1}{12}\frac{h_2}{R^2}\frac{\partial^4}{\partial \bar{x}^4} + 1\right)\bar{u}_r = U^2 \frac{\partial^2 \bar{u}_r}{\partial \tau^2} - k_0 \bar{P},$$

– *для жидкости*

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{x}} = -\frac{8}{\mathrm{Re}} \cdot \frac{\bar{V} \ln R_0}{\ln R_0 + (1 - \ln R_0)(R_0^2 - 1)},$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} + a\frac{\partial \bar{P}}{\partial \tau} - \frac{2}{R_0^2 - 1}\frac{\partial \bar{u}_r}{\partial \tau} = 0, \qquad R_0 = \frac{R_1}{R}.$$

Для решения задачи применяем преобразование Лапласа по времени τ:

$$f^L(s, \bar{x}) = \int_0^\infty \bar{f}(\tau, \bar{x}) e^{-s\tau} d\tau,$$

где s – параметр преобразования Лапласа. После некоторых преобразований из системы уравнений (1), (2), (5), (6) с учетом начальных условий (9) для давления p^L получаем следующее уравнение:

$$n_1 \frac{d^8 p^L}{dx^8} + n_2 \frac{d^6 p^L}{dx^6} + n_3 \frac{d^4 p^L}{dx^4} + n_4 \frac{d^2 p^L}{dx^2} + n_5 p^L = 0. \tag{17}$$

Здесь

$$n_1 = -a_1 a_4 m, \quad n_2 = s^2 a_4 m U^2 + \frac{1}{2} a a_1 a_4, \quad n_3 = m(a_2^2 - a_1 a_5) - \frac{1}{2} a s^2 a_4 U^2,$$

$$n_4 = m a_5 s^2 U^2 - \frac{1}{2} a(a_2^2 - a_1 a_5) + 2msa_2 b_1 \bar{B} + k_0 a_1 \bar{B},$$

$$n_5 = -k_0 s^2 U^2 \bar{B} - \frac{1}{2} a a_5 s^2 U^2, \qquad a_1 = 1 + 2sA, \qquad a_2 = -(\nu_0 + sB),$$

$$a_4 = a_1 \frac{h^2}{12R^2}, \qquad a_5 = a_1 + s^2 U^2, \qquad b_1 = -4\frac{R_0}{Rc}, \qquad m = \frac{(1 + \bar{A})\mathrm{Re}}{2s(s\,\mathrm{Re} - 8)},$$

$$\bar{A} = R_0^2 - \frac{1 - R_0^2}{\ln R_0}, \qquad \bar{B} = \frac{1}{1 - R_0^2}.$$

С учетом условий убывания искомых функций при $\bar{x} \to \infty$ решение уравнения (17) записывается в виде

$$p^L(s,\bar{x}) = e^{k_1 x}(A_1 \cos k_2\bar{x} + A_2 \sin k_2\bar{x}) +$$

$$+ e^{k_3 x}(A_3 \cos k_4\bar{x} + A_4 \sin k_4\bar{x}), \qquad (18)$$

где k_i, $i = 1,\ldots,4$, – комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения, соответствующие дифференциальному уравнению (17). Скорости и перемещения определяются аналогично.

Подставляя решения в граничные условия (7), (8), получаем систему уравнений для определения коэффициентов A_1, A_2, A_3, A_4:

$$A_1 + A_3 = f^L(s),$$

$$\Big[-m\frac{a_4}{a_2}(k_1^6 - k_2^6 + 6k_1^2k_2^4 - 15k_1^4k_2^2) + \frac{aa_4}{2a_2}(k_1^4 + k_2^4 - 6k_1^2k_2^4) -$$

$$- m\frac{a_5}{a_2}(k_1^2 - k_2^2) + \frac{aa_5 + 2k_0}{2a_2}\Big]A_1 + \Big[-m\frac{a_4}{a_2}(20k_1^3k_2^3 - 6k_1^5k_2 -$$

$$- 6k_1k_2^5) + \frac{aa_4}{2a_2}(4k_1k_2^3 - 4k_1^3k_2) + 2m\frac{a_5}{a_2}k_1k_2\Big]A_2 +$$

$$+ \Big[-m\frac{a_4}{a_2}(k_3^6 - k_4^6 + 6k_3^2k_4^4 - 15k_3^4k_4^2) + \frac{aa_4}{2a_2}(k_3^4 + k_4^4 - 6k_3^2k_4^2) -$$

$$- 2m\frac{a_5}{a_2}(k_3^2 - k_4^2) + \frac{aa_5 + 2k_0}{2a_2}\Big]A_3 + \Big[-m\frac{a_4}{a_2}(20k_3^3k_4^3 - 6k_3^5k_4 -$$

$$- 6k_3k_4^5) + \frac{aa_4}{2a_2}(4k_3k_4^3 - 4k_3^3k_4) + 2m\frac{a_5}{a_2}k_3k_4\Big]A_4 = 0,$$

$$\Big[(k_1^2 - k_2^2)m - \frac{a}{2}\Big]A_1 - 2k_1k_2mA_2 + \Big[(k_3^2 - k_4^2)m - \frac{a}{2}\Big]A_3 - 2k_3k_4mA_4 = 0,$$

$$\Big[(k_1^4 - k_2^4 - 6k_1^2k_2^2)m - \frac{a}{2}(k_1^2 - k_2^2)\Big]A_1 + \big[(4k_1k_2^3 - 4k_1^3k_2)m +$$

$$+ ak_1k_2\big]A_2 + \Big[(k_3^4 + k_4^4 - 6k_3^2k_4^2)m - \frac{a}{2}(k_3^2 - k_4^2)\Big]A_3 +$$

$$+ \big[(4k_3k_4^3 - 4k_3^3k_4)m + ak_3k_4\big]A_4 = 0.$$

3. Численные расчеты и анализ результатов. Полученные решения задачи гидроупругости исследовались для начального импульса вида

$$\bar{P}\big|_{x=0} = C\tau^2 e^{-\alpha\tau}, \qquad (19)$$

где $C = 2.432 \cdot 10^{-4}$, $\alpha = 0.018$. Численное обращение преобразования Лапласа осуществлялось на основе рядов Фурье по синусам [5] при следующих значениях параметров:

$$U = 0.02191, \quad \mathrm{Re} = 230, \quad A = 4.073, \quad B = 5.431,$$

$$k_0 = 0.6, \quad a = 0.2178 \cdot 10^{-4}, \quad k = 8.1459.$$

Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 1 и рис. 2 в сечениях $\bar{x} = 100$ и $\bar{x} = 200$ соответственно. Здесь показаны изменения импульса давления $\bar{P} = \frac{1}{v_0^2} \frac{P}{\rho_0}$ в зависимости от времени τ относительно начального импульса (19), заданного в сечении $\bar{x} = 0$ (кривые *0*). Кривые *1* на рисунках соответствуют распределению давления для оболочки, полностью заполненной жидкостью $(R_1 = 0)$. Кривые *2* соответствуют распределению давления при наличии в жидкости жесткой вставки, причем $R_0 = R_1/R = 0.5$.

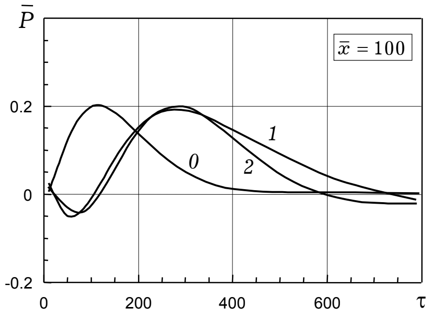

Рис. 1

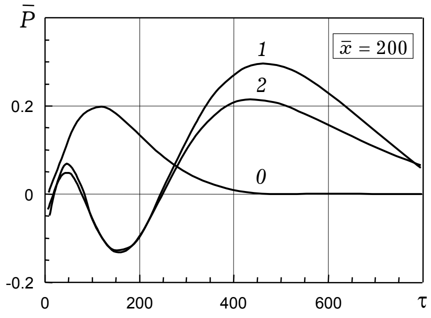

Рис. 2

Из сопоставления результатов распространения импульса давления в различных сечениях видно, что наличие жесткой оболочки проявляется на более значительном удалении от начала приложения импульса.

Из полученных результатов следует также, что наличие жесткой оболочки приводит к уменьшению импульса давления по сравнению с системой без нее. Оболочка свободно оперта и поэтому на небольших расстояниях импульс мало развит (рис. 1), а при увеличении расстояния от входа давление повышается, а затем при дальнейшем распространении убывает. Давление затухает быстрее в полной оболочке на начальном этапе по сравнению с коаксиальной.

1. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. – Москва: Наука, 1967. – 984 с.
2. *Мнев Е. Н., Перцев А. К.* Гидроупругость оболочек. – Ленинград: Судостроение, 1970. – 365 с.
3. *Селезов И. Т.* Исследование неустановившихся волновых движений в гидроупругих системах оболочка – жидкость // Прикл. проблемы механики тонкостенных конструкций. – Москва: Изд-во Моск. ун-та, 2000. – С. 286–305.
4. *Селезов И. Т.* Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах. – Киев: Наук. думка, 1989. – 204 с.
5. *Doetsch T.* Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation. – München: R. Oldenbourg, 1956.

   То же: *Деч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – Москва: Наука, 1965. – 287 с.
6. *Maxwell J. A., Anliker A. M.* The dissipation and dispersion of small waves in arteries and veins with viscoelastic wall properties // Biophys. – 1968. – **8**. – P. 920–950.
7. *Moodie E. B., Barday D. W., Tait R. T.* A boundary value problems for fluid-filled viscoelastic tubes // Math. Model. – 1983. – **4**. – P. 195–207.
8. *Selezov I., Avramenko O., Fratamico G., Pallotti G., Pettazzoni P.* Stress concentration due to advancing heart pulse through a blood vessel joint // J. Mech. in Med. and Biol. – 2001. – **1**, No. 2. – P. 79–96.
9. *Selezov I., Pallotti G., Fratamico G., Pettazzoni P.* Viscoelasticity with permanent deformation in investigation of pulse propagation in blood vessels // J. Mech. in Med. and Biol. – 2001. – **1**, No. 2. – P. 139–152.
10. *Selezov I. T.* Wave processes in fluids and elastic media // Int. J. Fluid Mech. Research. – 2003. – **30**, No. 2. – P. 219–249.
11. *Selezov I. T., Zvonareva O. V.* Modeling of transient hydroelastic waves in a fluid-filled cylindrical shell // Доп. НАН України. – 1999. – № 7. – С. 66–71.

ПОШИРЕННЯ ІМПУЛЬСУ ТИСКУ В ПРУЖНІЙ НАПІВСКІНЧЕННІЙ КОАКСІАЛЬНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З РІДИНОЮ

Досліджується поширення неусталених гідропружних хвиль вздовж шару рідини між пружною зовнішньою і жорсткою внутрішньою циліндричними оболонками. Рідина припускається в'язкою і стисливою, матеріал оболонки – в'язкопружним. Рух оболонки описується рівняннями Кірхгофа – Лява, рух рідини – рівняннями, усередненими за радіальною координатою. Задача розв'язується за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часом з наступним чисельним оберненням. Проведено аналіз поширення імпульсу тиску.

PRESSURE PULSE PROPAGATION IN ELASTIC SEMI-INFINITE COAXIAL CYLINDRICAL SHELL WITH FLUID

Propagation of unsteady hydroelastic waves along a fluid layer between the elastic outer and rigid inner cylindrical shells is investigated. The fluid is assumed to be viscous compressible, the shell material – viscoelastic. The shell motion is governed by the Kirchhoff – Love equations and the fluid motion – by the equations averaged over a radial coordinate. The problem is solved on the basis of the integral Laplace time transform with consequent numerical inversion. The analysis of pressure pulse propagation is presented.

[1] Ин-т гидромеханики НАН Украины, Киев,
[2] Ун-т ж.-д. транспорта, Днепропетровск

Получено
20.09.06