

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ НЕЛІНІЙНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У ТОВСТОСТІННИХ СКЛАДЕНИХ ТІЛАХ

Досліджено наближений розв'язок нестационарної нелінійної задачі теплопровідності у товстостінному тілі складної форми зі скісними зрізами. Теплоємність та коефіцієнт теплопровідності тіла залежать від температури. За допомогою методу проміжної точки нестационарна крайова задача зводиться до послідовності стаціонарних. Чисельне розв'язування цих задач здійснюється методом скінченних елементів із використанням ізопараметричних апроксимацій та методу Ньютона – Рафсона. Наведено результати числового експерименту задачі про нагрів тіла складної форми.

Розв'язування задач теплопровідності у товстостінних тілах складної форми є важливою проблемою прикладного характеру. У відомих з літератури роботах з цієї тематики [1] розглянуто лінійну постановку задачі теплопровідності, яка не враховує залежності коефіцієнтів теплоємності та теплопровідності від температури. Однак урахування такої залежності суттєво покращує адекватність математичної моделі. У цій праці запропоновано метод розв'язання задачі нелінійної теплопровідності та наведено числовий результат для тіла складної форми.

1. Математична модель задачі. Розглянемо процес теплопровідності, що проходить у твердому однорідному товстостінному тілі. Умовно розіб'ємо тіло на N частин. Кожну з них віднесемо до деякої триортгональної системи координат, яка пов'язана із лініями кривин на базовій поверхні. Саму ж базову поверхню будемо задавати аналітично. Виходячи із цього, розглядатимемо процес теплопровідності, що проходить у складеному товстостінному тілі, що займає об'єм $V = \bigcup_{n=1}^N V^{(n)}$ із границею $S = \bigcup_{n=1}^N S^{(n)}$, де

$$V^{(n)} = \{ \mathbb{R}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : (\alpha_1, \alpha_2) \in v_0^{(n)}, h^{-(n)}(\alpha_1, \alpha_2) \leq \alpha_3 \leq h^{+(n)}(\alpha_1, \alpha_2) \};$$

$S^{(n)}$ – границя області $V^{(n)}$;

$v_0^{(n)}$ – замкнена однозв'язна область в \mathbb{R}^2 ;

$h^{-(n)}(\alpha_1, \alpha_2), h^{+(n)}(\alpha_1, \alpha_2)$ – відстані від базової поверхні n -ї частини тіла до нижньої та верхньої лицевих граней відповідно;

$\Omega^{(n)} = \{ \mathbb{R}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, 0) : (\alpha_1, \alpha_2) \in v_0^{(n)} \}$ – базова поверхня частини тіла.

Для спрощення викладу усі співвідношення надалі будемо записувати для n -ї частини тіла.

Математична модель процесу теплопровідності описується рівнянням

$$\rho c_v(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{H_i^{(n)}} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\lambda_{kj}(T) \frac{1}{H_j^{(n)}} \frac{\partial T}{\partial \alpha_j} \right) + w \quad (1)$$

із початковими та граничними умовами

$$T|_{\tau=0} = 0, \quad (2)$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^3 \lambda_{ij}(T) \frac{1}{H_j^{(n)}} \frac{\partial T}{\partial \alpha_j} \frac{1}{H_i^{(n)}} n_i + \alpha \left(T - \hat{T} \right) \right] \Big|_S = 0, \quad (3)$$

де $T(\tau, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – температура у тілі в момент часу τ ; w – функція джерел тепла; $\hat{T} = T_{\text{sur}} - T_0$, T_{sur} – температура навколишнього середовища; \mathbf{n} – вектор нормалі до поверхні S ; ρ – густина тіла; c_v – теплоємність одиниці маси матеріалу при сталому об'ємі; λ_{kj} – коефіцієнти тепло-

провідності; α – коефіцієнт теплообміну на поверхні S ; $H_i^{(n)}$, $i = 1, 2, 3$, – параметри Ляме n -ї частини тіла.

2. Варіаційне формулювання задачі. Розв'язок задачі (1)–(3) в часі шукатимемо у точках $0 < \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_m < \tau_{m+1} < \dots < \tau_M = t$ методом проміжної точки. Замінімо $\frac{\partial T}{\partial \tau}$ скінченною різницею

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{T(\tau_{m+1}) - T(\tau_m)}{\tau_{m+1} - \tau_m} = \frac{\overset{\circ}{T}_{m+1} - \overset{\circ}{T}_m}{\tau_{m+1} - \tau_m} = \frac{T_m}{\Delta \tau_m}, \quad m \in \{0, \dots, M-1\}. \quad (4)$$

Тоді температура у момент часу $\tau_m + \theta \Delta \tau_m$ матиме такий розподіл:

$$T_{m+\theta} = \overset{\circ}{T}_m + \theta T_m. \quad (5)$$

Враховавши (4) та (5), отримаємо

$$\rho c_v \left(\overset{\circ}{T}_m + \theta T_m \right) T_m = \Delta \tau \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{H_i^{(n)}} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left[\lambda_{ij} \left(\overset{\circ}{T}_m + \theta T_m \right) \frac{1}{H_j^{(n)}} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\overset{\circ}{T}_m + \theta T_m \right) \right] + \Delta \tau_m w_{m+\theta}, \quad (6)$$

$$\left[\sum_{i,j=1}^3 \lambda_{ij} \left(\overset{\circ}{T}_m + \theta T_m \right) \frac{1}{H_j^{(n)}} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\overset{\circ}{T}_m + \theta T_m \right) \frac{1}{H_i^{(n)}} n_i + \alpha \left(\overset{\circ}{T}_m + \theta T_m - \hat{T}_{m+\theta} \right) \right] \Big|_S = 0. \quad (7)$$

Крайова задача (6), (7) є нелінійною відносно T_m , тому за допомогою ітераційного процесу Ньютона зведемо її до послідовності лінійних. Розв'язок отриманої нелінійної задачі будемо шукати у вигляді

$$T_m = T_m^{(i)} + \Delta T_m^{(i)}.$$

Розвинемо $c_v(T)$ та $\lambda_{kj}(T)$ у ряд Тейлора в околі точки $\overset{\circ}{T}_m + \theta T_m$ та припустимо, що $\Delta T_m^{(i)}$ – мала функція у тому розумінні, що членами другого і вищих порядків можна знехтувати. Отримаємо лінійну задачу відносно $\Delta T_m^{(i)}$. У результаті маємо деякий процес Ньютона – Рафсона для знаходження T_m . Варіаційна постановка задачі зводиться до відшукування функції $\Delta T_m^{(i)} \in H^1(V)$, яка надає стаціонарного значення функціоналу

$$\begin{aligned} I^\Delta \left(\overset{\circ}{T}_m, T_m^{(i)}, \Delta T_m^{(i)} \right) &= \\ &= \frac{1}{2} \theta \Delta \tau_m \int_V \sum_{i,j=1}^3 (\lambda_{m+\theta}^{(i)})_{ij} \frac{1}{H_i^{(n)}} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (\Delta T_m^{(i)}) \frac{1}{H_j^{(n)}} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} (\Delta T_m^{(i)}) dV + \\ &+ \frac{1}{2} \int_V \rho c_{vm+\theta}^{(i)} (\Delta T_m^{(i)})^2 dV + \int_V \rho c_{vm+\theta}^{(i)} T_m^{(i)} \Delta T_m^{(i)} dV - \Delta \tau_m \int_V \rho w_{m+\theta} \Delta T_m^{(i)} dV + \\ &+ \Delta \tau_m \int_V \sum_{i,j=1}^3 (\lambda_{m+\theta}^{(i)})_{ij} \frac{1}{H_j^{(k)}} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\overset{\circ}{T}_m + \theta T_m^{(i)} \right) \frac{1}{H_i^{(k)}} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (\Delta T_m^{(i)}) dV + \\ &+ \Delta \tau_m \int_S \alpha \left(\overset{\circ}{T}_m + \theta T_m^{(i)} + \frac{\theta}{2} \Delta T_m^{(i)} - \hat{T}_{m+\theta} \right) \Delta T_m^{(i)} dS. \end{aligned} \quad (8)$$

3. Метод числового розв'язування. Для числового розв'язування цієї задачі виразимо невідому функцію $\Delta T_m^{(i)}$ за допомогою скінченноелементних ізопараметричних апроксимацій. Для цього подамо базову поверхню $\Omega^{(n)}$ у вигляді об'єднання криволінійних чотирикутників $\Omega_e^{(n)}$, на краях яких вибрано 8 вузлових точок. Відобразимо внутрішню частину квадрата $\Xi = \{\xi_i : -1 \leq \xi_i \leq 1, i = 1, 2\}$ на область $\Omega_e^{(n)}$ за допомогою перетворення

$$\alpha_p(\xi_1, \xi_2, 0) = \sum_{\substack{k_1, k_2 = -1, 0, 1 \\ k_1^2 + k_2^2 \neq 0}} \alpha_{pk_1k_2} \Phi_{k_1k_2}^0(\xi_1, \xi_2), \quad p = 1, 2,$$

де $(\alpha_{1k_1k_2}, \alpha_{2k_1k_2})$ – координати вузла (k_1, k_2) елемента $\Omega_e^{(n)}$; $\Phi_{k_1k_2}^0(\xi_1, \xi_2)$ – біквадратичні базові функції, які задаються формулами

$$\begin{aligned} \Phi_{k_1k_2}^0 &= -\frac{1}{4}(1 + k_1\xi_1)(1 + k_2\xi_2)(1 - k_1\xi_1 - k_2\xi_2), \\ \Phi_{0k_2}^0 &= \frac{1}{2}(1 + k_2\xi_2)(1 - \xi_1^2), \quad \Phi_{k_10}^0 = \frac{1}{2}(1 + k_1\xi_1)(1 - \xi_2^2). \end{aligned}$$

Через кожну точку елемента $\Omega_e^{(n)}$ базової поверхні проведемо пряму під кутом

$$\beta_p(\xi_1, \xi_2) = \sum_{\substack{k_1, k_2 = -1, 0, 1 \\ k_1^2 + k_2^2 \neq 0}} \beta_{pk_1k_2} \Phi_{k_1k_2}^0(\xi_1, \xi_2), \quad p = 1, 2,$$

де $\beta_{pk_1k_2}$ – котангенс кута нахилу деякої прямої, яка проходить через точку $(\alpha_{1k_1k_2}, \alpha_{2k_1k_2})$ до p -ї координатної лінії на базовій поверхні. Таким чином побудовано образ деякого просторового тіла $V_e^{(k)}$. Розбивши його на L частин за товщиною тіла, отримаємо криволінійні шестигранники $V_{el}^{(n)}$.

Нехай $\Theta = \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{L-1}, \eta_L\}$ – деяка множина точок така, що $\eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_{L-1} < \eta_L$. Введемо величини

$$h_{k_1k_2\ell}^{k_3} = \begin{cases} h_{k_1k_2}^- \eta, & \eta < 0, \\ h_{k_1k_2}^+ \eta, & \eta \geq 0, \end{cases}$$

де $\eta = \left(\frac{\eta_{\ell-1} + \eta_\ell}{2} - k_3 \frac{\eta_{\ell-1} - \eta_\ell}{2} \right)$, $h_{k_1k_2}^- > 0$, $h_{k_1k_2}^+ > 0$.

Зазначимо, що $h_{k_1k_2\ell}^+$, $h_{k_1k_2\ell}^-$ визначають відстані від базової поверхні до лицевих поверхонь елемента $V_{el}^{(n)}$ за товщиною.

Відобразимо внутрішню частину куба $\Xi = \{\xi_i : -1 \leq \xi_i \leq 1, i = 1, 2, 3\}$ на область $V_{el}^{(n)}$ за допомогою перетворення

$$\begin{aligned} \alpha_p(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \sum_{\substack{k_1, k_2 = -1, 0, 1; k_3 = -1, 1; \\ k_1^2 + k_2^2 \neq 0}} \alpha_{pk_1k_2k_3} \Phi_{k_1k_2k_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \\ &= \sum_{\substack{k_1, k_2 = -1, 0, 1; k_3 = -1, 1; \\ k_1^2 + k_2^2 \neq 0}} (\tilde{\alpha}_{pk_1k_2} + \tilde{\beta}_{pk_1k_2} h_{k_1k_2\ell}^{k_3}) \Phi_{k_1k_2k_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad p = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

де

$$\tilde{\alpha}_{pk_1k_2} = \alpha_{pk_1k_2}, \quad \tilde{\beta}_{pk_1k_2} = \beta_{pk_1k_2}, \quad p = 1, 2,$$

$$\tilde{\alpha}_{3k_1k_2} = 0, \quad \tilde{\beta}_{3k_1k_2} = 1,$$

$$\Phi_{k_1k_2k_3}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{2} \Phi_{k_1k_2}^0(\xi_1, \xi_2)(1 + k_3\xi_3), \quad k_3 = -1, 1.$$

Отримаємо просторові скінченні елементи, на краях яких вибрано 16 вузлових точок. Ці елементи не повинні обмежуватись поверхнями, що перетинаються під дуже гострими кутами.

Підставимо побудовані апроксимації у функціонал (8), у якому розіб'ємо інтеграли по V на суму інтегралів по складових частинах тіла. З умови мінімуму отриманої квадратичної форми впливає ключова система лінійних алгебраїчних рівнянь $Kq = F$. Розв'язками цієї системи є невідомі вузлові значення температурного поля у вузлах скінченних елементів.

Зазначимо, що лицеві поверхні апроксимуються поверхнею другого порядку за α_1, α_2 та першого – за α_3 у криволінійній системі, пов'язаній із частиною тіла.

Запропонована методика побудови просторової скінченноелементної сітки, по-перше, дозволяє врахувати скісні зрізи товстостінного тіла, які не враховуються при використанні гіпотез теорії оболонок. По-друге, при такій побудові сітки всі невідомі вузлові значення шуканих функції асоціюються із вузлом на базовій поверхні, що дозволяє просто розв'язувати проблему ідентифікації просторових скінченних елементів.

4. Аналіз числових експериментів. Будемо вважатимемо надалі, що тіло є ізотропним і товстостінні складові виготовлені із вуглеводистої сталі марки 15, яка має такі теплофізичні характеристики [2]:

$$\rho = 7860 \text{ кг/м}^3, \quad c_v = 0.251046 \cdot (T - 373) + 468.619 \text{ [Дж/(кг} \cdot \text{°C)]},$$

$$\lambda = -0.04742 \cdot (T - 373) + 65.7835 \text{ [Дж/(м} \cdot \text{°C} \cdot \text{с)]}, \quad \alpha = 800 \text{ Дж/(м}^2 \cdot \text{°C} \cdot \text{с)}.$$

Кількість скінченних елементів і кроків числового інтегрування за часом задається такою, щоб при подальшому їх збільшенні четвертий знак не уточнювався.

Приклад 1. Розглянемо процес теплопровідності у пластині, яка описується радіусом-вектором

$$\mathbf{R} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1, \quad 0 \leq \alpha_1 \leq 1, \\ 0, \\ \alpha_3, \quad -0.04 \leq \alpha_3 \leq 0.04. \end{array} \right\}$$

Для порівняння із аналітичним розв'язком виберемо задачу, у якій теплофізичні параметри не залежать від температури T , а визначаються при $T = 273 \text{ К}$. У результаті отримаємо лінійну задачу відносно температури T .

Нехай $S = S_1 \cup S_2$,

$$\begin{aligned} \text{де} \quad S_1 &= \{0 \leq \alpha_1 \leq 1, 0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi, \alpha_3 = 0.04\}, \\ S_2 &= \{\alpha_1 = 0, -0.04 \leq \alpha_3 \leq 0.04\} \cup \{0 \leq \alpha_1 \leq 1, \alpha_3 = -0.04\} \cup \\ &\quad \cup \{\alpha_1 = 1, -0.04 \leq \alpha_3 \leq 0.04\}. \end{aligned}$$

Початкові та крайові умови задамо такими:

$$T|_{\tau=0} = 273,$$

$$\left[\sum_{k,j=1}^3 \lambda_{kj}(T) \frac{1}{H_j} \frac{\partial T}{\partial \alpha_j} \frac{1}{H_k} n_k + \alpha(T - T_{\text{sur}}) \right] \Big|_{S_1} = 0,$$

$$\left[\sum_{k,j=1}^3 \lambda_{kj}(T) \frac{1}{H_j} \frac{\partial T}{\partial \alpha_j} \frac{1}{H_k} n_k \right] \Big|_{S_2} = 0,$$

де $T_{\text{sur}} = 1273 \text{ К}$.

Розв'язок задачі не залежить від змінної α_1 . Для її числового розв'язування задамо крок за часом $\Delta\tau = 0.05$ та 256 скінченних елементів за α_3 . У табл. 1 наведено аналітичний розв'язок [3] (верхнє значення) та розв'язок, отриманий за описаною числовою схемою (нижнє значення), у різні моменти часу.

Таблиця 1

α_3	$t = 1.0$	$t = 2.0$	$t = 5.0$	$t = 10.0$	$t = 50.0$	$t = 100.0$
0.04	328.061	349.80	389.755	431.875	578.393	666.224
	327.702	349.226	389.596	431.765	578.349	666.201
0.03	276.485	286.096	315.435	353.749	505.398	601.085
	276.618	286.113	315.361	353.667	505.353	601.062
0.02	273.025	273.897	283.956	307.799	444.428	543.773
	273.054	273.980	284.005	307.787	444.390	543.751
0.01	273.000	273.014	274.926	285.509	395.524	494.808
	273.000	273.031	274.984	285.547	395.498	494.790
0.0	273.000	272.996	273.220	276.702	358.033	454.533
	273.000	273.000	273.245	276.744	358.022	454.519
-0.01	273.000	272.994	273.014	273.893	330.836	423.138
	273.000	273.000	273.020	273.917	330.841	423.130
-0.02	273.000	273.001	273.003	273.177	312.641	400.706
	273.000	273.000	273.001	273.184	312.659	400.702
-0.03	273.000	273.011	273.007	273.033	302.271	387.253
	273.000	273.000	273.000	273.030	302.297	387.252
-0.04	273.000	273.012	273.010	273.013	298.911	382.771
	273.000	273.000	273.000	273.008	298.940	382.770

Із даних, наведених у табл. 1, впливає, що числовий розв'язок, отриманий за заданою числовою схемою, добре узгоджується із аналітичним.

Приклад 2. Дослідимо процес теплопровідності у складному тілі, умовно поділеному на дві частини, які описуються радіус-векторами

$$\mathbf{R}^{(1)} = \left\{ \begin{array}{ll} (r_1^{(1)} + \alpha_3) \cos \alpha_2, & -0.01 \leq \alpha_3 \leq 0.01, \\ (r_1^{(1)} + \alpha_3) \sin \alpha_2, & 0 < \alpha_2 \leq 2\pi, \\ -\alpha_1, & -0.6 \leq \alpha_1 \leq -\alpha_3, \end{array} \right\},$$

$$\mathbf{R}^{(2)} = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1 \cos \alpha_2, & -0.01 \leq \alpha_3 \leq 0.01, \\ \alpha_1 \sin \alpha_2, & 0 < \alpha_2 \leq 2\pi, \\ \alpha_3, & r_1^{(1)} + \alpha_3 \leq \alpha_1 \leq r_1^{(1)} + 0.06 \end{array} \right\},$$

де $r_1^{(1)} = 1.0$.

На рис. 1а та 1б зображено першу та другу частини складного тіла, які задаються відповідно радіусами-векторами $R^{(1)}$ та $R^{(2)}$.

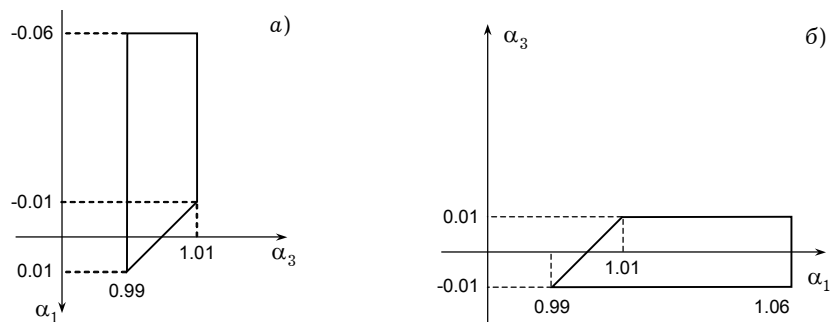


Рис. 1

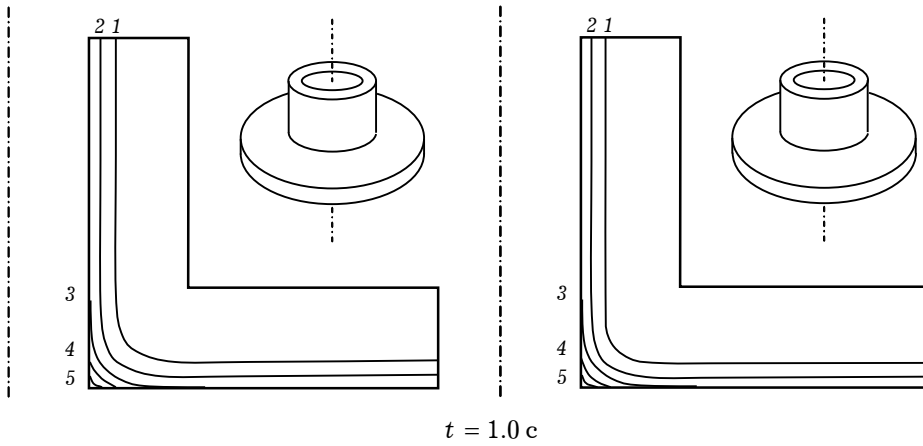
Значення теплофізичних параметрів у лінійній задачі візьмемо при $T = 273$ К.

Початкову умову запишемо у вигляді

$$T|_{\tau=0} = 273.$$

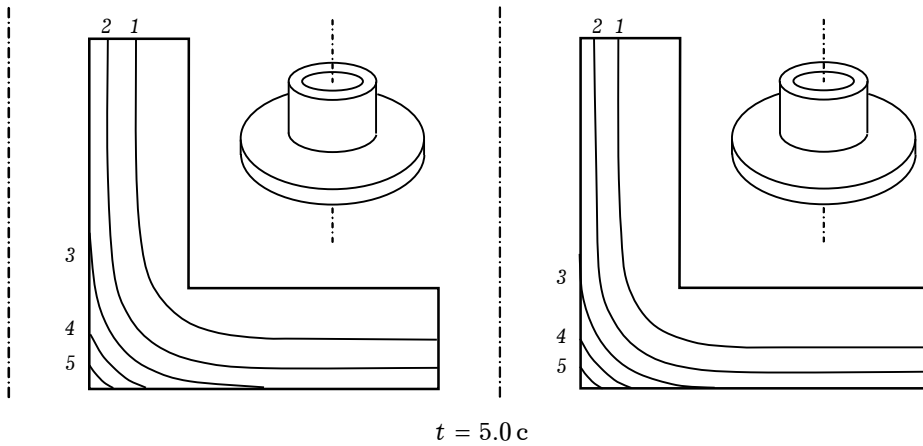
Нехай на нижній лицевій поверхні тіла ($\alpha_3 = -0.004$) здійснюється теплообмін із середовищем, температура якого $T_{\text{sur}} = 1273 \text{ К}$. На інших границях забезпечується теплоізоляція. При таких умовах задача є осесиметричною за координатою α_2 . Для її числового розв'язування задамо 32 скінченні елементи за α_1 та 64 – за α_3 , крок за часом $\Delta\tau = 0.05$. Параметр проміжної точки $\theta = \frac{1}{2}$ (схема Кранка – Ніколсона).

На рис. 2-4 наведено розв'язки (ізолінії температурного поля) нелінійної (рис. 2а-4а) і лінійної (рис. 2б-4б) задач у моменти часу $t = 1.0, 5.0, 10.0 \text{ с}$. Бачимо, що зі збільшенням часу різниця між розв'язками цих задач зростає.



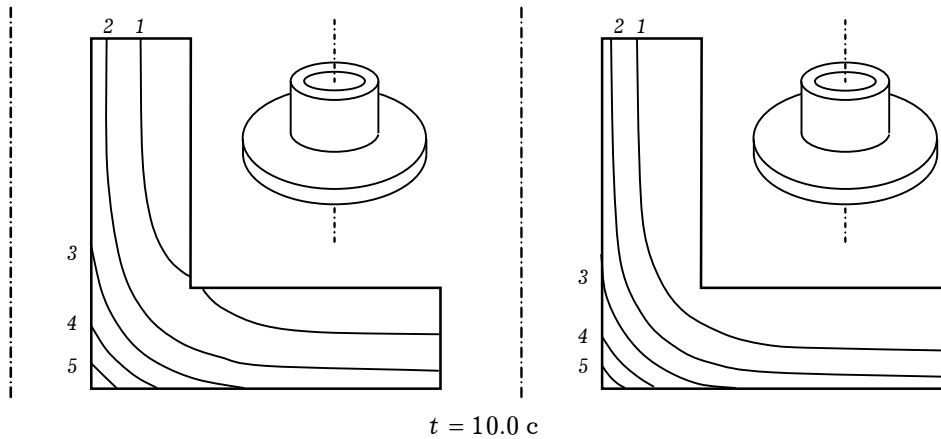
Номер ізолінії	1	2	3	4	5
Значення	290.839	308.615	326.391	344.168	361.944

Рис. 2



Номер ізолінії	1	2	3	4	5
Значення	327.561	360.915	394.268	427.622	460.976

Рис. 3



$t = 10.0 \text{ c}$

Номер ізолінії	1	2	3	4	5
Значення	379.147	417.569	455.990	494.412	532.834

Рис. 4

5. Висновки. Розглянуто метод чисельного розв'язування задачі теплопровідності у товстостінному тілі складної форми з використанням скінченноелементної ізопараметричної апроксимації. При цьому враховано залежності коефіцієнтів теплоємності та теплопровідності від температури тіла. Наведено варіаційне формулювання такої задачі. На прикладі задачі про нагрів пластини показано добру збіжність числового розв'язку до аналітичного. Наведено також приклади нелінійної та лінійної задач теплопровідності для тіла обертання складної форми. Показано, що з використанням нелінійної моделі теплопровідності можна отримати більш адекватну картину температурного поля в досліджуваному середовищі.

1. Беляев Н. М., Рядно А. А. Математические методы теплопроводности. – Киев: Вища шк., 1993. – 415 с.
2. Коваленко А. Д. Избранные труды. – Киев: Наук. думка, 1976. – С. 468–470.
3. Чиркин В. С. Теплофизические свойства материалов. (Справочное руководство). – Москва: Физматгиз, 1959. – 365 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ТОЛСТОСТЕННЫХ СОСТАВНЫХ ТЕЛАХ

Исследовано приближенное решение нестационарной нелинейной задачи теплопроводности в толстостенном теле сложной формы с косыми срезами. Теплоемкость и коэффициент теплопроводности тела зависят от температуры. За методом промежуточной точки нестационарная краевая задача сводится к последовательности стационарных. Численное решение этих задач осуществляется с помощью метода конечных элементов с использованием изопараметрических аппроксимаций и метода Ньютона – Рафсона. Приведены результаты численного эксперимента для задачи о нагреве тела сложной формы.

STUDY OF PROCESSES OF NON-LINEAR HEAT CONDUCTION IN THICK-WALLED SOLIDS OF COMPLICATED FORM

Approximate solution of non-stationary and non-linear heat conduction problem in a thick-walled solid of complicated form and with slanting cuts is studied. Heat capacity and heat conductivity depend on the temperature. By the middle point algorithm the non-stationary boundary-value problem is reduced to the sequence of stationary problems. Numerical solution of that type of problems is based on isoparametric approximations of finite element methods and Newton – Raphon's method. Numerical results for compound form solid heating are presented.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
05.05.06