УДК 517.524

Х. Й. Кучмінська

АНАЛОГ ТЕОРЕМИ ПЕЙДОНА – УОЛЛА ДЛЯ БАГАТОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНИХ ТИПІВ

Для багатовимірного неперервного дробу з нерівнозначними змінними та двовимірного неперервного дробу, елементи яких комплексні і задовольняють умови аналогів теорем Ворпіцького для таких дробів, встановлено аналоги теореми Пейдона − Уолла.

1. Попередні дослідження. Вивчаючи властивості неперервного дробу

$$\frac{1}{1+}\,\frac{a_2}{1}\,+\,\frac{a_3}{1}\,+\ldots$$

з комплексними елементами, які належать круговій області $|z| \le 1/4$, J. Worpitzky показав, що такий дріб збіжний [6]; W. T. Scott і H. S. Wall довели теорему про область значень такого збіжного дробу (так звана «параболо-колова» теорема [5]). J. F. Paydon і H. S. Wall отримали покращену оцінку для значення цього неперервного дробу, асоціюючи з цим неперервним дробом послідовність лінійних перетворень

$$a_1(v) = v, \qquad a_k(v) = \frac{1}{1 + a_k(v)}, \qquad k = 2, 3, \ldots,$$

та використовуючи поняття областей значень та областей елементів неперервного дробу [5]. Теорема Ворпіцького − одна з фундаментальних теорем аналітичної теорії як неперервних дробів, так і їх багатовимірних аналогів, тому отримання оцінок для значень дробів, елементи яких належать кругам Ворпіцького або їх узагальненням, є актуальною задачею.

Для гіллястих ланцюгових дробів аналог теореми Пейдона − Уолла встановлено в роботі [2]. Розглядатимемо два типи багатовимірних неперервних дробів з комплексними елементами:

з *нерівнозначними змінними* (БНДнз) [1, 3]

$$\cfrac{1}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} \cfrac{c_{i_1} z_{i_1}}{1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=2}^{\infty} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \cfrac{c_{i(k)} z_{i_k}}{1}}},$$

де $c_{i(k)}$ − комплексні сталі; z_{i_k} − комплексні змінні, $i(k) = i_1 i_2 \ldots i_k$, $1 \le i_k \le$ $\le i_{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $i_0 = N$,

та з *рівнозначними змінними* (двовимірні неперервні дроби (ДНД)) [4]:

$$\cfrac{1}{\Phi_0 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{\infty} \cfrac{c_{ii} z_1 z_2}{\Phi_i}},$$

$$\Phi_i = 1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_{i+j,i} z_1}{1} + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty} \frac{c_{i,i+j} z_2}{1},$$

де c_{ij}, $i = 0, 1, \ldots,$ $j = 1, 2, \ldots,$ − комплексні сталі; z_1, z_2 − комплексні змінні, $c_{00} = 1$, для яких отримаємо аналоги теореми Пейдона − Уолла.

2. Основні результати. Нехай елементи багатовимірного неперервного дробу з нерівнозначними змінними ($z_1 = z_2 = \ldots = 1$)

$$\frac{1}{1+\sum\limits_{i_1=1}^{N}\dfrac{c_{i_1}}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=2}^{\infty}\sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}}\dfrac{c_{i(k)}}{1}}}, \tag{1}$$

де $c_{i(k)}$ – комплексні сталі, $i(k)=i_1i_2\ldots i_k$, $1\le i_k\le i_{k-1}$, $k=1,2,\ldots$, $i_0=N$, належать кругам типу Ворпіцького [1]:

$$|c_{i(k)}|\le \alpha_{i_{k-1}}=\frac{t(1-t)}{i_{k-1}}, \qquad 0<t\le\frac{1}{2},$$
$$k=1,2,\ldots, \qquad i_0=N, \qquad 1\le i_k\le i_{k-1},$$

а двовимірний неперервний дріб з рівнозначними змінними ($z_1=z_2=1$)

$$\frac{1}{\Phi_0+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{c_{ii}}{\Phi_i}}, \qquad \Phi_i=1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty}\frac{c_{i+j,i}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{\infty}\frac{c_{i,i+j}}{1}, \tag{2}$$

розглядатиметься з n-м наближенням у вигляді

$$f_n=\mathop{\mathrm{D}}\limits_{i=0}^{n-1}\frac{c_{ii}}{\Phi_i^{(n-1-i)}}, \qquad \Phi_i^{(m)}=1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{m}\frac{c_{i+j,i}}{1}+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=1}^{m}\frac{c_{i,i+j}}{1}.$$

Теорема 1. *Якщо елементи багатовимірного неперервного дробу* (1) *задовольняють умови*

$$|c_{i(k)}|\le \alpha_{i_{k-1}}=\frac{t(1-t)}{i_{k-1}}, \qquad 0<t\le\frac{1}{2},$$
$$k=1,2,\ldots, \qquad i_0=N, \qquad 1\le i_k\le i_{k-1}, \tag{3}$$

то всі підхідні дроби дробу (1) *належать кругу*

$$\left|z-\frac{1}{1-t^2}\right|\le\frac{t}{1-t^2}\ . \tag{4}$$

Існує принаймні один багатовимірний неперервний дріб з елементами $|c_{i(k)}|\le\dfrac{t(1-t)}{i_{k-1}}$, $k=1,2,\ldots$, *значення якого є довільним наперед заданим числом з круга* (4). *Якщо* w – *довільне число на колі* (4), *то існує багатовимірний неперервний дріб з елементами з* (3), *значення якого дорівнює* w, *а саме, багатовимірний неперервний дріб*

$$\left(1+\sum\limits_{i_1=1}^{N}\dfrac{c_{i_1}}{1+\mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=2}^{\infty}\sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}}\dfrac{c_{i(k)}}{1}}\right)^{-1}, \qquad \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}}c_{i(k)}=t(t-1), \quad k=2,3,\ldots, \tag{5}$$

де, якщо $w=\dfrac{1+te^{i\theta}}{1-t^2}$, $0\le\theta<2\pi$, *тоді*

$$\sum_{i_1=1}^{N}c_{i_1}=t(t-1)\frac{2t+(1+t^2)\cos\theta+i(1-t^2)\sin\theta}{1+t^2+2t\cos\theta}. \tag{6}$$

Д о в е д е н н я. Якщо елементи c_{i_1} БНДнз (1) належать кругу (3), тобто $|z|\le\dfrac{1}{N}t(1-t)$, то значення БНДнз (5) дорівнює $w=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-t}\sum\limits_{i_1=1}^{N}c_{i_1}}$ і, оскільки c_{i_1} набуває значень з круга (3), тоді w також набуває значень з круга (4).

Щоб довести першу частину теореми, достатньо показати, що, якщо V_{i_1}, $i_1 = 1,\ldots,N$, – довільні значення з круга (4), то $w = \dfrac{1}{1 + \sum\limits_{i_1=1}^{N} c_{i_1} V_{i_1}}$ належить також цьому кругу для всіх значень c_{i_1} з круга (3). Зауважимо, що при виконанні умов (3) мажорантою для БНДнз (1) є періодичний неперервний дріб $\dfrac{1}{1 - \dfrac{t(1-t)}{1 - \dfrac{t(1-t)}{1 - \ddots}}}$.

Використовуючи метод повної математичної індукції для довільного набору індексів $i_1, i_2, \ldots, i_k$ і довільного натурального $s \ge k$, можна встановити оцінку [1]

$$\left| 1 + \sum_{i_1=1}^{N} \frac{c_{i_1}}{1 + \operatorname*{D}\limits_{k=2}^{s} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \dfrac{c_{i(k)}}{1}} \right| \ge h_{s-k}, \tag{7}$$

де h_m – m-не наближення (m-й підхідний дріб) дробу $1 - \dfrac{t(1-t)}{1 - \dfrac{t(1-t)}{1 - \ddots}}$. Зі збіжності мажоранти [6] випливає збіжність БНДнз (1). З (3) і (7) випливає, що $\left| \sum\limits_{i_1=1}^{N} c_{i_1} V_{i_1} \right| \le \dfrac{1}{N} t(1-t) \cdot \dfrac{N}{1-t} = t$, отже, $\left| \dfrac{1-w}{w} \right| \le t$, що й доводить (4).

Нехай $w = \dfrac{1 + te^{i\theta}}{1 - t^2}$, $0 \le \theta < 2\pi$, тоді $w = \left(1 + V \sum\limits_{i_1=1}^{N} c_{i_1} \right)^{-1}$, де V – значення збіжного БНДнз $\left(1 + \operatorname*{D}\limits_{k=2}^{s} \sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} \dfrac{c_{i(k)}}{1} \right)^{-1}$ з елементами $c_{i(k)}$, що задовольняють умову $\sum\limits_{i_k=1}^{i_{k-1}} c_{i(k)} = t(t-1)$, $k = 2, 3, \ldots$. Тому маємо

$$V \sum_{i_1=1}^{N} c_{i_1} = \frac{1-w}{w} = -t \frac{2t + (1+t^2)\cos\theta + i(1-t^2)\sin\theta}{1 + t^2 + 2t\cos\theta}. \tag{8}$$

Звідси випливає, що $\left| V \sum\limits_{i_1=1}^{N} c_{i_1} \right| = t$ або $\left| \sum\limits_{i_1=1}^{N} c_{i_1} \right| = \dfrac{t}{|V|} \cdot \dfrac{1-t}{1-t}$. Якщо $|V| \le \dfrac{1}{1-t}$, тоді $\left| \sum\limits_{i_1=1}^{N} c_{i_1} \right| \ge t(1-t)$, але $\left| \sum\limits_{i_1=1}^{N} c_{i_1} \right| \le t(1-t)$ за припущенням (3), тому $\left| \sum\limits_{i_1=1}^{N} c_{i_1} \right| = t(1-t)$, $|V| = \dfrac{1}{1-t}$, отже, $V = \dfrac{1}{1-t}$. З останньої рівності випливає, що V належить кругу (4). Покладаючи $V = \dfrac{1}{1-t}$ у (8), знаходимо, що $\sum\limits_{i_1=1}^{N} c_{i_1}$ повинна мати значення (6).

Тепер, починаючи з $V = \dfrac{1}{1-t}$ як значення на колі (4), що досягається, знайдемо в такий самий спосіб, що $\sum_{i_2=1}^{i_1} c_{i_1 i_2}$ мусить приймати значення $t(t-1)$, тобто у правій частині формули (6) маємо $\theta = 0$. Повторюючи цей процес, аналогічно отримаємо, що $\sum_{i_3=1}^{i_2} c_{i(3)}$, $\sum_{i_4=1}^{i_3} c_{i(4)}$, … мусять приймати значення $t(t-1)$. Теорему доведено. ◊

Зауваження 1. В аналозі теореми Пейдона − Уолла (теорема 1 з [2]) для гіллястих ланцюгових дробів можна послабити умову на коефіцієнти дробу (4) , а саме: замість $c_{i(k)} = \dfrac{1}{N} t(t-1)$ вимагати, щоб $\sum_{i_k=1}^{N} c_{i(k)} = t(t-1)$.

З використанням схеми доведення теореми 1 легко встановлюється аналог теореми Пейдона − Уолла для ДНД (2).

Теорема 2. *Якщо елементи двовимірного неперервного дробу* (2) *задовольняють умови*

$$\left|c_{ij}\right| \le t(1-t), \quad |i - j| \ge 2; \quad \left|c_{ij}\right| \le \frac{t(1-t)}{3}, \quad |i-j| < 2, \quad 0 < t \le \frac{1}{2}, \tag{9}$$

то всі підхідні дроби дробу (2) *належать кругу*

$$\left|z - \frac{1}{1-t^2}\right| \le \frac{t}{1-t^2}. \tag{10}$$

Існує принаймні один двовимірний неперервний дріб з елементами з (9), *значення якого є довільним наперед заданим числом з круга* (10). *Якщо* w *− довільне число на колі* (10), *тоді існує двовимірний неперервний дріб з елементами з* (9), *значення якого дорівнює* w, *а саме, двовимірний неперервний дріб*

$$\cfrac{1}{\Phi_0 + \cfrac{c_{11}}{\Phi_1 + \cfrac{\frac{1}{3}t(t-1)}{\Phi_2 + \cfrac{\frac{1}{3}t(t-1)}{\Phi_3 + \ddots}}}} = \cfrac{1}{\Phi_0 + \cfrac{c_{11}}{\Phi_1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=2}^{\infty} \cfrac{\frac{1}{3}t(t-1)}{\Phi_k}}}, \tag{11}$$

$$\Phi_0 = 1 + \cfrac{c_{10} + c_{01}}{1 + \cfrac{t(t-1)}{1 + \cfrac{t(t-1)}{1 + \ddots}}}, \qquad \Phi_k = 1 + \cfrac{\frac{2}{3}t(t-1)}{1 + \cfrac{t(t-1)}{1 + \cfrac{t(t-1)}{1 + \ddots}}}, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

де, якщо $w = \dfrac{1 + te^{i\theta}}{1-t^2}$, $0 \le \theta < 2\pi$, *тоді*

$$c_{10} + c_{01} + c_{11} = t(t-1)\frac{2t + (1+t^2)\cos\theta + i(1-t^2)\sin\theta}{1 + t^2 + 2t\cos\theta}.$$

Як і у випадку теореми 1, мажорантою ДНД (2) є неперервний періодичний дріб $\cfrac{1}{1 - \cfrac{t(1-t)}{1 - \cfrac{t(1-t)}{1 - \ddots}}}$.

Розглянемо ДНД (2), коефіцієнти якого задовольняють загальні аналоги умов Ворпіцького [4].

Теорема 3. *Якщо елементи двовимірного неперервного дробу* (2) *задовольняють умови*

$$\left|c_{ij}\right| \le \frac{t(1-t)}{2}, \qquad 0 < t \le \frac{1}{2}, \tag{12}$$

то всі підхідні дроби дробу (2) *належать кругу*

$$\left|z - \frac{1}{1-g^2}\right| \le \frac{g}{1-g^2} \tag{13}$$

(*тут* $g = \dfrac{1+2t-\sqrt{1-2t(1-t)}}{2}$, *причому* $g = \dfrac{4-\sqrt{2}}{4}$, *коли* $t = \dfrac{1}{2}$).

Існує принаймні один двовимірний неперервний дріб з елементами з (12), *значення якого є довільним наперед заданим числом з круга* (13). *Якщо* w *– довільне число на колі* (13), *то існує двовимірний неперервний дріб з елементами з* (12), *значення якого дорівнює* w, *а саме, двовимірний неперервний дріб*

$$\cfrac{1}{\Phi_0 + \cfrac{c_{11}}{\Phi_1 + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=2}^{\infty} \cfrac{\frac{1}{2}t(t-1)}{\Phi_k}}}, \tag{14}$$

$$\Phi_0 = 1 + \cfrac{c_{10}+c_{01}}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}t(t-1)}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}t(t-1)}{1 + \ddots}}}, \qquad \Phi_k = 1 + \cfrac{t(t-1)}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}t(t-1)}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}t(t-1)}{1 + \ddots}}}, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

де, якщо $w = \dfrac{1+ge^{i\theta}}{1-g^2}$, $0 \le \theta < 2\pi$, *тоді*

$$c_{10} + c_{01} + \frac{t+\sqrt{1-2t(1-t)}}{1-t}c_{11} =$$

$$= -g(1-g+t)\frac{2g + (1+g^2)\cos\theta + i(1-g^2)\sin\theta}{1+g^2+2g\cos\theta} \tag{15}$$

або

$$(c_{10}+c_{01})\frac{\sqrt{1-2t(1-t)}-t}{1-t} + c_{11} =$$

$$= -g(1-g)\frac{2g + (1+g^2)\cos\theta + i(1-g^2)\sin\theta}{1+g^2+2g\cos\theta}. \tag{15$'$}$$

Д о в е д е н н я. Якщо елементи ДНД (2) належать кругу (12), то $w = \left(1 + \dfrac{2(c_{10}+c_{01})}{1+\sqrt{1-2t(1-t)}} + \dfrac{2c_{11}}{1-2t+\sqrt{1-2t(1-t)}}\right)^{-1}$ і, оскільки c_{10}, c_{01}, c_{11} набувають значень з круга (12), то w набуває значень з (13). Покажемо, що, коли V_{10}, V_{01}, V_{11} – довільні значення з круга (13), то

$$w = (1 + c_{10}V_{10} + c_{01}V_{01} + c_{11}V_{11})^{-1}$$

також належить цьому кругу для всіх значень c_{10}, c_{01}, c_{11} з (12). При виконанні умов (12) мажорантою для ДНД (2) є періодичний неперервний дріб

$$\cfrac{\cfrac{1}{\sqrt{1-2t(1-t)}}}{1-\cfrac{k(1-k)}{1-\cfrac{k(1-k)}{1-\ddots}}}, \qquad \text{де} \qquad k=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-2t(1-t)}-(1-2t)\right).$$

Зі збіжності мажоранти випливає збіжність ДНД (2) [4]. Використовуючи метод повної математичної індукції для довільного набору індексів i, j та довільного натурального $s \geq k$ встановимо оцінку

$$\left|\Phi_0^{(s)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{s} \frac{c_{kk}}{\Phi_k^{(s)}}\right| \geq \sqrt{1-2t(1-t)}\, d_{s-k}, \tag{16}$$

де d_m є m-м наближенням неперервного дробу $1-\cfrac{k(1-k)}{1-\cfrac{k(1-k)}{1-\ddots}}$, коли

$k=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-2t(1-t)}-(1-2t)\right)$.

Використовуючи позначення

$$Q_i^{(s)} = \Phi_i^{(s)} + \frac{c_{i+1,i+1}}{Q_{i+1}^{(s-i)}}, \qquad Q_s^{k+i,i} = 1+\frac{c_{k+i+1,i}}{Q_s^{k+i+1,i}}, \qquad Q_s^{i,k+i} = 1+\frac{c_{i,k+i+1}}{Q_s^{i,k+i+1}},$$

$$\Phi_i^{(s)} = 1+\frac{c_{i+1,i}}{Q_s^{i+1,i}}+\frac{c_{i,i+1}}{Q_s^{i,i+1}}, \qquad Q_s^{(s)} = \Phi_s^{(s)} = 1,$$

спочатку встановимо оцінки для $Q_s^{k+i,i}$, $Q_s^{i,k+i}$:

$$Q_s^{s,i} = Q_s^{i,s} = 1, \qquad \text{коли} \qquad k=s-i;$$

$$\left|Q_s^{s-1,i}\right| = \left|1+\frac{c_{si}}{Q_s^{s,i}}\right| \geq 1-\frac{\frac{1}{2}t(1-t)}{1} \geq \frac{1+\sqrt{1-2t(1-t)}}{2}, \text{ коли } k=s-i-1.$$

Нехай при $k=s-i-j,\ 0<j<s$, виконується оцінка

$$\left|Q_s^{s-j,i}\right| \geq \frac{1+\sqrt{1-2t(1-t)}}{2}.$$

Тоді для $k=s-i-j-1$ отримуємо

$$\left|Q_s^{s-j-1,i}\right| = \left|1+\frac{c_{s-j,i}}{Q_s^{s-j,i}}\right| \geq 1-\frac{\frac{1}{2}t(1-t)\cdot 2}{1+\sqrt{1-2t(1-t)}} = \frac{1+\sqrt{1-2t(1-t)}}{2}.$$

Тепер знаходимо оцінки для $Q_i^{(s)}$:

$$Q_s^{(s)} = 1 > \sqrt{1-2t(1-t)}\, d_0, \qquad \text{коли} \qquad i=s;$$

$$\left|Q_{s-1}^{(s)}\right| = \left|1-\frac{c_{s-1,s}}{1}-\frac{c_{s,s-1}}{1}-\frac{c_{s,s}}{1}\right| \geq$$

$$\geq 1-\frac{3}{2}t(1-t) > \sqrt{1-2t(1-t)}\, d_1, \quad \text{коли} \quad i=s-1.$$

Нехай для довільного $i=k,\ 0<k<s$, виконується

$$\left|Q_k^{(s)}\right| \geq \sqrt{1-2t(1-t)}\, d_{s-k},$$

тоді для $i = k-1$ маємо

$$\left|Q_{k-1}^{(s)}\right| = \left|1 + \frac{c_{k,k-1}}{Q_s^{k,k-1}} + \frac{c_{k-1,k}}{Q_s^{k-1,k}} + \frac{c_{kk}}{Q_k^{(s)}}\right| \geq$$

$$\geq 1 - \frac{2t(1-t)}{1+\sqrt{1-2t(1-t)}} - \frac{\frac{1}{2}t(1-t)}{\sqrt{1-2t(1-t)}\, d_{s-k}} =$$

$$= \sqrt{1-2t(1-t)}\left(1 - \frac{\frac{\frac{1}{2}t(1-t)}{1-2t(1-t)}}{d_{s-k}}\right) = \sqrt{1-2t(1-t)}\, d_{s-k+1}.$$

З (12) і (16) випливає, що $\left|c_{10}V_{10} + c_{01}V_{01} + c_{11}V_{11}\right| = g$. Отже, $\left|\frac{1-w}{w}\right| \leq g$, що й доводить (13). Нехай $w = \frac{1+ge^{i\theta}}{1-g^2}$, $0 \leq \theta < 2\pi$, тоді $w = \frac{1}{1+(c_{10}+c_{01})V + c_{11}V_1}$, де V – значення збіжного дробу $\cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1}{2}t(t-1)}{1+\cfrac{\frac{1}{2}t(t-1)}{1+\ddots}}}$,

V_1 – значення збіжного ДНД

$$\frac{1}{\Phi_1 + \mathop{D}\limits_{i=2}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}t(t-1)}{\Phi_i}}, \qquad \Phi_i = 1 + \cfrac{t(t-1)}{1+\cfrac{\frac{1}{2}t(t-1)}{1+\cfrac{\frac{1}{2}t(t-1)}{1+\ddots}}}, \qquad i = 1,2,\ldots.$$

Тоді маємо

$$V(c_{10}+c_{01}) + V_1c_{11} = \frac{1-w}{w} = -g\,\frac{2g + (g^2+1)\cos\theta + i(1-g^2)\sin\theta}{1+g^2+2g\cos\theta}. \quad (17)$$

Звідси випливає, що $\left|V(c_{10}+c_{01}) + V_1c_{11}\right| = g$ і $\left|c_{10}+c_{01}+\frac{V_1c_{11}}{V}\right| = \frac{g}{|V|}$. Якщо

$$|V| \leq \frac{2}{1+\sqrt{1-2t(1-t)}}, \quad |V_1| \leq \frac{2}{1-2t+\sqrt{1-2t(1-t)}},$$

тоді

$$\left|c_{10}+c_{01}+\frac{t+\sqrt{1-2t(1-t)}}{1-t}c_{11}\right| \geq g\,\frac{1+\sqrt{1-2t(1-t)}}{2},$$

але враховуючи те, що c_{10}, c_{01}, c_{11} задовольняють умови (12), отримуємо

$$\left|c_{10}+c_{01}+\frac{t+\sqrt{1-2t(1-t)}}{1-t}c_{11}\right| \leq g\,\frac{1+\sqrt{1-2t(1-t)}}{2},$$

тому

$$V = \frac{2}{1+\sqrt{1-2t(1-t)}}, \qquad V_1 = \frac{2}{1-2t+\sqrt{1-2t(1-t)}}.$$

З останніх рівностей випливає, що V, V_1 належать кругу (13). Покладаючи V, V_1 у (17) , отримаємо виконання рівності (15). Для отримання рівності $(15')$ розглядається рівність $\left|(c_{10}+c_{01})\frac{V}{V_1} + c_{11}\right| = \frac{g}{V_1}$. Теорему доведено. ◊

Зауваження 2. Двовимірні неперервні дроби (11) і (14) є двовимірними неперервними дробами з нерівнозначними змінними.

Зауваження 3. Теорема 3 справджується і для фігурних наближень $f_n = \overset{[(n-1)/2]}{\underset{i=0}{\mathrm{D}}} \dfrac{c_{ii}}{\Phi_i^{(n-1-2i)}}$, $\Phi_i^{(m)} = 1 + \overset{m}{\underset{j=1}{\mathrm{D}}} \dfrac{c_{i+j,i}}{1} + \overset{m}{\underset{j=1}{\mathrm{D}}} \dfrac{c_{i,i+j}}{1}$, де $[k]$ означає цілу частину числа k.

3. Висновки. Оскільки неперервні дроби $\dfrac{1}{1+} \dfrac{a_2}{1} + \dfrac{a_3}{1} + \ldots$ з елементами в околі початку координат є важливими в застосуваннях до теорії функцій [5], то запропоновані теореми для узагальнень неперервних дробів цікаво використати для функцій багатьох змінних. Крім того, можна було б розглянути кардіоїдну чи параболічні області, щоб отримати оцінки значень багатовимірних неперервних дробів.

1. *Баран О. Є.* Аналог ознаки збіжності Ворпіцького для гіллястих ланцюгових дробів спеціального вигляду // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 2. – С. 35–38.
2. *Кучмінська Х. Й.* Аналог теореми Пейдона – Уолла для гіллястих ланцюгових дробів // Волин. мат. вісн. – 1996. – Вип. 3. – С. 72–75.
3. *Kuchmins'ka Kh.* On approximation of function by two-dimensional continued fractions // Rational approximation and its applications in Mathematics and Physics. Lecture Notes in Math., Springer-Verlag: – 1987. – **1237**. – P. 205–216.
4. *Kuchmins'ka Kh.* Convergence criteria of two-dimensional continued fractions // Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation II (Ed. Annie Cyut). – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. – 1994. – P. 423–431.
5. *Paydon F. J., Wall H. S.* The continued fractions as a sequence of linear transformations // Duke Math. J. – 1942. – **9**. – P. 360–372.
6. *Wall H. S.* Analytic theory of continued fractions. – New York: Van Nostrand, 1948. – 433 p.

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ПЕЙДОНА – УОЛЛА ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ ТИПОВ

Для многомерной непрерывной дроби с неравнозначными переменными и двумерной непрерывной дроби, элементы которых комплексные и удовлетворяют условиям аналогов теорем Ворпицкого для таких дробей, установлены аналоги теоремы Пейдона – Уолла.

THE PAYDON – WALL-LIKE THEOREM FOR MULTIDIMENSIONAL CONTINUED FRACTIONS OF SPECIAL TYPES

The Paydon – Wall-like theorems have been established for the multidimensional continued fraction with unequal variables and two-dimensional continued fraction, elements of which satisfy the Worpitzky-like theorem conditions for such fractions.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
15.04.07