УДК 517.956.4

С. Д. Івасишен, В. В. Лаюк

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ДЕЯКИХ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

Для трьох класів вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова досліджені фундаментальні розв'язки та коректна розв'язність задачі Коші.

У цій статті розглядаються класи рівнянь $\mathbf{E}_{21}^B$, $\mathbf{E}_{22}^B$ і $\mathbf{E}_{23}^B$, які узагальнюють відповідно клас $\mathbf{E}_{21}$ вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова порядку $2b$, клас $\mathbf{E}_{22}$ ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова і клас $\mathbf{E}_{23}$ вироджених рівнянь типу Колмогорова з $\overrightarrow{2b}$-параболічною частиною за основними змінними із монографії [4]. Уточнюються і доповнюються результати з [4] для класів $\mathbf{E}_{21}$, $\mathbf{E}_{22}$ і $\mathbf{E}_{23}$ та наводяться відповідні результати дослідження фундаментальних розв'язків і коректної розв'язності задачі Коші для класів $\mathbf{E}_{21}^B$, $\mathbf{E}_{22}^B$ і $\mathbf{E}_{23}^B$. Уточнення і доповнення результатів з [4] стосується в першу чергу поняття розв'язків та оцінок приростів старших похідних від фундаментальних розв'язків. При означенні розв'язків використовується поняття похідної Лі від функції відносно відповідного векторного поля [2, 3, 6].

1. Позначення, означення, припущення. Розглядатимемо рівняння з виродженнями за двома групами просторових змінних. Для цього вважатимемо, що n-вимірна просторова змінна x складається з n_1-вимірної змінної $x_1 := (x_{11},\dots,x_{1n_1})$, n_2-вимірної змінної $x_2 := (x_{21},\dots,x_{2n_2})$ і n_3-вимірної змінної $x_3 := (x_{31},\dots,x_{3n_3})$, тобто $x := (x_1,x_2,x_3)$. Тут n_1, n_2 і n_3 – такі натуральні числа, що $n_3 \le n_2 \le n_1$ і $n_1+n_2+n_3 = n$. Відповідно до цього мультиіндекс $k \in \mathbb{Z}_+^n$ записуватимемо у вигляді $k := (k_1,k_2,k_3)$, де $k_\ell := (k_{\ell 1},\dots,k_{\ell n_\ell}) \in \mathbb{Z}_+^{n_\ell}$, $\ell \in \{1,2,3\}$.

Об'єктом нашого дослідження є рівняння вигляду

$$(S_B - A_\ell(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = f(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad \ell \in \{1,2,3\}, \tag{1_ℓ}$$

де $\Pi_{(0,T]} := \{(t,x) \mid t \in (0,T],\ x \in \mathbb{R}^n\}$,

$$S_B := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2}\left(\sum_{s=1}^{n_1} b_{sj}^1 x_{1s}\right)\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3}\left(\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 x_{2s}\right)\partial_{x_{3j}}, \tag{2}$$

$$A_1(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{|k_1| \le 2b} a_{k_1}(t,x)\partial_{x_1}^{k_1}, \tag{3_1}$$

$$A_2(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t,x)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} + \sum_{j=1}^{n_1} a_j(t,x)\partial_{x_{1j}} + a_0(t,x), \tag{3_2}$$

$$A_3(t,x,\partial_{x_1}) := \sum_{\|k_1\| \le 2b} a_{k_1}(t,x)\partial_{x_1}^{k_1}. \tag{3_3}$$

У виразі (2) b_{sj}^1, b_{sj}^2 – задані дійсні числа, в (3_1) b – задане натуральне число і $|k_1| := k_{11} + \ldots + k_{1n_1}$, а в (3_3) b – найменше спільне кратне заданих натуральних чисел $b_1,\dots,b_{n_1}$ і $\|k_1\| := m_1 k_{11} + \dots + m_{n_1} k_{1n_1}$, де $m_j := b / b_j$, $j \in \{1,\dots,n_1\}$.

Диференціальний вираз (2) можна записати як

$$S_B = \partial_t - (x, BD_x), \tag{4}$$

де B – матриця розміру $n \times n$, яка має вигляд

$$B := \begin{Vmatrix} O & B^1 & O \\ O & O & B^2 \\ O & O & O \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

B^1, B^2 – матриці, складені відповідно з коефіцієнтів b^1_{sj}, $s \in \{1,\dots,n_1\}$, $j \in \{1,\dots,n_2\}$, і b^2_{sj}, $s \in \{1,\dots,n_2\}$, $j \in \{1,\dots,n_3\}$; O – нульові матриці відповідних розмірів; $D_x := \operatorname{col}(\partial_{x_{11}},\dots,\partial_{x_{1n_1}},\partial_{x_{21}},\dots,\partial_{x_{2n_2}},\partial_{x_{31}},\dots,\partial_{x_{3n_3}})$; $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$.

Для рівнянь (1_ℓ), $\ell \in \{1,2,3\}$, припускатимемо виконаними такі умови:

$\boldsymbol{\alpha}_1$) матриця (5), у якій блоки B^1 і B^2 записані відповідно у вигляді $\begin{Vmatrix} B^1_1 \\ B^1_2 \end{Vmatrix}$ і $\begin{Vmatrix} B^2_1 \\ B^2_2 \end{Vmatrix}$, де B^1_1, B^1_2, B^2_1 і B^2_2 – матриці відповідно розмірів $n_2 \times n_2$, $(n_1 - n_2) \times n_2$, $n_3 \times n_3$ і $(n_2 - n_3) \times n_3$, задовольняє умови

$$\det B^j_1 \neq 0, \qquad j \in \{1,2\};$$

$\boldsymbol{\alpha}_{2\ell}$) існує така стала $\delta > 0$, що для будь-яких $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\operatorname{Re} \Phi_\ell(t,x,\sigma_1) \le -\delta K_\ell(\sigma_1),$$

де

$$\Phi_1(t,x,\sigma_1) := \sum_{|k_1|=2b} a_{k_1}(t,x)(i\sigma_1)^{k_1},$$

$$\Phi_2(t,x,\sigma_1) := -\sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js}(t,x)\sigma_{1j}\sigma_{1s},$$

$$\Phi_3(t,x,\sigma_1) := \sum_{\|k_1\|=2b} a_{k_1}(t,x)(i\sigma_1)^{k_1},$$

$$K_1(\sigma_1) := \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^{2b}, \qquad K_2(\sigma_1) := \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^{2}, \qquad K_3(\sigma_1) := \sum_{j=1}^{n_1} \sigma_{1j}^{2b_j}.$$

Класи рівнянь (1_1), (1_2), (1_3), які задовольняють умову $\boldsymbol{\alpha}_1$ та відповідно умови $\boldsymbol{\alpha}_{21}$, $\boldsymbol{\alpha}_{22}$ і $\boldsymbol{\alpha}_{23}$, позначатимемо через $\mathbf{E}^B_{21}$, $\mathbf{E}^B_{22}$ і $\mathbf{E}^B_{23}$.

Припущення щодо гладкості коефіцієнтів диференціальних виразів (3_ℓ), $\ell \in \{1,2,3\}$, які зробимо нижче, гарантуватимуть лише існування розв'язків (у тому числі й фундаментальних) рівнянь із класів $\mathbf{E}^B_{2\ell}$, $\ell \in \{1,2,3\}$, у певному послабленому сенсі. Наведемо відповідні означення, які є аналогічними означенням, наведеним у [2, 3].

Означення 1. Функція u називається *диференційовною за Лі* в точці (t,x) відносно векторного поля, заданого диференціальним виразом (2) (або (4)), якщо існує скінченна границя

$$(S_B^L u)(t,x) := \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\big(u(\gamma(t,x,h)) - u(\gamma(t,x,0))\big),$$

де $\gamma(t,x,h) := \big(t-h, \big(e^{hB'}x'\big)'\big)$, $h \in \mathbb{R}$, − інтегральна крива заданого векторного поля, яка проходить через точку (t,x) (тут і далі штрих означає транспонування матриці).

Границя $(S_B^L u)(t,x)$ називається *похідною Лі* від функції u в точці (t,x) відносно заданого векторного поля.

Зауважимо, що якщо існують похідні $\partial_t u$, $\partial_{x_{2j}} u$ і $\partial_{x_{3j}} u$ в точці (t,x), то $(S_B^L u)(t,x) = (S_B u)(t,x)$.

Означення 2. Функцію u називатимемо L*-розв'язком рівняння* (1_ℓ) в $\Pi_{(0,T]}$, якщо існують у $\Pi_{(0,T]}$ неперервні похідна Лі $S_B^L u$ та звичайні похідні $\partial_{x_1}^{k_1} u$, $|k_1| \le 2b$, у випадку $\ell = 1$, похідні $\partial_{x_{1j}} u$, $\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1s}} u$ − у випадку $\ell = 2$, похідні $\partial_{x_1}^{k_1} u$, $\|k_1\| \le 2b$, − у випадку $\ell = 3$ і в кожній точці $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$ задовольняється рівняння

$$(S_B^L - A_\ell(t,x,\partial_{x_1}))u(t,x) = f(t,x). \tag{6}$$

Надалі під розв'язками рівнянь (1_ℓ) розумітимемо L-розв'язки, а під виразом $S_B u$ − похідну Лі $S_B^L u$.

Використовуючи структуру матриці B, описану в умові $\boldsymbol{\alpha}_1$, легко переконатись, що

$$\begin{aligned}
&\big(e^{hB'}x'\big)' = X(h) := \big(X_1(h), X_2(h), X_3(h)\big),\\
&X_\ell(h) := \big(X_{\ell 1}(h),\dots,X_{\ell n_\ell}(h)\big), \qquad \ell \in \{1,2,3\};\\
&X_{1j}(h) := x_{1j}, \qquad j \in \{1,\dots,n_1\},\\
&X_{2j}(h) := x_{2j} + h\sum_{k=1}^{n_1} b_{kj}^1 x_{1k}, \qquad j \in \{1,\dots,n_2\},\\
&X_{3j}(h) := x_{3j} + h\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 x_{2s} + \frac{h^2}{2}\sum_{k=1}^{n_1}\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 b_{ks}^1 x_{1k}, \qquad j \in \{1,\dots,n_3\},\\
&\gamma(t,x,h) = (t-h, X(h)), \qquad h \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Щоб сформулювати наступні припущення щодо коефіцієнтів виразів (3_ℓ), введемо відповідні поняття гельдерових функцій. Для цього розглянемо спеціальні відстані між точками x і ξ, (t,x) і (τ,ξ), де $\{t,\tau\} \subset \mathbb{R}$, $\{x := (x_1,x_2,x_3),\ \xi := (\xi_1,\xi_2,\xi_3)\} \subset \mathbb{R}^n$, $\{x_\ell := (x_{\ell 1},\dots,x_{\ell n_\ell}),\ \xi_\ell := (\xi_{\ell 1},\dots,\xi_{\ell n_\ell})\} \subset \mathbb{R}^{n_\ell}$. Ці відстані враховують специфіку кожного із трьох рівнянь (1_ℓ). Приймемо, що

$$d_\ell(x;\xi) := \begin{cases}
\sum\limits_{s=1}^{3} |x_s - \xi_s|^{1/(2b(s-1)+1)}, & \ell = 1,\\
\sum\limits_{s=1}^{3} |x_s - \xi_s|^{1/(2(s-1)+1)}, & \ell = 2,\\
\sum\limits_{s=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{n_s} |x_{sj} - \xi_{sj}|^{1/(2b(s-1)+m_j)}, & \ell = 3,
\end{cases}$$

$$d_\ell(t,x;\tau,\xi) := |t-\tau|^{1/r_\ell} + d_\ell(x,\xi), \qquad \ell \in \{1,2,3\},$$

де $r_1 := 2b$, $r_2 := 2$ і $r_3 := 2b$.

Означення 3. Функцію $f(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, називатимемо B_ℓ*-гельдеровою* з показником $\alpha \in (0,1]$ в $\Pi_{[0,T]}$, якщо існує така стала $H_\ell > 0$, що для будь-яких $\{(t,x),(\tau,\xi)\} \subset \Pi_{[0,T]}$ виконується нерівність

$$|f(t,x) - f(\tau,\xi)| \le H_\ell\big(d_\ell(t, X(t-\tau);\tau,\xi)\big)^\alpha.$$

Крім умов $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_{2\ell}$, використовуватимемо ще такі умови:

$\boldsymbol{\alpha}_{3\ell}$) коефіцієнти виразу $A_\ell(t,x,\partial_{x_1})$ обмежені та B_ℓ-гельдерові з показником $\alpha \in (0,1)$ в $\Pi_{[0,T]}$;

$\boldsymbol{\alpha}_{4\ell}$) коефіцієнти виразу $A_\ell(t,x,\partial_{x_1})$ мають обмежені та B_ℓ-гельдерові з показником $\alpha \in (0,1)$ в $\Pi_{[0,T]}$ похідні того самого вигляду, при яких вони стоять.

2. Зв'язок класів $\mathbf{E}_{21}^B$, $\mathbf{E}_{22}^B$ і $\mathbf{E}_{23}^B$ з класами $\mathbf{E}_{21}$, $\mathbf{E}_{22}$ і $\mathbf{E}_{23}$. Зробимо в рівняннях (1_ℓ), $\ell \in \{1,2,3\}$, заміну просторових змінних за допомогою системи рівностей

$$\hat{x}_{1j} := \begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{n_2}\left(\sum\limits_{k=1}^{n_1} b_{ks}^1 x_{1k}\right) b_{sj}^2, & j \in \{1,\dots,n_3\}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n_1} b_{kj}^1 x_{1k}, & j \in \{n_3+1,\dots,n_2\}, \\ x_{1j}, & j \in \{n_2+1,\dots,n_1\}; \end{cases}$$

$$\hat{x}_{2j} := \begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 x_{2s}, & j \in \{1,\dots,n_3\}, \\ x_{2j}, & j \in \{n_3+1,\dots,n_2\}; \end{cases}$$

$$\hat{x}_{3j} := x_{3j}, \qquad j \in \{1,\dots,n_3\},$$

яку коротко можна записати у вигляді

$$\hat{x}' = Ux', \tag{7}$$

де

$$U = \begin{Vmatrix} U_1 & O & O \\ O & U_2 & O \\ O & O & U_3 \end{Vmatrix},$$

U_1, U_2 і U_3 – матриці відповідно розмірів $n_1 \times n_1$, $n_2 \times n_2$ і $n_3 \times n_3$.

Як доведено в [1], за умови $\boldsymbol{\alpha}_1$ заміна (7) є невиродженою і невиродженими є матриці U_1, U_2 і U_3.

Після реалізації заміни (7) рівняння (1_ℓ), $\ell \in \{1,2,3\}$, переходять у рівняння

$$\big(S_{\hat{B}} - \hat{A}_\ell(t,\hat{x},\partial_{\hat{x}_1})\big)\hat{u}(t,\hat{x}) = \hat{f}(t,\hat{x}), \qquad (t,\hat{x}) \in \Pi_{(0,T]}, \qquad \ell \in \{1,2,3\}, \tag{8_ℓ}$$

у яких

$$\hat{B} := \begin{Vmatrix} O & \hat{B}_1 & O \\ O & O & \hat{B}_2 \\ O & O & O \end{Vmatrix}, \qquad \hat{B}_1 := \begin{Vmatrix} I_{n_2} \\ O \end{Vmatrix}, \quad \hat{B}_2 := \begin{Vmatrix} I_{n_3} \\ O \end{Vmatrix}$$

(I_r − одинична матриця порядку r); $\hat{A}_\ell(t,\hat{x},\partial_{\hat{x}_1})$, $\ell \in \{1,2,3\}$, − диференціальні вирази того самого вигляду, що й вирази $A_\ell(t,x,\partial_{x_1})$, $\ell \in \{1,2,3\}$, їхні коефіцієнти $\hat{a}_{k_1}$, $\hat{a}_{js}$, $\hat{a}_j$ і $\hat{a}_0$ виражаються через виражені в нових змінних $\hat{x}$ коефіцієнти a_{k_1}, a_{js}, a_j і a_0 та елементи матриць B^1 і B^2. При цьому з умов $\boldsymbol{\alpha}_{2\ell}$, $\boldsymbol{\alpha}_{3\ell}$ і $\boldsymbol{\alpha}_{4\ell}$ випливають для рівнянь (8_ℓ), $\ell \in \{1,2,3\}$, відповідно умови $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{2\ell}$, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{3\ell}$ і $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{4\ell}$, які відрізняються від попередніх лише тим, що в них $X(h)$ замінено на $\hat{X}(h) := (UX'(h))'$, де

$$\hat{X}_\ell(h) := (U_\ell X'_\ell(h))', \qquad \hat{X}_{\ell j}(h) := \sum_{r=0}^{\ell-1} \frac{1}{r!} h^r \hat{x}_{(\ell-r)j},$$

$$j \in \{1,\ldots,n_l\}, \qquad \ell \in \{1,2,3\}.$$

Отже, за допомогою заміни (7) рівняння (1_ℓ), $\ell \in \{1,2,3\}$, для яких виконуються умови $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_{2\ell}$, $\boldsymbol{\alpha}_{3\ell}$ і $\boldsymbol{\alpha}_{4\ell}$, зводяться до рівнянь ($8_\ell$), $\ell \in \{1,2,3\}$, які задовольняють умови $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{2\ell}$, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{3\ell}$ і $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{4\ell}$.

Класи рівнянь (8_1), (8_2) і (8_3), для яких виконуються відповідно умови $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{21}$, $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{22}$ і $\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{23}$, є класами $\mathbf{E}_{21}$, $\mathbf{E}_{22}$ і $\mathbf{E}_{23}$, розглянутими в [4].

Зауважимо, що в монографії [4] фактично розглядаються розв'язки рівнянь (8_ℓ) в сенсі означення 2, у якому рівняння (6) треба замінити рівнянням

$$(S^L_{\hat{B}} - \hat{A}_\ell(t,\hat{x},\partial_{\hat{x}_1}))\hat{u}(t,\hat{x}) = \hat{f}(t,\hat{x}),$$

де $S^L_{\hat{B}}\hat{u}$ − похідна Лі від функції $\hat{u}$ відносно векторного поля $S_{\hat{B}}$.

3. Фундаментальний розв'язок задачі Коші. Зроблені в **п. 2** зауваження і результати з монографіїї [4], що стосуються фундаментального розв'язку (ФР) і коректної розв'язності задачі Коші для рівнянь із класів $\mathbf{E}_{21}$, $\mathbf{E}_{22}$ і $\mathbf{E}_{23}$, дозволяють одержати відповідні результати для рівнянь із класів $\mathbf{E}^B_{21}$, $\mathbf{E}^B_{22}$ і $\mathbf{E}^B_{23}$.

Крім наведених у попередніх пунктах позначень, використовуватимемо ще такі:

$$M_1 := \sum_{s=1}^{3}\left(s - 1 + \frac{1}{2b}\right)n_s, \qquad M_2 := \sum_{s=1}^{3}\left(s - 1 + \frac{1}{2}\right)n_s,$$

$$M_3 := \sum_{s=1}^{3}\sum_{j=1}^{n_s}\left(s - 1 + \frac{1}{2b_j}\right);$$

$$\|k_1\|_1 := |k_1|, \quad \|k_1\|_2 := |k_1|, \quad \|k_1\|_3 := \|k_1\|, \qquad k_1 \in \mathbb{Z}^{n_1}_+;$$

$$q := \frac{2b}{2b-1}, \quad q_j := \frac{2b_j}{2b_j - 1}, \qquad j \in \{1,\ldots,n_1\};$$

$$\Delta_x^y f(\cdot,x,\cdot) := f(\cdot,x,\cdot) - f(\cdot,y,\cdot);$$

$$E_c^{(1)}(t,x;\tau,\xi) := \exp\{-c(t-\tau)^{1-q}|x_1-\xi_1|^q\}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{\infty}\left(\widehat{C}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2b}\right)(t-\tau)^{\alpha/(2b)}\right)^j\left(\Gamma\left(j\frac{\alpha}{2b}\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times\exp\left\{-c\delta_0^j\sum_{s=1}^{3}(t-\tau)^{1-qs}|X_s(t-\tau)-\xi_s|^q\right\},$$

$$E_c^{(2)}(t,x;\tau,\xi) := \exp\left\{-c\sum_{s=1}^{3}(t-\tau)^{1-2s}|X_s(t-\tau)-\xi_s|^2\right\},$$

$$E_c^{(3)}(t,x;\tau,\xi) := \exp\left\{-c\sum_{k=1}^{n_1}(t-\tau)^{1-q_k}|x_{1k}-\xi_{1k}|^{q_k}\right\}\times$$

$$\times\sum_{j=0}^{\infty}\left(\widehat{C}\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2b}\right)(t-\tau)^{\alpha/(2b)}\right)^j\left(\Gamma\left(j\frac{\alpha}{2b}\right)\right)^{-1}\times$$

$$\times\exp\left\{-c\delta_0^j\sum_{s=1}^{3}\sum_{k=1}^{n_s}(t-\tau)^{1-q_k s}|X_{sk}(t-\tau)-\xi_{sk}|^{q_k}\right\},$$

де c, $\widehat{C}$ і δ_0 – деякі додатні сталі, причому $\delta_0<1$; Γ – гамма-функція Ейлера; α – число з умови $\boldsymbol{\alpha}_{3\ell}$;

$$S_B^* := -\partial_\tau + \sum_{j=1}^{n_2}\left(\sum_{s=1}^{n_1}b_{sj}^1\xi_{1s}\right)\partial_{\xi_{2j}} + \sum_{j=1}^{n_3}\left(\sum_{s=1}^{n_2}b_{sj}^2\xi_{2s}\right)\partial_{\xi_{3j}}$$

– вираз, спряжений до S_B; $A_\ell^*(\tau,\xi,\partial_{\xi_1})$ – вираз, спряжений до $A_\ell(t,x,\partial_{x_1})$.

Теорема 1. *Нехай* $\ell\in\{1,2,3\}$ *та виконуються умови* $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_{2\ell}$ *і* $\boldsymbol{\alpha}_{3\ell}$. *Тоді для рівняння* (1_ℓ) *існує ФР задачі Коші* Z_ℓ, *для якого справджуються оцінки*

$$\left|\partial_{x_1}^{k_1}Z_\ell(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-M_\ell-\|k_1\|_\ell/r_\ell}E_c^{(\ell)}(t,x;\tau,\xi), \tag{9}$$

$$|S_B Z_\ell(t,x;\tau,\xi)| \le C(t-\tau)^{-M_\ell-1}E_c^{(\ell)}(t,x;\tau,\xi), \tag{10}$$

$$\left|\Delta_x^y\partial_{x_1}^{k_1}Z_\ell(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(d_\ell(x;y))^\alpha(t-\tau)^{-M_\ell-(\|k_1\|_\ell+\alpha)/r_\ell}\times$$

$$\times\left(E_c^{(\ell)}(t,x;\tau,\xi)+E_c^{(\ell)}(t,y;\tau,\xi)\right), \tag{11}$$

$$\left|\Delta_x^y S_B Z_\ell(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(d_\ell(x;y))^\alpha(t-\tau)^{-M_\ell-(1+\alpha)/r_\ell}\times$$

$$\times\left(E_c^{(\ell)}(t,x;\tau,\xi)+E_c^{(\ell)}(t,y;\tau,\xi)\right), \tag{12}$$

в яких $0\le\tau<t\le T$, $\{x,\,y,\,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $\|k_1\|_\ell\le r_\ell$.

Якщо додатково виконується умова $\boldsymbol{\alpha}_{4\ell}$, *то для спряженого рівняння*

$$\left(S_B^*-A_\ell^*(\tau,\xi,\partial_{\xi_1})\right)v(\tau,\xi)=g(\tau,\xi),\qquad(\tau,\xi)\in\Pi_{[0,T)},$$

існує ФР задачі Коші Z_ℓ^*, *який зв'язаний із* Z_ℓ *рівністю*

$$Z_\ell^*(\tau,\xi;t,x) = \overline{Z_\ell(t,x;\tau,\xi)}, \qquad 0 \le \tau < t \le T, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{13}$$

(*риска означає комплексне спряження*), *і для* Z_ℓ *правильна формула згортки*

$$Z_\ell(t,x;\tau,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} Z_\ell(t,x;\beta,y) Z_\ell(\beta,y;\tau,\xi)\,dy,$$

$$0 \le \tau < \beta < t \le T, \ \{x,\ \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{14}$$

Д о в е д е н н я. Існування ФР Z_ℓ і правильність оцінок (9) і (10) випливає із вищевказаного зв'язку між рівняннями (1_ℓ) і (8_ℓ) та відповідних результатів з [4] для рівнянь (8_ℓ). Доведення оцінок (11) і (12) є досить громіздким і використовує розвинуту в [4] методику оцінок для випадку рівняння (8_ℓ). Доведення існування ФР Z_ℓ^* та правильності формул (13) і (14) проводиться аналогічно доведенню в [4] для випадку рівняння (8_ℓ). ◊

Зауважимо, що серед наведених у теоремі 1 оцінок ФР найточнішими є оцінки для рівнянь із класу $\mathbf{E}_{22}^B$. Так само, як у [4], доводиться, що ФР Z_2 оцінюється через ФР Z_0 модельного рівняння

$$\left(S_B - a\sum_{j=1}^{n_1} \partial_{x_{1j}}\right) u = 0.$$

Для Z_0 можна одержати явну формулу.

4. Коректна розв'язність задачі Коші та інтегральні зображення розв'язків. Наведені в попередньому пункті результати дозволяють дослідити властивості потенціалів, породжених ФР Z_ℓ, і на їхній основі довести різноманітні теореми про коректну розв'язність задачі Коші та інтегральні зображення розв'язків для рівнянь із класів $\mathbf{E}_{21}^B$, $\mathbf{E}_{22}^B$ і $\mathbf{E}_{23}^B$. Нижче будуть наведені тільки дві теореми для рівнянь із класу $\mathbf{E}_{22}^B$. Вони є найточнішими порівняно з аналогічними теоремами для інших двох класів рівнянь.

Означимо необхідні норми та простори функцій. Для цього введемо такі набори функцій:

$$\mathbf{k}(t,\mathbf{a}) := (k_1(t,a_1), k_2(t,a_2), k_3(t,a_3)), \qquad \mathbf{s}(t) := (s_1(t), s_2(t), s_3(t)),$$

$$k_\ell(t,a_\ell) := c_0 a_\ell (c_0 - a_\ell t^{2\ell-1})^{-1}, \qquad \ell \in \{1,2,3\},$$

$$s_1(t) := k_1(t,a_1) + 2t^2 \left\| B^1 \right\|^2 k_2(t,a_1) + t^4 \left(\left\| B^1 \right\| \left\| B^2 \right\| \right)^2 k_3(t,a_3),$$

$$s_2(t) := 2k_2(t,a_2) + 4t^2 \left\| B^2 \right\|^2 k_3(t,a_3), \qquad s_3(t) := 4k_3(t,a_3),$$

$$t \in [0,T],$$

де $c_0 \in (0,c)$, c – стала з оцінок (9) і (10) для $\ell = 2$; $\mathbf{a} := (a_1,a_2,a_3)$ – набір таких невід'ємних чисел, що $T < \min\limits_{\ell\in\{1,2,3\}} \left(\dfrac{c_0}{a_\ell}\right)^{1/(2\ell-1)}$; $\left\|B^1\right\|$ і $\left\|B^2\right\|$ – норми матриць B^1 і B^2.

Для $p \in [1,\infty]$ і функції $u(t,x)$, $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$, означимо для кожного $t \in [0,T]$ норми

$$\| u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} := \left\| u(t,x)\exp\left\{-\sum_{\ell=1}^{3} k_\ell(t,a_\ell)|X_\ell(t)|^2\right\}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\| u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)} := \left\| u(t,x)\exp\left\{-\sum_{\ell=1}^{3} s_\ell(t)|x_\ell|^2\right\}\right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Використовуючи означення точок $X_\ell(t)$, $\ell \in \{1,2,3\}$, та відомі нерівності, маємо

$$|X_2(t)|^2 = \left|x_2 + t\left((B^1)' x_1'\right)'\right|^2 \le$$

$$\le 2\left(|x_2|^2 + t^2\left|((B^1)' x_1')'\right|^2\right) \le 2\left(|x_2|^2 + t^2\left\|B^1\right\|^2|x_1|^2\right),$$

$$|X_3(t)|^2 = \left|x_3 + t((B^2)' x_2')' + \frac{1}{2}t^2\left((B^2)'(B^1)' x_1'\right)'\right|^2 \le$$

$$\le 4\left(|x_3|^2 + \left|t((B^2)' x_2')'\right|^2 + \left|\frac{1}{2}t^2\left((B^2)'(B^1)' x_1'\right)'\right|^2\right) \le$$

$$\le 4|x_3|^2 + 4t^2\left\|B^2\right\|^2|x_2|^2 + t^4\left\|B^2\right\|^2\left\|B^1\right\|^2|x_1|^2,$$

і, отже,

$$\exp\left\{-\sum_{\ell=1}^{3} s_\ell(t)|x_\ell|^2\right\} \le \exp\left\{-\sum_{\ell=1}^{3} k_\ell(t,a_\ell)|X_\ell(t)|^2\right\},$$

тому

$$\| u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)} \le \| u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})}, \qquad t \in [0,T], \qquad p \in [1,\infty].$$

Нехай $L_p^{\mathbf{a}}$, $p \in [1,\infty]$, – простори вимірних функцій $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, для яких є скінченними норми $\| \varphi\|_p^{\mathbf{a}} := \| \varphi\|_p^{\mathbf{k}(0,\mathbf{a})}$;

$M^{\mathbf{a}}$ – простір комплекснозначних узагальнених борельових мір μ в $\mathbb{R}^n$, які задовольняють умову

$$\| \mu\|^{\mathbf{a}} := \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{-\sum_{\ell=1}^{3} a_\ell |x_\ell|^2\right\} d|\mu|(x) < \infty;$$

$L_1^{-\mathbf{s}(T)}$ – простір вимірних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ зі скінченною нормою $\left\| \psi(x)\exp\left\{\sum_{\ell=1}^{3} s_\ell(T)|x_\ell|^2\right\}\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}$;

$C_0^{-\mathbf{s}(T)}$ – простір таких неперервних функцій $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, що $|\psi(x)|\exp\left\{\sum_{\ell=1}^{3} s_\ell(T)|x_\ell|^2\right\} \to 0$ при $|x| \to \infty$.

Сформулюємо основні теореми для рівняння (1_2). При цьому для правої частини цього рівняння використовуватимемо умови

β_p) функція $f : \Pi_{(0,T]} \to \mathbb{C}$ неперервна, локально гельдерова за x відносно відстані $d_2(x;\xi)$ рівномірно щодо t і для будь-якого $t \in (0,T]$ є скінченними величини $\| f(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,a)}$ і $F_p(t) := \int_0^t \| f(\tau,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(\tau,\mathbf{a})}$, де $p \in [1,\infty]$.

Терема 2. *Нехай виконуються умови* $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_{22}$, $\boldsymbol{\alpha}_{32}$ і $\boldsymbol{\alpha}_{42}$.

Тоді правильні такі твердження:

(***i***) *для довільних функцій* $\varphi \in L_p^{\mathbf{a}}$ *і функції* f, *яка задовольняє умову* $\boldsymbol{\beta}_p$, $p \in [1,\infty]$, *формула*

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z_2(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z_2(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)d\xi\,, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}\,, \tag{15}$$

визначає єдиний розв'язок рівняння (1_2), *для якого справджується оцінка*

$$\| u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C\big(\| \varphi \|_p^{\mathbf{a}} + F_p(t)\big), \qquad t \in (0,T]\,,$$

при $p \in [1,\infty]$ − *співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \| u(t,\cdot) - \varphi(\cdot)\|_p^{\mathbf{s}(t)} = 0\,,$$

а при $p = \infty$ − *співвідношення*

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\varphi(x)dx$$

для будь-якої функції $\psi \in L_1^{-\mathbf{s}(T)}$;

(***ii***) *для будь-якої узагальненої міри* $\mu \in M^{\mathbf{a}}$ *і функції* f, *що задовольняє умову* $\boldsymbol{\beta}_1$, *формулою*

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z_2(t,x;0,\xi)d\mu(x) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} Z_2(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)d\xi\,, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}\,, \tag{16}$$

визначається єдиний розв'язок рівняння (1_2), *для якого справджуються оцінка*

$$\| u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C\big(\| \mu \|^{\mathbf{a}} + F_1(t)\big), \qquad t \in (0,T]\,,$$

і співвідношення

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)u(t,x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)d\mu(x)$$

для довільної функції $\psi \in C_0^{-\mathbf{s}(T)}$.

Теорема 3. *Нехай для коефіцієнтів рівняння* (1_2) *виконуються умови* $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_{22}$, $\boldsymbol{\alpha}_{32}$, $\boldsymbol{\alpha}_{42}$, *для його правої частини* f − *умова* $\boldsymbol{\beta}_p$, *а для розв'язку* u, *визначеного в* $\Pi_{(0,T]}$, *виконується нерівність*

$$\| u(t,\cdot)\|_p^{\mathbf{k}(t,\mathbf{a})} \le C, \qquad t \in (0,T]\,, \tag{17}$$

з деякими сталою $C > 0$ *і* $p \in [1,\infty]$.

Тоді при $p \in (1,\infty]$ *існує єдина функція* $\varphi \in L_p^{\mathbf{a}}$, *а при* $p = 1$ − *єдина узагальнена міра* $\mu \in M^{\mathbf{a}}$ *такі, що розв'язок* u *зображується відповідно у вигляді* (15) *і* (16).

Зробимо декілька заключних зауважень.

1°. З теорем 2 і 3 випливає, що простори $L_p^{\mathbf{a}}$, $p \in (1,\infty]$, і $M^{\mathbf{a}}$ є множинами початкових значень розв'язків рівняння (1_2) тоді й тільки тоді, коли розв'язки задовольняють умову (17) відповідно з $p \in (1,\infty]$ і $p = 1$. Ця умова є необхідною і достатньою для зображення розв'язків у вигляді (15) і (16).

2°. На практичну важливість рівнянь типу (1_2) вказано в [3–5].

3°. Знаходження умов на коефіцієнти рівнянь (1_ℓ), за яких L-розв'язки є звичайними розв'язками, являє собою значно складнішу задачу. Їй будуть присвячені наступні публікації.

1. *Лаюк В. В.* Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2005. – Вип. 239. – С. 82–85.
2. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – Москва: Мир, 1989. – 635 с.
3. *Di Francesco M., Pascucci A.* On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type // Appl. Math. Res. Express. – 2005. – No. 3. – P. 77–116.
4. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. – Vol. 152.)
5. *Pascucci A.* Kolmogorov equations in physics and finance // Progress in Nonlinear Differ. Equat. and their Appl. – 2005. – **63**. – P. 313–324.
6. *Polidoro S.* On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov – Fokker – Planck type // Le Matematiche. – 1994. – **49**. – P. 53–105.

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОЛМОГОРОВА

Для трех классов вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова исследованы фундаментальные решения и корректная разрешимость задачи Коши.

CAUCHY PROBLEM FOR SOME DEGENERATE PARABOLIC KOLMOGOROV TYPE EQUATIONS

For three classes of the degenerate parabolic Kolmogorov type equations the fundamental solutions and correct solvability of the Cauchy problem are investigated.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
10.05.07