УДК 517.956.4

М. І. Іванчов

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ, ЯКА ВИРОДЖУЄТЬСЯ У ПОЧАТКОВИЙ МОМЕНТ ЧАСУ

Для одновимірного рівняння теплопровідності розглянуто задачу з вільною межею, яка вироджується в початковий момент часу. Встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку вказаної задачі.

1. Формулювання задачі. В області $\Omega_T \equiv \{(x,t): 0 < x < h(t),\ 0 < t < T\}$ з невідомою межею $x = h(t)$ такою, що $h(t) > 0,\ t \in (0,T],\ h(0) = 0,\ h'(0) > 0$, розглянемо рівняння теплопровідності

$$u_t = u_{xx} + f(x,t) \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \qquad u(h(t),t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

та інтегральною додатковою умовою

$$\int_0^{h(t)} u(x,t)\,dx = \mu_3(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{3}$$

Вводячи нову змінну $y = \dfrac{tx}{h(t)}$, задачу (1)–(3) зводимо до такої:

$$v_t = \frac{t^2}{h^2(t)} v_{yy} + \frac{th'(t) - h(t)}{th(t)} y v_y + f(yh(t),t), \qquad (y,t) \in Q_T, \tag{4}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \qquad v(t,t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{5}$$

$$h(t)\int_0^t v(y,t)\,dy = t\mu_3(t), \qquad t \in [0,T], \tag{6}$$

де $Q_T \equiv \{(y,t): 0 < y < t,\ 0 < t < T\}$.

Розв'язок задачі (4)–(6) розуміємо в класичному сенсі:

$$(h,u) \in C^1[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T),$$

$$h(t) > 0, \qquad t \in (0,T], \qquad h(0) = 0, \qquad h'(0) > 0.$$

Зауважимо, що аналогічну задачу у випадку, коли вільна межа не вироджується, було розглянуто в [1].

Умови існування та єдиності розв'язку задачі (4)–(6) визначаються такими теоремами.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови:*

(***i***) $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2,3$; $f \in C^{1,0}(\bar{Q}_T)$;

(***ii***) $\mu_i(t) > 0$, $i = 1,2$, $t \in [0,T]$; $\mu_3(t) > 0$, $t \in (0,T]$, *існує скінченна додатна границя* $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\mu_3(t)}{t}$; $f(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T]$;

(***iii***) $\mu_1(0) = \mu_2(0)$.

Тоді існує розв'язок задачі (4)–(6).

Теорема 2. *При виконанні умови*

(***iiii***) $\mu_2(t) \ne 0$, $t \in [0,T]$, $\mu_3(t) \ne 0$, $t \in (0,T]$,

розв'язок задачі (4)–(6) *єдиний.*

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2007. – 50, № 3. – С. 82-87.

2. Зображення розв'язку задачі (4), (5) за допомогою функції Ґріна. Позначимо через $G(x,t,\xi,\tau)$ функцію Ґріна задачі

$$v_t = a(t)\,v_{yy} + f(y,t), \qquad (y,t)\in Q_T, \tag{7}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \qquad v(t,t) = \mu_2(t), \qquad t\in[0,T]. \tag{8}$$

Запишемо рівняння для функції Ґріна

$$0 = G_\tau + a(\tau)\,G_{\eta\eta} \tag{9}$$

і подамо рівняння (7) у вигляді

$$0 = v_\tau - a(\tau)\,v_{\eta\eta} - f(\eta,\tau). \tag{10}$$

Домножуючи рівняння (9) і (10) на $v(\eta,\tau)$ і $G(y,t,\eta,\tau)$ відповідно, додаючи їх та інтегруючи по області Q_T, отримаємо

$$0 = \int_0^t\int_0^\tau\Big(\frac{\partial}{\partial\tau}\big(G(y,t,\eta,\tau)\,v(\eta,\tau)\big) + a(\tau)\big(v(\eta,\tau)\,G_{\eta\eta}(y,t,\eta,\tau) -$$

$$- v_{\eta\eta}(\eta,\tau)\,G(y,t,\eta,\tau)\big)\Big)\,d\eta\,d\tau.$$

Звідси інтегруванням частинами з використанням властивостей функції Ґріна отримуємо формулу

$$v(y,t) = \int_0^t G(y,t,\tau,\tau)\,\mu_2(\tau)\,d\tau + \int_0^t G_\eta(y,t,0,\tau)\,a(\tau)\,\mu_1(\tau)\,d\tau -$$

$$- \int_0^t G_\eta(y,t,\tau,\tau)\,a(\tau)\,\mu_2(\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^\tau G(y,t,\eta,\tau)\,f(\eta,\tau)\,d\eta\,d\tau. \tag{11}$$

3. Побудова функції Ґріна. Для встановлення існування функції Ґріна задачі (7), (8) застосуємо аналог метода параметрикса [3, 4], подаючи функцію Ґріна у вигляді

$$G(y,t,\eta,\tau) = G_0(y,t,\eta,\tau) + \int_\tau^t d\sigma\int_0^\sigma G_0(y,t,\xi,\sigma)\,\Phi(\xi,\sigma,\eta,\tau)\,d\xi,$$

де

$$G_0(y,t,\eta,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(y-\eta+2nt)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) -\right.$$

$$\left.- \exp\left(-\frac{(y+\eta+2nt)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right),$$

$$\theta(t) = \int_0^t a(\tau)\,d\tau.$$

Легко переконатись у тому, що функція $G_0(y,t,\eta,\tau)$ є розв'язком рівняння

$$0 = G_{0\tau} + a(\tau)\,G_{0\eta\eta}$$

і задовольняє крайові умови

$$G_0(y,t,\eta,\tau)\big|_{y=0} = G_0(y,t,\eta,\tau)\big|_{y=t} = 0.$$

Стосовно невідомої функції $\Phi(y,t,\eta,\tau)$ отримуємо інтегральне рівняння

$$\Phi(y,t,\eta,\tau) = -L\,G_0(y,t,\eta,\tau) - \int_\tau^t d\sigma\int_0^\sigma L\,G_0(y,t,\xi,\sigma)\,\Phi(\xi,\sigma,\eta,\tau)\,d\xi, \tag{12}$$

у якому оператор L визначається формулою $L = \frac{\partial}{\partial t} - a(t)\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Існування розв'язку рівняння (12) встановлюється подібно, як у [3, 4].

4. Зведення задачі (4)–(6) до системи рівнянь. З умови (6) отримуємо рівняння, розв'язане стосовно невідомої функції $h(t)$:

$$h(t) = \frac{t\mu_3(t)}{\int\limits_0^t v(y,t)\,dy}, \qquad t \in [0,T]. \tag{13}$$

Побудову розв'язку прямої задачі зведемо до рівняння

$$v(y,t) = v_0(y,t) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau G(y,t,\eta,\tau)\frac{\tau h'(\tau) - h(\tau)}{\tau h(\tau)}\eta v_\eta(\eta,\tau)\,d\eta, \tag{14}$$

де $v_0(y,t)$ є розв'язком рівняння

$$v_{0t} = \frac{t^2}{h^2(t)} v_{0yy} + f(yh(t),t), \qquad (y,t) \in Q_T,$$

який задовольняє умови (5). Інтегруючи частинами та враховуючи (11), зведемо (14) до вигляду

$$v(y,t) = \int\limits_0^t G_\eta(y,t,0,\tau)\frac{\tau^2}{h^2(\tau)}\mu_1(\tau)\,d\tau - \int\limits_0^t G_\eta(y,t,\tau,\tau)\frac{\tau^2}{h^2(\tau)}\mu_2(\tau)\,d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau G(y,t,\eta,\tau) f(\eta h(\tau),\tau)\,d\eta + \int\limits_0^t G_\eta(y,t,\tau,\tau)\frac{\tau h'(\tau)}{h(\tau)}\mu_2(\tau)\,d\tau -$$
$$- \int\limits_0^t \left(\frac{h'(\tau)}{h(\tau)} - \frac{1}{\tau}\right) d\tau \int\limits_0^\tau (G(y,t,\eta,\tau) + \eta G_\eta(y,t,\eta,\tau))v(\eta,\tau)\,d\eta. \tag{15}$$

Для знаходження похідної $v_y(y,t)$ зробимо заміну

$$v(y,t) = \tilde{v}(y,t) + \mu_1(t) + \frac{y}{t}(\mu_2(t) - \mu_1(t)).$$

Функція $\tilde{v}(y,t)$ є розв'язком задачі

$$\tilde{v}_t = \frac{t^2}{h^2(t)}\tilde{v}_{yy} + \frac{th'(t) - h(t)}{th(t)} y\tilde{v}_y + f(yh(t),t) - \mu_1'(t) + \frac{y}{t^2}(\mu_2(t) - \mu_1(t)) -$$
$$- \frac{y}{t}(\mu_2'(t) - \mu_1'(t)) + \frac{th'(t) - h(t)}{t^2 h(t)}(\mu_2(t) - \mu_1(t))y, \qquad (y,t) \in Q_T, \tag{16}$$

$$\tilde{v}(0,t) = \tilde{v}(t,t) = 0, \qquad t \in [0,T]. \tag{17}$$

Задачу (16), (17) зведемо до еквівалентного рівняння

$$\tilde{v}(y,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau G(y,t,\eta,\tau)\Big(f(\eta h(\tau),\tau) - \mu_1'(\tau) + \frac{\eta}{\tau^2}(\mu_2(\tau) - \mu_1(\tau)) -$$
$$- \frac{\eta}{\tau}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + \frac{\tau h'(\tau) - h(\tau)}{\tau^2 h(\tau)}(\mu_2(\tau) - \mu_1(\tau))\eta\Big)\,d\eta +$$
$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau G(y,t,\eta,\tau)\frac{\tau h'(\tau) - h(\tau)}{\tau h(\tau)}\eta\tilde{v}_\eta(\eta,\tau)\,d\eta. \tag{18}$$

Диференціюючи (18) за y, повертаючись до функції v і позначаючи $v_y \equiv w$, запишемо

$$w(y,t) = \frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{t} + \int_0^t d\tau \int_0^\tau G_y(y,t,\eta,\tau)\Big(f(\eta h(\tau),\tau) -$$

$$- \mu_1'(\tau) + \frac{\eta}{\tau^2}(\mu_2(\tau) - \mu_1(\tau)) - \frac{\eta}{\tau}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau))\Big) d\eta +$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_0^\tau G_y(y,t,\eta,\tau) \frac{\tau h'(\tau) - h(\tau)}{\tau h(\tau)} \eta w(\eta,\tau)\, d\eta, \qquad (y,t) \in Q_T. \qquad (19)$$

До отриманих рівнянь приєднаємо рівняння, яке отримується диференціюванням умови (6) за t та використанням (4). Позначаючи $p(t) \equiv h'(t)$, маємо

$$p(t) = \frac{1}{\mu_2(t)}\Big(\mu_3'(t) - \frac{t}{h(t)}(w(t,t) -$$

$$- w(0,t)) - \frac{h(t)}{t} \int_0^t f(yh(t),t)\, dy \Big), \qquad t \in [0,T]. \qquad (20)$$

Отже, задачу (4)–(6) зведено до системи рівнянь (13), (15), (19), (20). Легко переконатись в їхній еквівалентності.

5. Доведення існування розв'язку. Існування розв'язку системи рівнянь (13), (15), (19), (20) встановимо за допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Для цього спочатку знайдемо апріорні оцінки неперервних розв'язків системи рівнянь (13), (15), (19), (20). З принципу максимуму випливають оцінки розв'язку задачі (4), (5)

$$0 < M_0 \le v(y,t) \le M_1 < \infty, \qquad (y,t) \in \bar{Q}_T, \qquad (21)$$

а, отже, і розв'язку рівняння (15). Враховуючи умови теореми, з (13) отримуємо оцінки $h(t)$:

$$C_1\mu_3(t) \le h(t) \le C_2\mu_3(t), \qquad t \in [0,T]. \qquad (22)$$

Звідси випливає, що, з одного боку, відношення $\frac{h(t)}{t}$ обмежене при $t \in$ $\in [0,T]$, а з іншого боку,

$$0 \le h(t) \le M_2, \qquad t \in [0,T]. \qquad (23)$$

Позначимо $W(t) \equiv \max\limits_{0 \le y \le t} |w(y,t)|$. З рівняння (20) маємо

$$|p(t)| \le C_3 + C_4 W(t), \qquad t \in [0,T]. \qquad (24)$$

Використовуючи оцінки функції Ґріна [2] та нерівність (24), з рівняння (19) знаходимо

$$W(t) \le C_5 + C_6 \int_0^t \frac{(1 + W(\tau))W(\tau)}{\sqrt{t - \tau}}\, d\tau, \qquad t \in [0,T]. \qquad (25)$$

Розв'язуючи нерівність (24) методом, викладеним в [1], отримаємо оцінку

$$W(t) \le M_3 < \infty, \qquad t \in [0,t_1],$$

або

$$|w(y,t)| \le M_3 < \infty, \qquad (y,t) \in \bar{Q}_{t_1}, \qquad (26)$$

де числа $M_3 > 0$ і $0 < t_1 \le T$ визначаються сталими C_5, C_6.

Подамо систему рівнянь (13), (15), (19), (20) у вигляді операторного рівняння

$$\omega = P\omega\,, \tag{27}$$

де $\omega \equiv (h, p, v, w)$, а оператор P визначений правими частинами рівнянь (13), (15), (19), (20). З оцінок (21), (23), (26), (24) випливає, що оператор P переводить множину

$$\mathcal{N} \equiv \{(h,\, p,\, v,\, w) \in (C[0,T])^2 \times (C(\bar{Q}_T))^2 : 0 \le h(t) \le M_2, \quad |p(t)| \le M_4\,,$$

$$t \in [0, t_1], \quad M_0 \le v(y,t) \le M_1, \quad |w(y,t)| \le M_3,\ (y,t) \in \bar{Q}_{t_1}\}$$

в себе (тут $M_4 = C_3 + C_4 M_3$). Те, що оператор P цілком неперервний, встановлено в [4]. Отже, за теоремою Шаудера на множині $\mathcal{N}$ існує нерухома точка оператора P, що завершує доведення існування розв'язку задачі (4)–(6).

6. Доведення єдиності розв'язку. Припустимо, що задача (4)–(6) має два розв'язки $(h_i(t), v_i(y,t))$, $i = 1, 2$. Позначимо $h(t) \equiv h_1(t) - h_2(t)$, $p(t) \equiv \equiv h_1'(t) - h_2'(t)$, $v(y,t) \equiv v_1(y,t) - v_2(y,t)$. З (4)–(6) отримуємо

$$\begin{aligned} v_t &= \frac{t^2}{h_1^2(t)} v_{yy} + \frac{t h_1'(t) - h_1(t)}{t h_1(t)} y v_y + \left(\frac{t^2 (h_1(t) + h_2(t))}{h_1^2(t) h_2^2(t)} v_{2yy}(y,t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{y h_2'(t)}{h_1(t) h_2(t)} v_{2y}(y,t) \right) h(t) + \frac{y}{h_1(t)} v_{2y}(y,t)\, p(t) + \\ &\quad + f(y h_1(t), t) - f(y h_2(t), t), \qquad (y,t) \in Q_T\,, \end{aligned} \tag{28}$$

$$v(0,t) = v(t,t) = 0, \qquad t \in [0,T]\,, \tag{29}$$

$$h(t) = -\frac{h_1(t) h_2(t)}{t \mu_3(t)} \int_0^t v(y,t)\, dy, \qquad t \in [0,T]\,. \tag{30}$$

Розв'язок задачі (28), (29) подамо у вигляді

$$\begin{aligned} v(y,t) &= \int_0^t d\tau \int_0^\tau G^*(y,t,\eta,\tau) \left(\left(\frac{\tau^2 (h_1(\tau) + h_2(\tau))}{h_1^2(\tau) h_2^2(\tau)} v_{2\eta\eta}(\eta,\tau) - \right. \right. \\ &\quad \left. - \frac{\eta h_2'(\tau)}{h_1(\tau) h_2(\tau)} v_{2\eta}(\eta,\tau) \right) h(\tau) + \frac{\eta}{h_1(\tau)} v_{2\eta}(\eta,\tau)\, p(\tau) + \\ &\quad \left. + f(\eta h_1(\tau), \tau) - f(\eta h_2(\tau), \tau) \right) d\tau, \qquad (y,t) \in Q_T\,, \end{aligned} \tag{31}$$

де $G^*(y,t,\eta,\tau)$ – функція Ґріна першої крайової задачі для рівняння

$$v_t = \frac{t^2}{h_1^2(t)} v_{yy} + \frac{t h_1'(t) - h_1(t)}{t h_1(t)} y v_y\,.$$

З рівняння (20) знаходимо

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{\mu_2(t)} \left(\frac{t}{h_1(t)} (v_y(0,t) - v_y(t,t)) + \frac{t}{h_1(t)\, h_2(t)} (v_{2y}(t,t) - \right. \\ &\quad - v_{2y}(0,t))\, h(t) - \frac{h_1(t)}{t} \int_0^t (f(y h_1(t), t) - f(y h_2(t), t))\, dy - \\ &\quad \left. - \frac{h(t)}{t} \int_0^t f(y h_2(t), t)\, dy \right), \qquad t \in [0,T]\,. \end{aligned} \tag{32}$$

Підставляючи v та v_y, знайдені з (31), в (30) і (32), отримуємо систему однорідних інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, ядра яких мають слабкі особливості. За властивостями систем інтегральних рівнянь Вольтерра $h(t) \equiv 0$, $p(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$. Враховуючи це в задачі (28), (29), маємо $v(y,t) \equiv 0$, $(y,t) \in Q_T$, що завершує доведення теореми єдиності. ◊

1. *Іванчов М. І.* Обернена задача з вільною межею для рівняння теплопровідності // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – С. 901–910.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
3. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
4. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type / Math. Studies: Monograph Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – Vol. 10. – 238 p.

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ, ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ В НАЧАЛЬНЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

Для одномерного уравнения теплопроводности рассмотрена задача со свободной границей, которая вырождается в начальный момент времени. Установлены условия существования и единственности классического решения указанной задачи.

HEAT CONDUCTION PROBLEM WITH FREE BOUNDARY WHICH DEGENERATES AT THE INITIAL MOMENT

A free boundary problem for one-dimensional heat equation is considered under assumption that the free boundary degenerates at the initial moment. The existence and uniqueness conditions for classical solution of the problem are established.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
15.05.07