УДК 536.21

Ю. В. Немировский, А. П. Янковский

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ВТОРОГО РОДА НА ЛИЦЕВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Построено внешнее асимптотическое разложение решения задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных пластин при граничных условиях второго рода на лицевых поверхностях. Проанализированы получающиеся двумерные разрешающие уравнения и исследованы асимптотические свойства решений задачи теплопроводности. Получены оценки точности, с которой температуру в пластине за пределами погранслоя можно считать кусочно-линейно или кусочно-квадратично распределенной по толщине слоистой конструкции. Дано физическое обоснование некоторых особенностей асимптотического разложения температуры.

Настоящая работа является продолжением исследований, опубликованных в [5, 7], где были построены асимптотические разложения решения задачи теплопроводности тонких однослойных пластин по малому параметру, являющемуся отношением толщины конструкции к ее характерному размеру в плане. Однако в последние десятилетия в инженерной практике все чаще используются слоистые анизотропные тонкостенные элементы конструкций, позволяющие эффективно аккумулировать и передавать тепловую энергию или создавать эффективные теплонепроницаемые защитные экраны. Поэтому актуальной становится проблема разработки методов расчета и анализа особенностей решения задачи теплопроводности таких слоистых анизотропных пластин. Настоящее исследование посвящено построению асимптотического разложения решения задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных пластин и плит при граничных условиях второго рода на лицевых поверхностях. Такое решение, в частности, позволит оценить, с какой точностью за пределами погранслоя температуру в тонкостенной слоистой конструкции можно задавать постоянной или распределенной по линейному, квадратичному и другим законам по толщине пластины и ее слоев.

Рассмотрим пластину постоянной толщины $\bar{H}$, состоящую из M анизотропных неоднородных слоев также постоянной толщины. Свяжем с пластиной прямоугольную декартову систему координат $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ так, чтобы отсчетная плоскость $\bar{x}_3 = 0$ совпадала с нижней лицевой плоскостью пластины. Пронумеруем все слои последовательно снизу вверх, т.е. первый слой будет нижним, а M-й слой – верхним. На границах между слоями выполняются условия идеального теплового контакта.

При сделанных предположениях уравнение нестационарной теплопроводности m-го слоя имеет вид

$$\bar{c}^{(m)}\bar{\rho}^{(m)}\frac{\partial \bar{T}^{(m)}}{\partial \bar{t}} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}\left(\sum_{j=1}^{3}\bar{\lambda}_{ij}^{(m)}\frac{\partial \bar{T}^{(m)}}{\partial \bar{x}_j}\right) + \bar{Q}^{(m)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{t}),$$

$$\bar{H}_{m-1} \le \bar{x}_3 \le \bar{H}_m, \qquad 1 \le m \le M, \tag{1}$$

где $\bar{T}^{(m)}$ – температура m-го слоя; $\bar{Q}^{(m)}$ – плотность мощности внутренних источников тепла в m-м слое; $\bar{\lambda}_{ij}^{(m)}$ – коэффициенты теплопроводности материала m-го слоя (в общем случае, функции всех пространственных переменных); $\bar{c}^{(m)}$ – удельная теплоемкость материала m-го слоя; $\bar{\rho}^{(m)}$ – объемная плотность материала m-го слоя; $\bar{t}$ – время; $\bar{H}_m = \mathrm{const} > 0$ –

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2007. – 50, № 2. – С. 160-175.

аппликата границы между m-м и $(m+1)$-м слоями ($\bar{H}_0 \equiv 0$, $\bar{H}_M \equiv \bar{H}$). Здесь и далее размерные функции и величины будем помечать сверху чертой, а соответствующие им безразмерные функции и величины – обозначать теми же символами, но без черты.

На поверхностях $\bar{x}_3 = \bar{H}_m$ контакта m-го и $(m+1)$-го слоев должны выполняться условия сопряжения решения по тепловому потоку и температуре:

$$\sum_{i=1}^{3} \bar{\lambda}_{3i}^{(m)} \frac{\partial \bar{T}^{(m)}}{\partial \bar{x}_i} = \sum_{i=1}^{3} \bar{\lambda}_{3i}^{(n)} \frac{\partial \bar{T}^{(n)}}{\partial \bar{x}_i}, \qquad \bar{T}^{(m)} = \bar{T}^{(n)}, \qquad \bar{x}_3 = \bar{H}_m,$$
$$n = m+1, \qquad 1 \le m \le M-1; \tag{2}$$

на лицевых поверхностях пластины $\bar{x}_3 = 0, \bar{H}$ заданы граничные условия общего вида:

$$\beta^{(-)} \sum_{i=1}^{3} \bar{\lambda}_{3i}^{(1)} \left. \frac{\partial \bar{T}^{(1)}}{\partial \bar{x}_i} \right|_{\bar{x}_3=0} = \gamma^{(-)} \bar{Q}^{(-)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{t}) +$$
$$+ \delta^{(-)} \bar{\alpha}^{(-)} \left(\bar{T}^{(1)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0, \bar{t}) - \bar{T}_\infty^{(-)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{t}) \right),$$
$$-\beta^{(+)} \sum_{i=1}^{3} \bar{\lambda}_{3i}^{(M)} \left. \frac{\partial \bar{T}^{(M)}}{\partial \bar{x}_i} \right|_{\bar{x}_3=\bar{H}} = \gamma^{(+)} \bar{Q}^{(+)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{t}) +$$
$$+ \delta^{(+)} \bar{\alpha}^{(+)} \left(\bar{T}^{(M)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{H}, \bar{t}) - \bar{T}_\infty^{(+)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{t}) \right), \tag{3}$$

где $\bar{Q}^{(\pm)}$ – заданные на лицевых поверхностях проекции вектора теплового потока на направление внешней нормали; $\bar{\alpha}^{(\pm)}$ – коэффициенты конвективного теплообмена с окружающей средой на верхней (+) и нижней (–) сторонах пластины; $\bar{T}_\infty^{(\pm)}$ – температура окружающей среды со стороны верхней (+) и нижней (–) лицевой поверхности пластины; $\beta^{(\pm)}$, $\gamma^{(\pm)}$, $\delta^{(\pm)}$ – функции переключения, позволяющие задавать тот или иной тип граничных условий на верхней (+) и нижней (–) лицевых поверхностях.

На торцевой поверхности (кромке) пластины также заданы граничные условия, аналогичные (3):

$$-\beta \sum_{i=1}^{2} n_i \left(\sum_{j=1}^{3} \bar{\lambda}_{ij}^{(m)} \frac{\partial \bar{T}^{(m)}}{\partial \bar{x}_j} \right) = \gamma \bar{q}_n^{(m)}(\bar{\Gamma}, \bar{x}_3, \bar{t}) +$$
$$+ \delta \bar{\alpha}^{(m)} \left(\bar{T}^{(m)}(\bar{\Gamma}, \bar{x}_3, \bar{t}) - \bar{T}_\infty(\bar{\Gamma}, \bar{x}_3, \bar{t}) \right), \qquad (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \bar{\Gamma},$$
$$\bar{H}_{m-1} \le \bar{x}_3 \le \bar{H}_m, \qquad \bar{t} \ge \bar{t}_0, \qquad 1 \le m \le M, \tag{4}$$

где n_i – компоненты вектора единичной нормали к торцевой поверхности пластины $n_3 = 0$; $\bar{q}_n^{(m)}$ – заданный тепловой поток через торцевую поверхность m-го слоя; $\bar{\alpha}^{(m)}$ – коэффициент теплообмена по закону Ньютона между m-м слоем и окружающей средой на торцевой поверхности; $\bar{T}_\infty$ – температура окружающей среды со стороны торцевой поверхности; β, γ, δ – функции переключения, позволяющие задавать тот или иной тип граничных условий на торцевой поверхности; $\bar{\Gamma}$ – контур, ограничивающий область $\bar{G}$, занимаемую пластиной в плане.

В момент времени $\bar{t}_0$ в m-м слое задано начальное условие

$$\bar{T}^{(m)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{t}_0) = \bar{T}_{00}^{(m)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3),$$
$$\bar{H}_{m-1} \le \bar{x}_3 \le \bar{H}_m, \qquad (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \bar{G}, \qquad 1 \le m \le M, \tag{5}$$

где $\bar{T}_{00}^{(m)}$ – заданная функция.

Обезразмерим соотношения (1)–(5). С этой целью введем безразмерные независимые переменные

$$x_i = \frac{\bar{x}_i}{a}, \quad i = 1,2, \qquad x_3 = \frac{\bar{x}_3}{\bar{H}}, \quad 0 \le |x_3| \le 1, \qquad t = \frac{\bar{t}}{\bar{t}_*}, \qquad \bar{t}_* > 0, \tag{6}$$

где a – характерный размер области $\bar{G}$; $\bar{t}_*$ – характерное время, в течение которого рассматривается процесс нестационарной теплопроводности. Уравнение (1) обезразмерим умножением на постоянную величину $\bar{H}^2/(\bar{\lambda}_*\bar{T}_*)$. Тогда с учетом (6) получим

$$\varepsilon^2 C^{(m)} T^{(m)}_{,t} = \varepsilon^2 L^{(m)}_2(T^{(m)}) + \varepsilon L^{(m)}_1(T^{(m)}) + (\lambda^{(m)}_{33} T^{(m)}_{,3})_{,3} + \varepsilon^2 Q^{(m)}(\mathbf{x}, t),$$
$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}, \tag{7}$$

где

$$L^{(m)}_1(T^{(m)}) \equiv (\lambda^{(m)}_{13} T^{(m)}_{,3})_{,1} + (\lambda^{(m)}_{23} T^{(m)}_{,3})_{,2} + (\lambda^{(m)}_{31} T^{(m)}_{,1} + \lambda^{(m)}_{32} T^{(m)}_{,2})_{,3},$$
$$L^{(m)}_2(T^{(m)}) \equiv (\lambda^{(m)}_{11} T^{(m)}_{,1} + \lambda^{(m)}_{12} T^{(m)}_{,2})_{,1} + (\lambda^{(m)}_{21} T^{(m)}_{,1} + \lambda^{(m)}_{22} T^{(m)}_{,2})_{,2}, \tag{8}$$

$\varepsilon = \bar{H}/a$ – малый параметр; нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной x_i, $i = 1,2,3$, или t.

Первое из условий сопряжения (2) обезразмерим умножением на $\bar{H}/(\bar{\lambda}_*\bar{T}_*) = \mathrm{const}$, а второе из условий (2) – делением на $\bar{T}_* = \mathrm{const}$:

$$\varepsilon(\lambda^{(m)}_{31} T^{(m)}_{,1} + \lambda^{(m)}_{32} T^{(m)}_{,2}) + \lambda^{(m)}_{33} T^{(m)}_{,3} = \varepsilon(\lambda^{(n)}_{31} T^{(n)}_{,1} + \lambda^{(n)}_{32} T^{(n)}_{,2}) + \lambda^{(n)}_{33} T^{(n)}_{,3},$$
$$T^{(m)} = T^{(n)}, \qquad x_3 = H_m, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad n = m+1, \quad 1 \le m \le M-1; \tag{9}$$

граничные условия (3), (4) обезразмерим умножением на $\bar{H}/(\bar{\lambda}_*\bar{T}_*) = \mathrm{const}$:

$$\beta^{(-)}[\varepsilon(\lambda^{(1)}_{31} T^{(1)}_{,1} + \lambda^{(1)}_{32} T^{(1)}_{,2}) + \lambda^{(1)}_{33} T^{(1)}_{,3}] = \varepsilon\gamma^{(-)} Q^{(-)} + \varepsilon\delta^{(-)}\alpha^{(-)}(T^{(1)} - T^{(-)}_\infty),$$
$$x_3 = 0, \qquad (x_1, x_2) \in G,$$
$$-\beta^{(+)}[\varepsilon(\lambda^{(M)}_{31} T^{(M)}_{,1} + \lambda^{(M)}_{32} T^{(M)}_{,2}) + \lambda^{(M)}_{33} T^{(M)}_{,3}] = \varepsilon\gamma^{(+)} Q^{(+)} +$$
$$+ \varepsilon\delta^{(+)}\alpha^{(+)}(T^{(M)} - T^{(+)}_\infty), \quad x_3 = H, \quad (x_1, x_2) \in G, \tag{10}$$

$$-\beta\varepsilon \sum_{i=1}^{2} n_i \sum_{j=1}^{2} \lambda^{(m)}_{ij} T^{(m)}_{,j} - \beta(n_1 \lambda^{(m)}_{13} + n_2 \lambda^{(m)}_{23}) T^{(m)}_{,3} = \varepsilon\gamma q^{(m)}_n + \varepsilon\delta\alpha^{(m)}(T^{(m)} - T_\infty),$$
$$(x_1, x_2) \in \Gamma, \quad H_{m-1} \le x_3 \le H_m, \quad t \ge t_0, \quad 1 \le m \le M; \tag{11}$$

начальное условие (5) обезразмерим делением на $\bar{T}_* = \mathrm{const}$:

$$T^{(m)}(\mathbf{x}, t_0) = T^{(m)}_{00}(\mathbf{x}), \quad H_{m-1} \le x_3 \le H_m, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad 1 \le m \le M. \tag{12}$$

В соотношениях (7)–(12) использованы следующие формулы обезразмеривания и обозначения:

$$T^{(m)} = \frac{\bar{T}^{(m)}}{\bar{T}_*}, \quad \lambda^{(m)}_{ij} = \frac{\bar{\lambda}^{(m)}_{ij}}{\bar{\lambda}_*}, \quad i,j = 1,2,3, \quad Q^{(m)} = \frac{\bar{Q}^{(m)} a^2}{\bar{\lambda}_* \bar{T}_*}, \quad T^{(\pm)}_\infty = \frac{\bar{T}^{(\pm)}_\infty}{\bar{T}_*},$$
$$Q^{(\pm)} = \frac{\bar{Q}^{(\pm)} a}{\bar{\lambda}_* \bar{T}_*}, \quad \alpha^{(\pm)} = \frac{\bar{\alpha}^{(\pm)} a}{\bar{\lambda}_*}, \quad T_\infty = \frac{\bar{T}_\infty}{\bar{T}_*}, \quad q^{(m)}_n = \frac{\bar{q}^{(m)}_n a}{\bar{\lambda}_* \bar{T}_*}, \quad \alpha^{(m)} = \frac{\bar{\alpha}^{(m)} a}{\bar{\lambda}_*},$$
$$C^{(m)} = \frac{\bar{c}^{(m)} \bar{\rho}^{(m)} a^2}{\bar{\lambda}_* \bar{t}_*}, \quad t_0 = \frac{\bar{t}_0}{\bar{t}_*}, \quad H_m = \frac{\bar{H}_m}{\bar{H}}, \quad 0 \le m \le M, \quad H_0 = 0, \quad H_M = 1,$$
$$H = \frac{\bar{H}}{\bar{H}} = H_M = 1, \tag{13}$$

$\bar{T}_*$ – некоторое характерное значение температуры конструкции (например, температура естественного состояния); $\bar{\lambda}_*$ – характерное значение коэффициента теплопроводности материалов слоев пластины (например, максимальная по слоям величина наибольшего из главных значений тензора коэффициентов теплопроводности $\bar{\lambda}_{ij}^{(m)}$); $C^{(m)}$ – безразмерная теплоемкость (характерное значение времени $\bar{t}_*$ в (7), (13) выбрано так, чтобы $C^{(m)}$ имела порядок единицы).

Как обычно предполагается, что температура $\bar{T}$ не сильно отличается от значения $\bar{T}_*$ (в противном случае пришлось бы учитывать термочувствительность материалов слоев пластины, что выходит за рамки настоящего исследования); в силу формул обезразмеривания (13) и выбора величины $\bar{\lambda}_*$ ненулевые безразмерные коэффициенты теплопроводности $\lambda_{ij}^{(m)}$ близки по значениям к единице. Если считать, что изменению малого параметра ε соответствует изменение толщины пластины $\bar{H}$ (величины $\bar{H}_m$ при этом изменяются пропорционально изменению $\bar{H}$, т. е. $H_m = \bar{H}_m / \bar{H} = \text{const}$) при фиксированной геометрии конструкции в плане (при фиксированном характерном размере a), то основные функции и величины, приведенные в (13), имеют следующие асимптотические свойства при $\varepsilon \to 0$:

$$\lambda_{ij}^{(m)} = O(1), \quad i, j = 1, 2, 3, \qquad Q^{(m)} = O(1), \quad T_{\infty}^{(\pm)} = O(1),$$
$$Q^{(\pm)} = O(1), \quad \alpha^{(\pm)} = O(1), \quad T_{\infty} = O(1), \quad q_n^{(m)} = O(1),$$
$$\alpha^{(m)} = O(1), \quad C^{(m)} = O(1), \quad T_{00}^{(m)} = O(1). \tag{14}$$

Наличие малого параметра ε при высших производных в уравнении (7), в условиях сопряжения (9) и граничных условиях (10), (11) указывает на то, что начально-краевая задача (7)–(12) является задачей с сингулярным возмущением, поэтому решение этой задачи будем разыскивать в виде

$$T^{(m)} = T_*^{(m)} + T_{\tau}^{(m)} + T_{\text{b}}^{(m)}, \qquad 1 \le m \le M, \tag{15}$$

где $T_*^{(m)}$ – основное температурное поле в m-м слое; $T_{\tau}^{(m)}$ – поправка к основному температурному полю в окрестности начального момента времени $t = t_0$; $T_{\text{b}}^{(m)}$ – поправка к основному температурному полю в пограничном слое в окрестности торцевой поверхности пластины.

Далее настоящее исследование посвящено определению основного температурного поля $T_*^{(m)}$ в пластине методом асимптотического анализа. Для разных граничных условий (10) на лицевых поверхностях следует использовать разные асимптотические разложения [7].

В силу ограниченности объема статьи рассмотрим лишь случай задания на лицевых поверхностях граничных условий второго рода. Если на обеих лицевых поверхностях заданы лишь тепловые потоки ($\beta^{(\pm)} = 1$, $\gamma^{(\pm)} = 1$, $\delta^{(\pm)} = 0$ в (10)), то в качестве внешнего разложения выберем

$$T_*^{(m)}(x_1, x_2, x_3, t) \sim \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} T_k^{(m)}(x_1, x_2, x_3, t)\, \varepsilon^k. \tag{16}$$

После подстановки (16) в (7), (9)–(12) и умножения на ε получим

– *уравнение*

$$\sum_{k=2}^{\infty} C^{(m)} T_{k-2,t}^{(m)} \varepsilon^k = \sum_{k=2}^{\infty} L_2^{(m)}\left(T_{k-2}^{(m)}\right) \varepsilon^k + \sum_{k=1}^{\infty} L_1^{(m)}\left(T_{k-1}^{(m)}\right) \varepsilon^k +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda_{33}^{(m)} T_{k,3}^{(m)}\right)_{,3} \varepsilon^k + \varepsilon^3 Q^{(m)}(\mathbf{x}, t), \tag{17}$$

– *условия сопряжения*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_{31}^{(m)}T_{k-1,1}^{(m)}+\lambda_{32}^{(m)}T_{k-1,2}^{(m)}\right)\varepsilon^{k}+\lambda_{33}^{(m)}\sum_{k=0}^{\infty}T_{k,3}^{(m)}\,\varepsilon^{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_{31}^{(n)}T_{k-1,1}^{(n)}+\right.$$
$$\left.+\lambda_{32}^{(n)}T_{k-1,2}^{(n)}\right)\varepsilon^{k}+\lambda_{33}^{(n)}\sum_{k=0}^{\infty}T_{k,3}^{(n)}\,\varepsilon^{k},$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}T_{k}^{(m)}(\mathbf{x},t)\,\varepsilon^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}T_{k}^{(n)}(\mathbf{x},t)\,\varepsilon^{k},\qquad x_3=H_m,\qquad (x_1,x_2)\in G,$$
$$n=m+1,\qquad 1\le m\le M-1;\tag{18}$$

– *граничные условия*

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_{31}^{(M)}T_{k-1,1}^{(M)}+\lambda_{32}^{(M)}T_{k-1,2}^{(M)}\right)\varepsilon^{k}-\lambda_{33}^{(M)}\sum_{k=0}^{\infty}T_{k,3}^{(M)}\,\varepsilon^{k}=\varepsilon^{2}Q^{(+)},\qquad x_3=H,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_{31}^{(1)}T_{k-1,1}^{(1)}+\lambda_{32}^{(1)}T_{k-1,2}^{(1)}\right)\varepsilon^{k}+\lambda_{33}^{(1)}\sum_{k=0}^{\infty}T_{k,3}^{(1)}\,\varepsilon^{k}=\varepsilon^{2}Q^{(-)},$$
$$x_3=0,\quad (x_1,x_2)\in G,\tag{19}$$
$$-\beta\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{2}n_i\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(m)}T_{k-1,j}^{(m)}\right)\varepsilon^{k}-\beta\sum_{i=1}^{2}n_i\lambda_{i3}^{(m)}\sum_{k=0}^{\infty}T_{k,3}^{(m)}\varepsilon^{k}-\delta\alpha^{(m)}\sum_{k=1}^{\infty}T_{k-1}^{(m)}\varepsilon^{k}=$$
$$=\varepsilon^{2}\gamma q_n^{(m)}-\varepsilon^{2}\delta\alpha^{(m)}T_{\infty},$$
$$(x_1,x_2)\in\Gamma,\qquad H_{m-1}\le x_3\le H_m,\qquad 1\le m\le M;\tag{20}$$

– *начальное условие*

$$\sum_{k=0}^{\infty}T_{k}^{(m)}(\mathbf{x},t_0)\,\varepsilon^{k}=\varepsilon T_{00}^{(m)}(\mathbf{x}),$$
$$(x_1,x_2)\in G,\qquad H_{m-1}\le x_3\le H_m,\qquad 1\le m\le M.\tag{21}$$

Собирая в (17)–(21) слагаемые при одинаковых степенях ε, получим цепочку равенств для определения функций $T_k^{(m)}(\mathbf{x},t)$:

$$\left(\lambda_{33}^{(m)}T_{0,3}^{(m)}\right)_{,3}=0,\qquad 1\le m\le M,\tag{22}$$
$$\lambda_{33}^{(m)}T_{0,3}^{(m)}=\lambda_{33}^{(n)}T_{0,3}^{(n)},\qquad T_0^{(m)}(\mathbf{x},t)=T_0^{(n)}(\mathbf{x},t),$$
$$x_3=H_m,\qquad n=m+1,\qquad 1\le m\le M-1,\tag{23}$$
$$\lambda_{33}^{(1)}T_{0,3}^{(1)}=0,\quad x_3=0,\quad -\lambda_{33}^{(M)}T_{0,3}^{(M)}=0,\quad x_3=H,\quad (x_1,x_2)\in G),\tag{24}$$
$$-\beta\left(n_1\lambda_{13}^{(m)}+n_2\lambda_{23}^{(m)}\right)T_{0,3}^{(m)}=0,\qquad (x_1,x_2)\in\Gamma,$$
$$H_{m-1}\le x_3\le H_m,\quad 1\le m\le M,\tag{25}$$
$$T_0^{(m)}(\mathbf{x},t_0)=0,\quad H_{m-1}\le x_3\le H_m,\quad (x_1,x_2)\in G,\quad 1\le m\le M,\tag{26}$$
$$\left(\lambda_{33}^{(m)}T_{1,3}^{(m)}\right)_{,3}+L_1^{(m)}\left(T_0^{(m)}\right)=0,\quad 1\le m\le M,\tag{27}$$
$$\lambda_{33}^{(m)}T_{1,3}^{(m)}+\lambda_{31}^{(m)}T_{0,1}^{(m)}+\lambda_{32}^{(m)}T_{0,2}^{(m)}=\lambda_{33}^{(n)}T_{1,3}^{(n)}+\lambda_{31}^{(n)}T_{0,1}^{(n)}+\lambda_{32}^{(n)}T_{0,2}^{(n)},$$
$$T_1^{(m)}(\mathbf{x},t)=T_1^{(n)}(\mathbf{x},t),\qquad x_3=H_m,\qquad (x_1,x_2)\in G,$$
$$n=m+1,\qquad 1\le m\le M-1,\tag{28}$$
$$\lambda_{33}^{(1)}T_{1,3}^{(1)}+\lambda_{31}^{(1)}T_{0,1}^{(1)}+\lambda_{32}^{(1)}T_{0,2}^{(1)}=0,\qquad x_3=0,$$
$$-\left(\lambda_{33}^{(M)}T_{1,3}^{(M)}+\lambda_{31}^{(M)}T_{0,1}^{(M)}+\lambda_{32}^{(M)}T_{0,2}^{(M)}\right)=0,\quad x_3=H,\quad (x_1,x_2)\in G,\tag{29}$$
$$-\beta\sum_{i=1}^{2}n_i\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(m)}T_{0,j}^{(m)}-\beta\left(n_1\lambda_{13}^{(m)}+n_2\lambda_{23}^{(m)}\right)T_{1,3}^{(m)}-\delta\alpha^{(m)}T_0^{(m)}=0,$$
$$(x_1,x_2)\in\Gamma,\qquad H_{m-1}\le x_3\le H_m,\qquad 1\le m\le M,\tag{30}$$
$$T_1^{(m)}(\mathbf{x},t_0)=T_{00}^{(m)}(\mathbf{x}),\quad H_{m-1}\le x_3\le H_m,\quad (x_1,x_2)\in G,\quad 1\le m\le M,\tag{31}$$

$$\left(\lambda_{33}^{(m)} T_{2,3}^{(m)}\right)_{,3} + L_1^{(m)}\left(T_1^{(m)}\right) + L_2^{(m)}\left(T_0^{(m)}\right) - C^{(m)} T_{0,t}^{(m)} = 0, \quad 1 \le m \le M, \qquad (32)$$

$$\lambda_{33}^{(m)} T_{2,3}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)} T_{1,1}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} T_{1,2}^{(m)} = \lambda_{33}^{(n)} T_{2,3}^{(n)} + \lambda_{31}^{(n)} T_{1,1}^{(n)} + \lambda_{32}^{(n)} T_{1,2}^{(n)},$$

$$T_2^{(m)}(\mathbf{x}, t) = T_2^{(n)}(\mathbf{x}, t), \qquad x_3 = H_m, \qquad (x_1, x_2) \in G,$$

$$n = m + 1, \quad 1 \le m \le M - 1, \qquad (33)$$

$$\lambda_{33}^{(1)} T_{2,3}^{(1)} + \lambda_{31}^{(1)} T_{1,1}^{(1)} + \lambda_{32}^{(1)} T_{1,2}^{(1)} = Q^{(-)}, \qquad x_3 = 0,$$

$$-\left(\lambda_{33}^{(M)} T_{2,3}^{(M)} + \lambda_{31}^{(M)} T_{1,1}^{(M)} + \lambda_{32}^{(M)} T_{1,2}^{(M)}\right) = Q^{(+)}, \quad x_3 = H, \quad (x_1, x_2) \in G, \qquad (34)$$

$$-\beta \sum_{i=1}^{2} n_i \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}^{(m)} T_{1,j}^{(m)} - \beta\left(n_1 \lambda_{13}^{(m)} + n_2 \lambda_{23}^{(m)}\right) T_{2,3}^{(m)} - \delta \alpha^{(m)} T_1^{(m)} = \gamma q_n^{(m)} -$$

$$-\delta \alpha^{(m)} T_\infty, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad H_{m-1} \le x_3 \le H_m, \quad 1 \le m \le M, \qquad (35)$$

$$T_2^{(m)}(\mathbf{x}, t_0) = 0, \quad H_{m-1} \le x_3 \le H_m, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad 1 \le m \le M, \qquad (36)$$

$$\left(\lambda_{33}^{(m)} T_{k,3}^{(m)}\right)_{,3} + L_1^{(m)}\left(T_{k-1}^{(m)}\right) + L_2^{(m)}\left(T_{k-2}^{(m)}\right) - C^{(m)} T_{k-2,t}^{(m)} = -\delta_{3k} Q^{(m)}(\mathbf{x}, t), \qquad (37)$$

$$\lambda_{33}^{(m)} T_{k,3}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)} T_{k-1,1}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} T_{k-1,2}^{(m)} = \lambda_{33}^{(n)} T_{k,3}^{(n)} + \lambda_{31}^{(n)} T_{k-1,1}^{(n)} + \lambda_{32}^{(n)} T_{k-1,2}^{(n)},$$

$$T_k^{(m)}(\mathbf{x}, t) = T_k^{(n)}(\mathbf{x}, t), \quad x_3 = H_m, \quad (x_1, x_2) \in G,$$

$$n = m + 1, \quad 1 \le m \le M - 1, \qquad (38)$$

$$\lambda_{33}^{(1)} T_{k,3}^{(1)} + \lambda_{31}^{(1)} T_{k-1,1}^{(1)} + \lambda_{32}^{(1)} T_{k-1,2}^{(1)} = 0, \qquad x_3 = 0,$$

$$-\left(\lambda_{33}^{(M)} T_{k,3}^{(M)} + \lambda_{31}^{(M)} T_{k-1,1}^{(M)} + \lambda_{32}^{(M)} T_{k-1,2}^{(M)}\right) = 0, \quad x_3 = H, \quad (x_1, x_2) \in G, \qquad (39)$$

$$-\beta \sum_{i=1}^{2} n_i \sum_{j=1}^{2} \lambda_{ij}^{(m)} T_{k-1,j}^{(m)} - \beta\left(n_1 \lambda_{13}^{(m)} + n_2 \lambda_{23}^{(m)}\right) T_{k,3}^{(m)} - \delta \alpha^{(m)} T_{k-1}^{(m)} = 0,$$

$$(x_1, x_2) \in \Gamma, \quad H_{m-1} \le x_3 \le H_m, \quad 1 \le m \le M, \quad k = 3, 4, 5, \ldots, \qquad (40)$$

$$T_k^{(m)}(\mathbf{x}, t_0) = 0, \quad H_{m-1} \le x_3 \le H_m, \quad (x_1, x_2) \in G,$$

$$1 \le m \le M, \quad k = 3, 4, 5, \ldots, \qquad (41)$$

где $\delta_{3k} = \begin{cases} 1, & k = 3, \\ 0 & k \ne 3, \end{cases}$ – символ Кронекера.

Построим решение системы (22)–(41). Интегрируя уравнение (22), с учетом (23), (24) и $\lambda_{33}^{(m)} > 0$ (в силу постулата Онзагера [4]) получим

$$T_0^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \theta_0(x_1, x_2, t), \qquad 1 \le m \le M, \qquad (42)$$

где θ_0 – произвольная функция, подлежащая в последующем определению. Из (42) следует тождественное выполнение граничного условия (25) на кромке пластины, а из (26) с учетом (42) вытекает начальное условие

$$\theta_0(x_1, x_2, t_0) = 0, \qquad 1 \le m \le M. \qquad (43)$$

Интегрируя уравнение (27) по переменной x_3, с учетом (42), (8), (28), (29) получим

$$\lambda_{33}^{(m)} T_{1,3}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)} T_{0,1}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} T_{0,2}^{(m)} = 0, \qquad (44)$$

откуда следует

$$T_1^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \theta_1(x_1, x_2, t) - F_1^{(m)}(\mathbf{x}, t), \qquad 1 \le m \le M, \qquad (45)$$

где

$$F_1^{(m)}(\mathbf{x}, t) \equiv \int_{H_{m-1}}^{x_3} \frac{\lambda_{31}^{(m)} \theta_{0,1} + \lambda_{32}^{(m)} \theta_{0,2}}{\lambda_{33}^{(m)}} dx_3 + \sum_{\ell=1}^{m-1} \int_{H_{\ell-1}}^{H_\ell} \frac{\lambda_{31}^{(\ell)} \theta_{0,1} + \lambda_{32}^{(\ell)} \theta_{0,2}}{\lambda_{33}^{(\ell)}} dx_3, \qquad (46)$$

$\theta_1(x_1, x_2, t) \equiv T_1^{(1)}(x_1, x_2, 0, t)$ – произвольная функция, подлежащая определению.

Выразим из (44) производную $T_{1,3}^{(m)}$ и подставим в (30), тогда

$$-\beta\sum_{i=1}^{2} n_i \sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}^{(m)}\theta_{0,j} + \beta\left(n_1\lambda_{13}^{(m)} + n_2\lambda_{23}^{(m)}\right)\frac{\lambda_{31}^{(m)}\theta_{0,1} + \lambda_{32}^{(m)}\theta_{0,2}}{\lambda_{33}^{(m)}} - \delta\alpha^{(m)}\theta_0 = 0\,,$$

$$(x_1, x_2) \in \Gamma, \qquad H_{m-1} \le x_3 \le H_m, \qquad 1 \le m \le M\,. \qquad (47)$$

Так как материалы слоев предполагаются произвольными (в общем случае, и неоднородными по толщине), а функция θ_0 не зависит от переменной x_3, граничное условие (47) не может быть выполнено точно во всех точках торцевой поверхности пластины, поэтому здесь и далее граничные условия на кромках пластины (47), (35), (40) будем выполнять в интегральном смысле (проинтегрировав по толщине пластины указанные равенства), что является необходимым и достаточным условием для затухания погранслоев [5].

Проинтегрировав соотношение (47) по толщине пластины, получим граничное условие на кромке для функции θ_0:

$$\beta\sum_{i=1}^{2}\theta_{0,i}\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\left[-n_1\lambda_{1i}^{(m)} - n_2\lambda_{2i}^{(m)} + \frac{\lambda_{3i}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\left(n_1\lambda_{13}^{(m)} + n_2\lambda_{23}^{(m)}\right)\right]dx_3 -$$

$$-\delta\theta_0\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\alpha^{(m)}\,dx_3 = 0, \qquad (x_1, x_2) \in \Gamma\,. \qquad (48)$$

Подставим (45) в начальное условие (31), тогда

$$\theta_1(x_1, x_2, t_0) - F_1^{(m)}(\mathbf{x}, t_0) = T_{00}^{(m)}(\mathbf{x})\,. \qquad (49)$$

Так как начальное распределение температуры $T_{00}^{(m)}(\mathbf{x})$ произвольно, функция θ_1 не зависит от переменной x_3 и функция $F_1^{(m)}$ по переменной x_3 имеет вполне определенную зависимость (46), то начальное условие (49) не может быть выполнено точно во всех точках пластины, поэтому здесь и далее начальные условия (49), (36), (41) будем выполнять в интегральном смысле (проинтегрировав по толщине пластины эти равенства), что является необходимым и достаточным условием для затухания поправки $T_\tau^{(m)}$ в (15) в окрестности начального момента времени t_0.

Проинтегрировав равенство (49) по толщине пластины, получим с учетом $H = 1$ (см. (13)) начальное условие для функции θ_1:

$$\theta_1(x_1, x_2, t_0) = \sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\left[T_{00}^{(m)}(\mathbf{x}) + F_1^{(m)}(\mathbf{x}, t_0)\right]dx_3, \qquad (x_1, x_2) \in G\,. \qquad (50)$$

Уравнение (32) с учетом (8) и (44) можно преобразовать к виду

$$\left(\lambda_{33}^{(m)}T_{2,3}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)}T_{1,1}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)}T_{1,2}^{(m)}\right)_{,3} = \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\lambda_{i3}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\left(\lambda_{31}^{(m)}\theta_{0,1} + \lambda_{32}^{(m)}\theta_{0,2}\right)\right]_{,i} -$$

$$-\left(\lambda_{11}^{(m)}\theta_{0,1} + \lambda_{12}^{(m)}\theta_{0,2}\right)_{,1} - \left(\lambda_{21}^{(m)}\theta_{0,1} + \lambda_{22}^{(m)}\theta_{0,2}\right)_{,2} + C^{(m)}\theta_{0,t}\,.$$

Проинтегрировав по x_3 это уравнение, с учетом (33) и первого из равенств (34) получим

$$\lambda_{33}^{(m)}T_{2,3}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)}T_{1,1}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)}T_{1,2}^{(m)} = Q_2^{(m)}(\mathbf{x}, t), \qquad 1 \le m \le M\,, \qquad (51)$$

где

$$Q_2^{(m)}(\mathbf{x}, t) \equiv Q^{(-)}(x_1, x_2, t) + \int\limits_{H_{m-1}}^{x_3}\left\{\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\lambda_{i3}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\left(\lambda_{31}^{(m)}\theta_{0,1} + \lambda_{32}^{(m)}\theta_{0,2}\right)\right]_{,i} -\right.$$

$$
-\left(\lambda_{11}^{(m)}\theta_{0,1}+\lambda_{12}^{(m)}\theta_{0,2}\right)_{,1}-\left(\lambda_{21}^{(m)}\theta_{0,1}+\lambda_{22}^{(m)}\theta_{0,2}\right)_{,2}+
$$

$$
\left.+C^{(m)}\theta_{0,t}\right\}dx_3+D^{(m)}(\theta_0)\,. \tag{52}
$$

Дифференциальный оператор $D^{(m)}(\bullet)$ имеет вид

$$
D^{(m)}(\bullet)\equiv\sum_{\ell=1}^{m-1}\int\limits_{H_{\ell-1}}^{H_\ell}\left\{\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{\lambda_{i3}^{(\ell)}}{\lambda_{33}^{(\ell)}}\left(\lambda_{31}^{(\ell)}(\bullet)_{,1}+\lambda_{32}^{(\ell)}(\bullet)_{,2}\right)\right]_{,i}-\left(\lambda_{11}^{(\ell)}(\bullet)_{,1}+\lambda_{12}^{(\ell)}(\bullet)_{,2}\right)_{,1}-\right.
$$

$$
\left.-\left(\lambda_{21}^{(\ell)}(\bullet)_{,1}+\lambda_{22}^{(\ell)}(\bullet)_{,2}\right)_{,2}+C^{(m)}(\bullet)_{,t}\right\}dx_3,\qquad D^{(1)}(\bullet)\equiv 0\,. \tag{53}
$$

Из равенства (51) при $m=M$, $x_3=H_M=H$ и из второго равенства (34) с учетом (52), (53) следует

$$
D^{(M+1)}(\theta_0)=-Q^{(-)}(x_1,x_2,t)-Q^{(+)}(x_1,x_2,t),\qquad (x_1,x_2)\in G\,. \tag{54}
$$

Это уравнение определяет функцию $\theta_0(x_1,x_2,t)$ при граничном условии (48), заданном на кромке пластины, и начальном условии (43). Зная из начально-краевой задачи (43), (48), (54) функцию θ_0, получим в силу (46), (52), (53) известные правую часть в (51) и функцию $F_1^{(m)}(\mathbf{x},t)$ в (45). Подставив (45) в (51), получим

$$
T_{2,3}^{(m)}=\frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}}\left(Q_2^{(m)}(\mathbf{x},t)+\lambda_{31}^{(m)}F_{1,1}^{(m)}+\lambda_{32}^{(m)}F_{1,2}^{(m)}\right)-
$$

$$
-\frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}}\left(\lambda_{31}^{(m)}\theta_{1,1}+\lambda_{32}^{(m)}\theta_{1,2}\right), \tag{55}
$$

где первое слагаемое в правой части − известная функция. Проинтегрировав это равенство по x_3, с учетом (33) будем иметь

$$
T_2^{(m)}(\mathbf{x},t)=\theta_2(x_1,x_2,t)-F_2^{(m)}(\mathbf{x},t),\qquad 1\le m\le M\,, \tag{56}
$$

где

$$
F_2^{(m)}(\mathbf{x},t)\equiv\int\limits_{H_{m-1}}^{x_3}\frac{\lambda_{31}^{(m)}\theta_{1,1}+\lambda_{32}^{(m)}\theta_{1,2}}{\lambda_{33}^{(m)}}dx_3+\sum_{\ell=1}^{m-1}\int\limits_{H_{\ell-1}}^{H_\ell}\frac{\lambda_{31}^{(\ell)}\theta_{1,1}+\lambda_{32}^{(\ell)}\theta_{1,2}}{\lambda_{33}^{(\ell)}}dx_3-
$$

$$
-\int\limits_{H_{m-1}}^{x_3}\frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}}\left(Q_2^{(m)}+\lambda_{31}^{(m)}F_{1,1}^{(m)}+\lambda_{32}^{(m)}F_{1,2}^{(m)}\right)dx_3-
$$

$$
-\sum_{\ell=1}^{m-1}\int\limits_{H_{\ell-1}}^{H_\ell}\frac{1}{\lambda_{33}^{(\ell)}}\left(Q_2^{(\ell)}+\lambda_{31}^{(\ell)}F_{1,1}^{(\ell)}+\lambda_{32}^{(\ell)}F_{1,2}^{(\ell)}\right)dx_3\,, \tag{57}
$$

$\theta_2(x_1,x_2,t)\equiv T_2^{(1)}(x_1,x_2,0,t)$ − произвольная функция, подлежащая определению.

Подставим (55) в граничное условие на кромке (35) и проинтегрируем его по толщине пластины с учетом (45), тогда

$$
\beta\sum_{i=1}^{2}\theta_{1,i}\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\left[-n_1\lambda_{1i}^{(m)}-n_2\lambda_{2i}^{(m)}+\frac{\lambda_{3i}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\left(n_1\lambda_{13}^{(m)}+n_2\lambda_{23}^{(m)}\right)\right]dx_3-
$$

$$
-\delta\theta_1\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\alpha^{(m)}\,dx_3=\sum_{m=1}^{M}\int\limits_{H_{m-1}}^{H_m}\left[-\beta\sum_{i=1}^{2}n_i\left(\lambda_{1i}^{(m)}F_{1,1}^{(m)}+\right.\right.
$$

$$
\left.+\lambda_{i2}^{(m)}F_{1,2}^{(m)}\right)+\beta\left(n_1\lambda_{13}^{(m)}+n_2\lambda_{23}^{(m)}\right)\left(Q_2^{(m)}+\lambda_{31}^{(m)}F_{1,1}^{(m)}+\right.
$$

$$
\left.\left.+\lambda_{32}^{(m)}F_{1,2}^{(m)}\right)\frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}}+\gamma q_n^{(m)}-\delta\alpha^{(m)}\left(F_1^{(m)}+T_\infty\right)\right]dx_3\,. \tag{58}
$$

Подставив (56) в начальное условие (36) и проинтегрировав его по толщине пластины, с учетом $H = 1$ получим

$$\theta_2(x_1, x_2, t_0) = \sum_{m=1}^{M} \int_{H_{m-1}}^{H_m} F_2^{(m)}(\mathbf{x}, t_0)\, dx_3, \qquad (x_1, x_2) \in G\,. \tag{59}$$

В силу формального сходства соответственно соотношений (32)−(36) и (37)−(41), а также равенств (56), (45) и (51), (44) можно для начально-краевой задачи (37)−(41) при $k \geq 3$ сделать такие допущения:

$$\lambda_{33}^{(m)} T_{k-1,3}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)} T_{k-2,1}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} T_{k-2,2}^{(m)} = Q_{k-1}^{(m)}(\mathbf{x}, t), \quad 1 \leq m \leq M\,, \tag{60}$$

$$T_{k-2}^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \theta_{k-2}(x_1, x_2, t) - F_{k-2}^{(m)}(\mathbf{x}, t), \quad 1 \leq m \leq M\,, \tag{61}$$

где $Q_{k-1}^{(m)}(\mathbf{x}, t)$, $F_{k-2}^{(m)}(\mathbf{x}, t)$ предполагаются уже известными функциями. (При $k = 3$ допущения (60), (61) выполняются, так как справедливы равенства (45), (51) и функции $Q_2^{(m)}$, $F_1^{(m)}$ известны из (46), (52) и решенной начально-краевой задачи (43), (48), (54).)

Выразим из (60) производную $T_{k-1,3}^{(m)}$ и подставим с учетом (8) в уравнение (37), тогда после использования равенства (61) получим

$$\begin{aligned}
&(\lambda_{33}^{(m)} T_{k,3}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)} T_{k-1,1}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} T_{k-1,2}^{(m)})_{,3} = -\delta_{3k} Q^{(m)}(\mathbf{x}, t) - \\
&\quad - \sum_{i=1}^{2} \left\{ \left[\frac{\lambda_{i3}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}} (Q_{k-1}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)} F_{k-2,1}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} F_{k-2,2}^{(m)}) \right]_{,i} - (\lambda_{1i}^{(m)} F_{k-2,1}^{(m)} + \right. \\
&\quad \left. + \lambda_{i2}^{(m)} F_{k-2,2}^{(m)})_{,i} \right\} - C^{(m)} F_{k-2,t}^{(m)} + \sum_{i=1}^{2} \left\{ \left[\frac{\lambda_{i3}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}} (\lambda_{31}^{(m)} \theta_{k-2,1} + \lambda_{32}^{(m)} \theta_{k-2,2}) \right]_{,i} - \right. \\
&\quad \left. - (\lambda_{1i}^{(m)} \theta_{k-2,1} + \lambda_{i2}^{(m)} \theta_{k-2,2})_{,i} \right\} + C^{(m)} \theta_{k-2,t}\,.
\end{aligned}$$

Проинтегрировав по x_3 это уравнение, с учетом (38), (39) будем иметь

$$\lambda_{33}^{(m)} T_{k,3}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)} T_{k-1,1}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} T_{k-1,2}^{(m)} = Q_k^{(m)}(\mathbf{x}, t), \qquad 1 \leq m \leq M\,, \tag{62}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_k^{(m)}(\mathbf{x}, t) \equiv &- \int_{H_{m-1}}^{x_3} \left\{ \delta_{3k} Q^{(m)}(\mathbf{x}, t) - \sum_{i=1}^{2} (\lambda_{1i}^{(m)} F_{k-2,1}^{(m)} + \lambda_{i2}^{(m)} F_{k-2,2}^{(m)})_{,i} + \right. \\
&\left. + C^{(m)} F_{k-2,t}^{(m)} + \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\lambda_{i3}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}} (Q_{k-1}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)} F_{k-2,1}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} F_{k-2,2}^{(m)}) \right]_{,i} \right\} dx_3 - \\
&- \sum_{\ell=1}^{m-1} \int_{H_{\ell-1}}^{H_\ell} \left\{ \delta_{3k} Q^{(\ell)}(\mathbf{x}, t) - \sum_{i=1}^{2} \left(\lambda_{1i}^{(\ell)} F_{k-2,1}^{(\ell)} + \lambda_{i2}^{(\ell)} F_{k-2,2}^{(\ell)} \right)_{,i} + C^{(\ell)} F_{k-2,t}^{(\ell)} + \right. \\
&\left. + \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\lambda_{i3}^{(\ell)}}{\lambda_{33}^{(\ell)}} (Q_{k-1}^{(\ell)} + \lambda_{31}^{(\ell)} F_{k-2,1}^{(\ell)} + \lambda_{32}^{(\ell)} F_{k-2,2}^{(\ell)}) \right]_{,i} \right\} dx_3 + \\
&+ \int_{H_{m-1}}^{x_3} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\lambda_{i3}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}} (\lambda_{31}^{(m)} \theta_{k-2,1} + \lambda_{32}^{(m)} \theta_{k-2,2}) \right]_{,i} - \sum_{i=1}^{2} (\lambda_{1i}^{(m)} \theta_{k-2,1} + \right. \\
&\left. + \lambda_{i2}^{(m)} \theta_{k-2,2})_{,i} + C^{(m)} \theta_{k-2,t} \right\} dx_3 + D^{(m)}(\theta_{k-2})\,,
\end{aligned} \tag{63}$$

дифференциальный оператор $D^{(m)}(\bullet)$ определен в (53). Из соотношения (62) при $m = M$, $x_3 = H_M = H$ и из второго равенства (39) с учетом (53) следует

$$D^{(M+1)}(\theta_{k-2}) = \sum_{m=1}^{M} \int\limits_{H_{m-1}}^{H_m} \Big\{ \delta_{3k} Q^{(m)}(\mathbf{x},t) - \sum_{i=1}^{2} \big(\lambda_{1i}^{(m)} F_{k-2,1}^{(m)} + \lambda_{i2}^{(m)} F_{k-2,2}^{(m)}\big)_{,i} +$$

$$+ C^{(m)} F_{k-2,t}^{(m)} + \sum_{i=1}^{2} \Big[\frac{\lambda_{i3}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}} \big(Q_{k-1}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)} F_{k-2,1}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} F_{k-2,2}^{(m)} \big)_{,i} \Big] \Big\} dx_3 ,$$

$$(x_1, x_2) \in G, \qquad t \ge t_0 , \tag{64}$$

где правая часть − известная функция переменных x_1, x_2, t, так как функции $Q_{k-1}^{(m)}$, $F_{k-2}^{(m)}$ предполагаются уже известными (см. (60), (61)).

При $k = 3$ уравнение (64) определяет функцию $\theta_1(x_1, x_2, t)$ при граничном условии (58), заданном на кромке пластины, и начальном условии (50). При $k \ge 4$ граничное условие для уравнения (64) получим, проинтегрировав равенство (40) по толщине пластины для предыдущего значения k (заменив в (40) k на $k-1$), тогда, исключив из (40) за счет (60) производную $T_{k-1,3}^{(m)}$ и использовав равенство (61), будем иметь

$$\beta \sum_{i=1}^{2} \theta_{k-2,i} \sum_{m=1}^{M} \int\limits_{H_{m-1}}^{H_m} \Big[- n_1 \lambda_{1i}^{(m)} - n_2 \lambda_{2i}^{(m)} + \frac{\lambda_{3i}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}} \big(n_1 \lambda_{13}^{(m)} + n_2 \lambda_{23}^{(m)} \big) \Big] dx_3 -$$

$$- \delta \theta_{k-2} \sum_{m=1}^{M} \int\limits_{H_{m-1}}^{H_m} \alpha^{(m)}\, dx_3 = \sum_{m=1}^{M} \int\limits_{H_{m-1}}^{H_m} \Big[- \beta \sum_{i=1}^{2} n_i \big(\lambda_{1i}^{(m)} F_{k-2,1}^{(m)} +$$

$$+ \lambda_{i2}^{(m)} F_{k-2,2}^{(m)} \big) + \beta \frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}} \big(n_1 \lambda_{13}^{(m)} + n_2 \lambda_{23}^{(m)} \big) \big(Q_{k-1}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)} F_{k-2,1}^{(m)} +$$

$$+ \lambda_{32}^{(m)} F_{k-2,2}^{(m)} \big) - \delta \alpha^{(m)} F_{k-2}^{(m)} \Big] dx_3, \qquad k = 4, 5, \ldots . \tag{65}$$

Для определения же начального условия, соответствующего уравнению (64) при $k \ge 4$, подставим (61) в равенство (41) (заменив в нем k на $k-2$) и учтем, что, согласно сделанного допущения, функция $F_{k-2}^{(m)}$ уже известна, тогда после интегрирования по толщине пластины получим

$$\theta_{k-2}(x_1, x_2, t_0) = \sum_{m=1}^{M} \int\limits_{H_{m-1}}^{H_m} F_{k-2}^{(m)}(\mathbf{x}, t_0)\, dx_3, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad k = 4, 5, \ldots . \tag{66}$$

Выразим из (60) производную $T_{k-1,3}^{(m)}$ и проинтегрируем полученное равенство по x_3, тогда с учетом (61) получим

$$T_{k-1}^{(m)}(\mathbf{x}, t) = \theta_{k-1}(x_1, x_2, t) - F_{k-1}^{(m)}(\mathbf{x}, t), \qquad 1 \le m \le M , \tag{67}$$

где

$$F_{k-1}^{(m)}(\mathbf{x}, t) \equiv \int\limits_{H_{m-1}}^{x_3} \frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}} \big(\lambda_{31}^{(m)} \theta_{k-2,1} + \lambda_{32}^{(m)} \theta_{k-2,2} \big) dx_3 +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{m-1} \int\limits_{H_{\ell-1}}^{H_\ell} \frac{1}{\lambda_{33}^{(\ell)}} \big(\lambda_{31}^{(\ell)} \theta_{k-2,1} + \lambda_{32}^{(\ell)} \theta_{k-2,2} \big) dx_3 -$$

$$- \int\limits_{H_{m-1}}^{x_3} \frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}} \big(Q_{k-1}^{(m)} + \lambda_{31}^{(m)} F_{k-2,1}^{(m)} + \lambda_{32}^{(m)} F_{k-2,2}^{(m)} \big) dx_3 -$$

$$- \sum_{\ell=1}^{m-1} \int\limits_{H_{\ell-1}}^{H_\ell} \frac{1}{\lambda_{33}^{(\ell)}} \big(Q_{k-1}^{(\ell)} + \lambda_{31}^{(\ell)} F_{k-2,1}^{(\ell)} + \lambda_{32}^{(\ell)} F_{k-2,2}^{(\ell)} \big) dx_3 , \tag{68}$$

$\theta_{k-1}(x_1, x_2, t) \equiv T_{k-1}^{(1)}(x_1, x_2, 0, t)$ – произвольная функция, подлежащая определению. (При $k = 3$ равенства (67), (68) совпадают с (56), (57) соответственно.)

Определив функцию θ_{k-2} из начально-краевой задачи (64), (58), (50) (при $k = 3$) или (64)–(66) (при $k \geq 4$), будем иметь в силу (68), (63) и допущений (60), (61) известные функции $F_{k-1}^{(m)}$, $Q_k^{(m)}$ в равенствах (62), (67), которые формально полностью совпадают с (60), (61). Таким образом, допущения (60), (61) остаются справедливыми и для следующего значения k, поэтому по схеме (60)–(68) можно построить решение начально-краевой задачи (37)–(41) для нового значения k и т.д.

Предложенный алгоритм определения основного трехмерного нестационарного температурного поля в слоистой анизотропной пластине показывает, что для вычисления неизвестных коэффициентов $T_k^{(m)}$ в асимптотическом разложении (16) при каждом $k = 0, 1, 2, \ldots$ необходимо проинтегрировать двумерные уравнения (54), (64), которые отличаются лишь известными правыми частями и в развернутом виде в силу (53) выглядят так:

$$\sum_{m=1}^{M} \int_{H_{m-1}}^{H_m} \left\{ \sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\lambda_{i3}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}} \left(\lambda_{31}^{(m)} \theta_{k-2,1} + \lambda_{32}^{(m)} \theta_{k-2,2} \right) \right]_{,i} - \sum_{i=1}^{2} \left(\lambda_{1i}^{(m)} \theta_{k-2,1} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \lambda_{i2}^{(m)} \theta_{k-2,2} \right)_{,i} \right\} dx_3 = -\theta_{k-2,t} \sum_{m=1}^{M} \int_{H_{m-1}}^{H_m} C^{(m)} dx_3 + W_k(x_1, x_2, t), \quad (69)$$

где W_k определяется правой частью (54) при $k = 2$ или правой частью (64) при $k \geq 3$.

Так как уравнение (69) содержит производную по времени t лишь первого порядка и производные по пространственным переменным x_1, x_2 второго порядка, то оно является уравнением параболического типа.

Покажем, что дифференциальный оператор в левой части уравнения (69) является эллиптическим. С этой целью рассмотрим следующее уравнение:

$$\sum_{i=1}^{2} \left[\frac{\lambda_{i3}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}} \left(\lambda_{31}^{(m)} \theta_{k-2,1} + \lambda_{32}^{(m)} \theta_{k-2,2} \right) \right]_{,i} - \left(\lambda_{11}^{(m)} \theta_{k-2,1} + \lambda_{12}^{(m)} \theta_{k-2,2} \right)_{,1} -$$

$$- \left(\lambda_{21}^{(m)} \theta_{k-2,1} + \lambda_{22}^{(m)} \theta_{k-2,2} \right)_{,2} = w_k(x_1, x_2, x_3), \qquad 1 \leq m \leq M, \quad (70)$$

где переменная x_3 выступает в качестве параметра, а левая часть совпадает с подынтегральным выражением в левой части (69). (В частности, для однослойной пластины ($M = 1$), коэффициенты теплопроводности которой не зависят от переменной x_3, левая часть уравнения (69) после деления на H редуцируется в левую часть равенства (70).) Характеристическое уравнение для (70) имеет вид

$$\frac{1}{\lambda_{33}^{(m)}} \left[\left(\lambda_{22}^{(m)} \lambda_{33}^{(m)} - \lambda_{23}^{(m)} \lambda_{23}^{(m)} \right) x_2'^2 - 2 \left(\lambda_{12}^{(m)} \lambda_{33}^{(m)} - \lambda_{13}^{(m)} \lambda_{23}^{(m)} \right) x_2' + \right.$$

$$\left. + \left(\lambda_{11}^{(m)} \lambda_{33}^{(m)} - \lambda_{13}^{(m)} \lambda_{13}^{(m)} \right) \right] = 0, \quad (71)$$

где $x_2'(x_1) = \dfrac{dx_2}{dx_1}$ – производная, задающая направление характеристики при фиксированном x_3. Дискриминант этого уравнения

$$D = -\frac{4}{\lambda_{33}^{(m)}} \det\left(\lambda_{ij}^{(m)}\right), \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

где $\det(\lambda_{ij}^{(m)})$ – определитель матрицы коэффициентов теплопроводности. Согласно постулату Онзагера [4], $\lambda_{33}^{(m)} > 0$, $\det(\lambda_{ij}^{(m)}) > 0$, поэтому $D < 0$. Следовательно, оператор в (70) является эллиптическим, а для коэффициентов в (71) при любых x_3 выполняется неравенство

$$\left[\frac{2}{\lambda_{33}^{(m)}}\left(\lambda_{12}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}\right)\right]^2 < 4\left(\frac{\lambda_{22}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{23}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_{11}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{13}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\right).$$

Проинтегрируем это неравенство по толщине пластины:

$$\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\left(\frac{\lambda_{12}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\right)^2 dx_3 <$$

$$< \sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\left(\frac{\lambda_{22}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{23}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_{11}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{13}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\right)dx_3 . \qquad (72)$$

Отсюда, применив к левой части неравенство Буняковского [3], получим

$$\left(\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{\lambda_{12}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}dx_3\right)^2 <$$

$$< \sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\left(\frac{\lambda_{22}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{23}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\right)\cdot\left(\frac{\lambda_{11}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{13}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}\right)dx_3 <$$

$$< \sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{\lambda_{22}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{23}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}dx_3\cdot\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{\lambda_{11}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{13}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}dx_3, \qquad (73)$$

где последнее неравенство является следствием того, что в силу постулата Онзагера сомножители, заключенные в скобки под интегралом в правой части (72), положительны при всех x_3.

Используя неравенства (73), можно определить тип оператора в левой части разрешающего уравнения (69). В стационарном случае ($\theta_{k-2,t} \equiv 0$) характеристическое уравнение для (69) имеет вид

$$x_2'^2\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{\lambda_{22}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{23}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}dx_3 - 2x_2'\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{\lambda_{12}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}dx_3 +$$

$$+\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{\lambda_{11}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{13}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}dx_3 = 0,$$

а его дискриминант

$$D = 4\left(\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{\lambda_{12}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}dx_3\right)^2 - 4\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{\lambda_{22}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{23}^{(m)}\lambda_{23}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}dx_3 \times$$

$$\times\sum_{m=1}^{M}\int_{H_{m-1}}^{H_m}\frac{\lambda_{11}^{(m)}\lambda_{33}^{(m)}-\lambda_{13}^{(m)}\lambda_{13}^{(m)}}{\lambda_{33}^{(m)}}dx_3 . \qquad (74)$$

Из (74) с учетом неравенства (73) получаем, что $D < 0$. Следовательно, дифференциальный оператор в левой части разрешающего уравнения (69) является эллиптическим оператором второго порядка по двум пространственным переменным x_1, x_2, поэтому в стационарном случае ($\theta_{k-2,t} \equiv 0$) уравнение (69) является уравнением эллиптического типа, зависящим лишь от двух переменных x_1, x_2.

Обсудим некоторые свойства полученного асимптотического разложения (16). Используя разложение (16) и равенства (42), (45), (46), (56), (57), можно утверждать, что в случае, когда материалы слоев однородны по толщине ($\lambda_{ij,3}^{(m)} = 0$, $i, j = 1, 2, 3$, $1 \le m \le M$), при задании только тепловых потоков на лицевых поверхностях пластины за пределами погранслоя, возникающего в окрестности кромок, с точностью $O(\varepsilon)$ температура распределена по толщине каждого слоя по линейному закону и кусочно-линейно распределена по толщине всего пакета (при этом в разложении (16) следует ограничиться двумя первыми слагаемыми), а с точностью $O(\varepsilon^2)$ температура по толщине каждого слоя распределена по квадратичному закону и по кусочно-квадратичному закону по толщине всей слоистой конструкции (в разложении (16) нужно удержать три слагаемых).

Из разложения (16) следует, что при $Q^{(\pm)} \ne 0$ имеем

$$T_*^{(m)}(x_1, x_2, x_3, t) = O(1/\varepsilon) \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0\,, \tag{75}$$

т.е. с уменьшением ε температура $T_*^{(m)}$ в каждом слое неограниченно возрастает по модулю. Этот факт имеет физическое объяснение. А именно: уменьшению ε соответствует уменьшение толщины пластины и слоев при фиксированных прочих входных данных задачи (размерах пластины в плане, плотности мощности внутренних источников тепла, тепловых потоках на лицевых поверхностях). Так как характерный размер пластины a и тепловые потоки на лицевых поверхностях $Q^{(\pm)}$ в каждый момент времени фиксированы, то фиксирован безразмерный приток (отток) тепла через эти поверхности:

$$Q_* = -\iint\limits_G (Q^{(+)} + Q^{(-)})\, dx_1\, dx_2\,. \tag{76}$$

При уменьшении же толщины пластины и слоев (уменьшении ε) уменьшаются объем конструкции и площади торцевых поверхностей пластины и слоев (на кромках). Поэтому, чтобы обеспечить фиксированный отток (приток) тепла через эти поверхности, равный значению (76), при уменьшении ε должны возрастать по модулю компоненты теплового потока в пластине, лежащие в плоскости конструкции, а значит, по закону Фурье неограниченно должен возрастать модуль градиента температуры. Следствием этого будет неограниченное возрастание по модулю температуры при $\varepsilon \to 0$. Этот факт и отражает соотношение (75).

Из разложения (16) и равенств (54), (64) (при $k = 3$) следует, что вклад в температуру от тепловых потоков $Q^{(\pm)}$, заданных на лицевых поверхностях пластины, по ε на порядок больше вклада от внутренних источников тепла $Q^{(m)}$, так как $Q^{(\pm)}$ определяют функцию $T_0^{(m)}$ (через θ_0) и последующие $T_k^{(m)}$, $k = 1, 2, \ldots$, (см. (54)), а $Q^{(m)}$ задает функцию $T_1^{(m)}$ (через θ_1) и последующие $T_k^{(m)}$, $k = 2, 3, \ldots$, (см. (64)). Этот факт также имеет физическое объяснение. При уменьшении ε уменьшается объем пластины и слоев, а значит, в силу (14) уменьшается мощность тепла Q_V, производимого в данный момент времени во всей пластине внутренними источниками тепла $Q^{(m)}$, причем $Q_V \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, так как стремится к нулю объем пластины. Мощность же притока (оттока) тепла Q_*, привносимого в конструкцию в данный момент времени за счет тепловых потоков $Q^{(\pm)}$, фиксирована и не зависит от ε (см. (76)). Поэтому тепловые потоки $Q^{(\pm)}$, заданные на лицевых поверхностях, оказывают большее влияние на температуру, чем внутренние источники тепла. (В стационарном случае для однослойной пластины аналогичные результаты были получены в [7].)

Если лицевые поверхности пластины термоизолированы ($Q^{(\pm)} = 0$), то из (43), (48), (54), (42), (45), (46) получим

$$T_0^{(m)} \equiv \theta_0 \equiv 0, \quad Q_2^{(m)} \equiv 0, \quad F_1^{(m)} \equiv 0, \quad T_1^{(m)} \equiv \theta_1(x_1, x_2, t), \quad 1 \le m \le M, \tag{77}$$

но при наличии внутренних источников тепла ($Q^{(m)} \ne 0$) или нетривиальном начальном условии (50) (когда правая часть в (50) не равна нулю) из (45), (50), (57), (58), (64) (при $k = 3$) в общем случае следует

$$F_2^{(m)}(\mathbf{x}, t) \ne 0, \qquad 1 \le m \le M. \tag{78}$$

Из соотношений (16), (56), (77), (78) вытекает, что в случае однородности материалов слоев по толщине ($\lambda_{ij,3}^{(m)} = 0$, $i, j = 1, 2, 3$, $1 \le m \le M$) с точностью $O(\varepsilon^2)$ можно задать температуру линейно распределенной, но не постоянной, по толщине каждого слоя (кусочно-линейной по толщине пакета слоев); с точностью же $O(\varepsilon)$ можно считать температуру постоянной по толщине слоев и пластины за пределами погранслоя.

Если в каждой точке каждого слоя пластины одна из главных осей анизотропии совпадает с направлением x_3, то $\lambda_{31}^{(m)} = \lambda_{32}^{(m)} = 0$, $1 \le m \le M$. (Такими свойствами обладают, например, пластины, слои которых армированы в плоскостях, параллельных отсчетной плоскости $x_3 = 0$.) В этом случае при термоизоляции лицевых поверхностей ($Q^{(\pm)} = 0$), наличии внутренних источников тепла ($Q^{(m)} \ne 0$) и ненулевом начальном условии (50) из (57), (46), (52) получаем

$$F_1^{(m)}(\mathbf{x}, t) \equiv F_2^{(m)}(\mathbf{x}, t) \equiv 0, \qquad Q_2^{(m)}(\mathbf{x}, t) \equiv 0, \qquad 1 \le m \le M. \tag{79}$$

Следовательно, при $\lambda_{31}^{(m)} = \lambda_{32}^{(m)} = 0$ и $Q^{(\pm)} = 0$ из (16), (42), (45), (56), (79) вытекает, что с точностью $O(\varepsilon^2)$ температуру можно считать постоянной по толщине пластины за пределами погранслоя даже в случае неоднородности материалов слоев по толщине ($\lambda_{ij,3}^{(m)} \ne 0$).

Если лицевые поверхности не термоизолированы ($Q^{(\pm)} \ne 0$), а внутренние источники тепла равномерно распределены по толщине слоев ($Q_{,3}^{(m)} = 0$), то функция $T_3^{(m)}$ при $\lambda_{31}^{(m)} = \lambda_{32}^{(m)} = 0$, $1 \le m \le M$, в силу (63), (67), (68), (46), (52), (57) имеет квадратичное распределение по толщине слоев, поэтому из (16) следует, что с точностью $O(\varepsilon^3)$ распределение температуры за пределами погранслоя по толщине слоев можно задавать по квадратичному закону (по кусочно-квадратичному закону по толщине слоистой пластины в целом).

В [7] показано, что для однослойной однородной по толщине пластины при отсутствии внутренних источников тепла, при термоизоляции лицевых поверхностей и $\lambda_{31} = \lambda_{32} = 0$ за пределами погранслоя температура в пластине постоянна по толщине. Такой же результат для однослойной ($M = 1$) пластины получается из (42)–(68) при $\lambda_{31}^{(1)} = \lambda_{32}^{(1)} = 0$, $\lambda_{ij,3}^{(1)} = 0$, $Q^{(1)} \equiv 0$, $Q^{(\pm)} \equiv 0$, так как $F_k^{(1)} \equiv 0$ и $T_k^{(1)} \equiv \theta_k(x_1, x_2, t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. В случае же слоистой пластины ($M \ge 2$) при $\lambda_{31}^{(m)} = \lambda_{32}^{(m)} = 0$, $\lambda_{ij,3}^{(m)} = 0$, $i, j = 1, 2, 3$, термоизоляции лицевых поверхностей ($Q^{(\pm)} \equiv 0$) и отсутствии внутренних источников тепла ($Q^{(m)} \equiv 0$, $1 \le m \le M$) температуру за пределами погранслоя нельзя считать постоянной по толщине конструкции, что вызвано неоднородностью материала по толщине всего пакета слоев и непосредственно вытекает из (63), (67), (68), (79), откуда следует, что уже функции $Q_3^{(m)}$, $F_3^{(m)}$, $T_3^{(m)}$ зависят от поперечной координаты x_3. Поэтому в слоистой пластине при $Q^{(m)} \equiv 0$, $Q^{(\pm)} \equiv 0$ температура может быть постоянной по толщине лишь при термоизоляции и торцевых поверхностей конструкции ($q_n^{(m)} \equiv 0$, $\beta = \gamma = 1$, $\delta = 0$ в (11)) или при задании на торцевой поверхности постоянной температуры ($T^{(m)} = T_{00}^{(m)} = T_\infty = \text{const}$, $\beta = \gamma = 0$, $\delta\alpha^{(m)} = 1$ в (11)), но в этих случаях в силу единственности решения начально-краевой задачи (7)–(12) температура всюду в пластине постоянна $T^{(m)}(\mathbf{x}, t) = T_\infty = \text{const}$, $1 \le m \le M$.

Построенное выше внешнее асимптотическое разложение температуры может привести к невязкам в граничных условиях (11) на кромках пластины [6], для устранения которых можно использовать обычную процедуру [5, 6] введения в окрестности контура Γ внутренних «растянутых» переменных в плане пластины, соответствующих x_1, x_2 , и построения внутреннего асимптотического разложения для погранслоя с последующим «сшиванием» (согласованием) его с внешним разложением. Аналогично, невязки в начальных условиях (12) можно устранить, использовав внутреннюю «растянутую» переменную по времени в окрестности начального момента t_0 и построив по времени внутреннее асимптотическое разложение типа «погранслоя» с последующим сшиванием его с внешним разложением. Изучение этих вопросов выходит за рамки настоящей статьи в силу ограниченности ее объема.

Полученное в настоящей работе внешнее асимптотическое разложение и сделанные на его основе оценки точности представления температуры по линейному или квадратичному закону распределения по толщине слоев пластины могут быть использованы при расчетах на прочность и податливость тонкостенных слоистых конструкций, так как используемые на практике приближенные теории изгиба пластин (Кирхгофа, Тимошенко и др. [2]) дают приемлемую точность лишь на некотором удалении от кромок пластины или линий искажения напряженного состояния, т.е. за пределами погранслоя и локальных эффектов, распространяющихся в глубину конструкции на расстояние порядка ее толщины [2]. Кроме того, построенное асимптотическое разложение температуры может быть использовано и при асимптотическом анализе термоупругого поведения анизотропных пластин. Так, в [1] при изучении асимптотических свойств решений термоупругих задач предполагалось, что температуру в пластине за пределами погранслоя можно представить в виде (16), но такое представление не было строго обосновано.

Работа выполнена при финансовой поддержке Президиума СО РАН (Постановление № 54 от 09.02.06, номер проекта 2.2).

1. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. – Москва: Наука, Физматлит, 1997. – 414 с.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин (прочность, устойчивость и колебания). – Москва: Наука, 1967. – 268 с.
3. *Выгодский М. Я.* Справочник по высшей математике. – Москва: Наука, 1977. – 872 с.
4. *Гуров К. П.* Феноменологическая термодинамика необратимых процессов. – Москва: Наука, 1978. – 128 с.

5. *Зино И. Е., Тропп Э. А.* Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. – Ленинград: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 224 с.
6. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. – Москва: Наука, 1989. – 336 с.
7. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Уточнение асимптотических разложений решений задачи теплопроводности анизотропных пластин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48,** № 2. – С. 157–171.

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ШАРУВАТИХ АНІЗОТРОПНИХ НЕОДНОРІДНИХ ПЛАСТИН ПРИ КРАЙОВИХ УМОВАХ ДРУГОГО РОДУ НА ЛИЦЬОВИХ ПОВЕРХНЯХ

Побудовано зовнішній асимптотичний розклад розв'язку задачі нестаціонарної теплопровідності шаруватих анізотропних неоднорідних пластин при крайових умовах другого роду на лицьових поверхнях. Проаналізовано отримані двовимірні розв'язувальні рівняння і досліджено асимптотичні властивості розв'язків задачі теплопровідності. Отримано оцінки точності, з якою температуру в пластині за межами пограншару можна вважати кусково-лінійно або кусково-квадратично розподіленою по товщині шаруватої конструкції. Наведено фізичне обґрунтування деяких особливостей асимптотичного розкладу температури.

ASYMPTOTIC ANALYSIS OF SOLUTION TO THE PROBLEM ON NON-STATIONARY HEAT CONDUCTION OF LAYERED ANISOTROPIC INHOMOGENEOUS PLATES UNDER SECOND ORDER BOUNDARY CONDITIONS ON RIGHT SURFACES

The external asymptotic expansion of solution to the problem on non-stationary heat conduction of the layered anisotropic inhomogeneous plates under second order boundary conditions on the right surfaces is constructed. The obtained bi-dimensional resolving equations are analyzed and asymptotic properties of solutions to the heat conduction problem are studied. Estimations of accuracy with which the temperature in the plate outside the boundary layer can be considered as piecewise-linearly or piecewise-quadratically distributed through the thickness of layered design are obtained. The physical substantiation of some features of asymptotic expansion of temperature is given.

Ин-т теорет. и прикл. механики
СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено
22.01.07