УДК 517.524

Т. М. Антонова[1], О. М. Сусь[2]

ПРО ПАРНІ МНОЖИНИ ЗБІЖНОСТІ ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ ІЗ КОМПЛЕКСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Доведено аналог теореми Лейтона – Уолла про парні множини збіжності для двовимірних неперервних дробів із комплексними елементами.

В аналітичній теорії неперервних дробів поряд з такими важливими класичними теоремами збіжності, як ознаки Ворпіцького, Слешинського – Прінгсгейма, параболічні теореми, теореми про парні області збіжності посідають вагоме місце. Детальний огляд робіт, що стосуються цієї теми, зроблено в [5]. Питання про парні області збіжності для гіллястих ланцюгових дробів загального вигляду розглянуто у роботах [1, 4, 7], для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними – вивчається О. Є. Баран [2]. Виявилось, що у природному формулюванні відомі теореми про парні області збіжності неперервних дробів не переносяться на гіллясті ланцюгові дроби загального вигляду [3, 4, 7]. Для двовимірних неперервних дробів (ДНД) з комплексними елементами це питання до цього часу не вивчалось.

Розглянемо нескінченний двовимірний неперервний дріб (ДНД) вигляду [3]

$$\Phi_0 + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k,k}}{1+\Phi_k}, \qquad \Phi_k = \mathop{D}_{j=1}^{\infty} \frac{a_{k+j,k}}{1} + \mathop{D}_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k,k+j}}{1}, \qquad k = 0,1,\ldots. \tag{1}$$

Означення 1 [**6**]. Назвемо n-ми *фігурними наближеннями* або n-ми *фігурними підхідними дробами* ДНД (1) скінченні ДНД вигляду

$$f_n = \Phi_0^{(n)} + \mathop{D}_{k=1}^{[n/2]} \frac{a_{k,k}}{1+\Phi_k^{(n-2k)}}, \qquad n = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

де

$$\Phi_k^{(0)} = 0, \qquad \Phi_k^{(p)} = \mathop{D}_{j=1}^{p} \frac{a_{k+j,k}}{1} + \mathop{D}_{j=1}^{p} \frac{a_{k,k+j}}{1}, \qquad k = 0,1,\ldots, \qquad p = 1,2,\ldots. \tag{3}$$

Означення 2 [**7**]. ДНД (1) називають *фігурно збіжним*, якщо існує скінченна границя послідовності його наближень $\{f_n\}$. Величину цієї границі називають значенням нескінченного ДНД (1).

Означення 3. *Парною множиною збіжності* ДНД (1) назвемо пару підмножин $\langle E_1, E_2\rangle$ комплексної площини таких, що виконання умов

$$a_{2k-1,2k-1} \in E_1, \qquad a_{2k,2k} \in E_2, \qquad k = 1,2\ldots,$$
$$a_{k+2j-1,k} \in E_1, \qquad a_{k,k+2j-1} \in E_1, \qquad k = 0,1,\ldots, \qquad j = 1,2,\ldots,$$
$$a_{k+2j,k} \in E_2, \qquad a_{k,k+2j} \in E_2, \qquad k = 0,1,\ldots, \qquad j = 1,2,\ldots$$

забезпечує збіжність ДНД (1).

Залишками ДНД (1) називаються вирази вигляду

$$Q_j^{(0)} = 1, \qquad Q_j^{(1)} = 1 + \Phi_j^{(1)}, \qquad j = 1,2,\ldots,$$

$$Q_k^{(p+2)} = 1 + \Phi_k^{(p+2)} + \frac{a_{k+1,k+1}}{Q_{k+1}^{(p)}}, \qquad k = 1,2,\ldots, \qquad p = 0,1,\ldots, \tag{4}$$

$$Q_{k+j,k}^{(p+1)} = 1 + \frac{a_{k+j+1,k}}{Q_{k+j+1,k}^{(p)}}, \qquad Q_{k,k+j}^{(p+1)} = 1 + \frac{a_{k,k+j+1}}{Q_{k,k+j+1}^{(p)}},$$

$$Q_{k+j,k}^{(0)} = 1, \qquad Q_{k,k+j}^{(0)} = 1, \qquad k = 0,1,\ldots, \quad p = 0,1,\ldots, \quad j = 1,2,\ldots. \tag{5}$$

Враховуючи формули (2), (3) та позначення (4), (5), маємо

$$\Phi_k^{(p)} = \frac{a_{k+1,k}}{Q_{k+1,k}^{(p-1)}} + \frac{a_{k,k+1}}{Q_{k,k+1}^{(p-1)}}, \qquad k = 0,1,\dots, \qquad p = 1,2,\dots, \tag{6}$$

$$f_1 = \Phi_0^{(1)}, \qquad f_n = \Phi_0^{(n)} + \frac{a_{1,1}}{Q_1^{(n-2)}}, \qquad n = 2,3,\dots. \tag{7}$$

Для дослідження властивостей послідовностей фігурних підхідних дробів ДНД (1) використовують формулу різниці $n > 2p+1$ [3]

$$f_n - f_{2p} =$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k \left(\Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(2p-2k)}\right) \prod\limits_{j=1}^{k} a_{j,j}}{\prod\limits_{j=1}^{k} Q_j^{(2p-2j)} Q_j^{(n-2j)}} + \frac{(-1)^p \prod\limits_{j=1}^{p+1} a_{j,j}}{\prod\limits_{j=1}^{2p} Q_j^{(2p-2j)} \prod\limits_{j=1}^{2p+1} Q_j^{(n-2j)}}. \tag{8}$$

Лема. *Нехай елементи ДНД* (1) *задовольняють такі умови*:

$$\left|a_{2k-1,2k-1}\right| \le r, \qquad \left|a_{2k,2k}\right| \ge 2\left(1 + 2r + \frac{r}{1-2r}\right), \qquad k = 1,2,\dots, \tag{10}$$

$$\left|a_{k,k+2j-1}\right| \le r, \qquad \left|a_{k+2j-1,k}\right| \le r,$$

$$\left|a_{k,k+2j}\right| \ge 2(1+r), \qquad \left|a_{k+2j,k}\right| \ge 2(1+r), \quad k = 0,1,\dots, \quad j = 1,2,\dots, \tag{11}$$

де r *– додатна стала,* $r < 1/4$. *Тоді для залишків ДНД* (1) *справджуються такі оцінки*:

$$1 - r \le \left|Q_{k,k+2j}^{(p)}\right| \le 1 + r, \quad 1 - r \le \left|Q_{k+2j,r}^{(p)}\right| \le 1 + r, \quad \left|Q_{k,k+2j-1}^{(p)}\right| \ge 1,$$

$$\left|Q_{k+2j-1,k}^{(p)}\right| \ge 1, \qquad k = 0,1,\dots, \quad j = 1,2,\dots, \quad p = 0,1,\dots, \tag{12}$$

$$\left|Q_{2k-1}^{(p)}\right| \ge 1 - 2r, \qquad 1 - 2r - \frac{r}{1-2r} \le \left|Q_{2k}^{(p)}\right| \le 1 + 2r + \frac{r}{1-2r},$$

$$k = 1,2,\dots, \quad p = 0,1,\dots. \tag{13}$$

Д о в е д е н н я. Правильність оцінок (12) для $p = 0$ випливає з формул (5). Якщо оцінки (12) правильні для деякого значення p та $k = 0,1,\dots,$ $j = 1,2,\dots$, то, враховуючи умови (10), одержимо

$$\left|Q_{k,k+2j-1}^{(p+1)}\right| = \left|1 + \frac{a_{k,k+2j}}{Q_{k,k+2j}^{(p)}}\right| \ge \left|\frac{a_{k,k+2j}}{Q_{k,k+2j}^{(p)}}\right| - 1 \ge \frac{2(1+r)}{1+r} - 1 = 1,$$

$$1 - r \le 1 - \left|\frac{a_{k,k+2j}}{Q_{k,k+2j}^{(p)}}\right| \le \left|Q_{k,k+2j}^{(p+1)}\right| = \left|1 + \frac{a_{k,k+2j+1}}{Q_{k,k+2j+1}^{(p)}}\right| \le 1 + \left|\frac{a_{k,k+2j}}{Q_{k,k+2j}^{(p)}}\right| \le 1 + r.$$

Аналогічно доходимо висновку про правильність оцінок (12) для залишків

$$Q_{k+j,k}^{(p+1)}, \qquad k = 0,1,\dots, \quad j = 1,2,\dots.$$

З формули (6) і оцінок (12) випливає, що

$$\left|\Phi_k^{(p)}\right| \le \left|\frac{a_{k+1,k}}{Q_{k+1,k}^{(p-1)}}\right| + \left|\frac{a_{k,k+1}}{Q_{k,k+1}^{(p-1)}}\right| \le 2r, \qquad k = 0,1,\dots, \quad p = 1,2,\dots. \tag{14}$$

Оцінимо тепер залишки $Q_k^{(p)}$, $k = 1, 2, \ldots$, $p = 0, 1, \ldots$. Зауважимо, що $1 - 2r - \dfrac{r}{1-2r} > 0$ при $0 < r < \dfrac{1}{4}$. Для $p = 0$ і $p = 1$ правильність оцінок (13) випливає з формул (4) і нерівності (14). Якщо оцінки (13) справджуються для деякого значення $p \ge 0$ та $k = 0, 1, \ldots$, то, враховуючи умови (11), отримаємо

$$\left|Q_{2k}^{(p+2)}\right| = \left|1 + \Phi_{2k}^{(p+2)} + \frac{a_{2k+1,2k+1}}{Q_{2k+1}^{(p)}}\right| \ge 1 - \left|\Phi_{2k}^{(p+2)}\right| - \left|\frac{a_{2k+1,2k+1}}{Q_{2k+1}^{(p)}}\right| \ge$$

$$\ge 1 - 2r - \frac{r}{1-2r},$$

$$\left|Q_{2k}^{(p+2)}\right| \le 1 + \left|\Phi_{2k}^{(p+2)}\right| + \left|\frac{a_{2k+1,2k+1}}{Q_{2k+1}^{(p)}}\right| \le 1 + 2r + \frac{r}{1-2r},$$

$$\left|Q_{2k-1}^{(p+2)}\right| = \left|1 + \Phi_{2k-1}^{(p+2)} + \frac{a_{2k,2k}}{Q_{2k}^{(p)}}\right| \ge \left|\frac{a_{2k,2k}}{Q_{2k}^{(p)}}\right| - 1 - \left|\Phi_{2k-1}^{(p+2)}\right| \ge 1 - 2r.$$

Отже, для всіх можливих значень p та $k = 0, 1, \ldots$ оцінки (13) правильні. ◊

Теорема. *Якщо для елементів ДНД* (1) *справджуються умови*

$$\left|a_{2k-1,2k-1}\right| \le r(1-\varepsilon), \qquad \left|a_{2k,2k}\right| \ge 2\left(1 + 2r + \frac{r}{1-2r}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

$$\left|a_{k,k+2j-1}\right| \le r(1-\varepsilon), \qquad \left|a_{k+2j-1,k}\right| \le r(1-\varepsilon),$$

$$\left|a_{k,k+2j}\right| \ge 2(1+r), \qquad \left|a_{k+2j,k}\right| \ge 2(1+r),$$

$$k = 0, 1, \ldots, \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

де r, ε *– додатні сталі,* $r < 1/4$, $\varepsilon < 1$, *то ДНД* (1) *збігається фігурно, і область значень ДНД належить кругу*

$$|z| < \frac{3-4r}{1-2r} r(1-\varepsilon).$$

Д о в е д е н н я. З формули (8) випливає, що при $n > 4p + 1$

$$\left|f_n - f_{4p}\right| \le \sum_{k=0}^{2p-1} \frac{\left|\Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(4p-2k)}\right| \prod\limits_{j=1}^{k} \left|a_{j,j}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{k} \left|Q_j^{(4p-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|} +$$

$$+ \left|\Phi_{2p}^{(n-2p)}\right| \prod_{j=1}^{2p} \frac{\left|a_{j,j}\right|}{\left|Q_j^{(4p-2j)} Q_j^{(n-2j)}\right|} + \frac{\prod\limits_{j=1}^{2p+1} \left|a_{j,j}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{2p} \left|Q_j^{(4p-2j)}\right| \prod\limits_{j=1}^{2p+1} \left|Q_j^{(n-2j)}\right|}. \tag{17}$$

Оцінимо спочатку $\left|\Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(4p-2k)}\right|$:

$$\left|\Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(4p-2k)}\right| \le$$

$$\le \left| \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k+j,k}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{4p-2k} \frac{a_{k+j,k}}{1} \right| + \left| \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{n-2k} \frac{a_{k,k+j}}{1} - \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{4p-2k} \frac{a_{k,k+j}}{1} \right|.$$

Використовуючи умови (16) теореми та оцінки (12), маємо

$$\left| \underset{j=1}{\overset{n-2k}{\mathrm{D}}} \frac{a_{k+j,k}}{1} - \underset{j=1}{\overset{4p-2k}{\mathrm{D}}} \frac{a_{k+j,k}}{1} \right| \le \frac{\prod\limits_{j=1}^{4p-2k+1} \left| a_{k+j,k} \right|}{\prod\limits_{j=1}^{4p-2k+1} \left| Q_{k+j,k}^{(n-2k-j)} \right| \prod\limits_{j=1}^{4p-2k} \left| Q_{k+j,k}^{(4p-2k-j)} \right|} =$$

$$= \frac{\left| a_{k+1,k} \right|}{\left| Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)} \right|} \cdot \prod_{j=1}^{4p-2k} \frac{\left| a_{k+j+1,k} \right|}{\left| Q_{k+j+1,k}^{(n-2k-j-1)} Q_{k+j,k}^{(4p-2k-j)} \right|} =$$

$$= \frac{\left| a_{k+1,k} \right|}{\left| Q_{k+1,k}^{(n-2k-1)} \right|} \cdot \prod_{j=1}^{2p-k} \frac{\left| a_{k+2j,k} \right|}{\left| Q_{k+2j-1,k}^{(4p-2k-2j+1)} Q_{k+2j,k}^{(4p-2k-2j)} \right|} \cdot \prod_{j=1}^{2p-k} \frac{\left| a_{k+2j+1,k} \right|}{\left| Q_{k+2j,k}^{(n-2k-2j)} Q_{k+2j+1,k}^{(n-2k-2j-1)} \right|} \le$$

$$\le \frac{r(1-\varepsilon)}{1} \left(\frac{r(1-\varepsilon)}{1-r} \right)^{2p-k} \cdot \prod_{j=1}^{2p-k} \frac{\left| a_{k+2j,k} \right|}{\left| Q_{k+2j-1,k}^{(4p-2k-2j+1)} Q_{k+2j,k}^{(4p-2k-2j)} \right|},$$

$$\frac{\left| a_{k+2j,k} \right|}{\left| Q_{k+2j-1,k}^{(4p-2k-2j+1)} Q_{k+2j,k}^{(4p-2k-2j)} \right|} = \frac{1}{\left| 1 + \dfrac{a_{k+2j,k}}{Q_{k+2j,k}^{(4p-2k-2j)}} \right|} \cdot \frac{\left| a_{k+2j,k} \right|}{\left| Q_{k+2j,k}^{(4p-2k-2j)} \right|} \le 2.$$

Отже,

$$\left| \underset{j=1}{\overset{n-2k}{\mathrm{D}}} \frac{a_{k+j,k}}{1} - \underset{j=1}{\overset{4p-2k}{\mathrm{D}}} \frac{a_{k+j,k}}{1} \right| \le r \left(\frac{2r}{1-r} \right)^{2p-k} (1-\varepsilon)^{2p-k+1}.$$

Аналогічно одержимо

$$\left| \underset{j=1}{\overset{n-2k}{\mathrm{D}}} \frac{a_{k,k+j}}{1} - \underset{j=1}{\overset{4p-2k}{\mathrm{D}}} \frac{a_{k,k+j}}{1} \right| \le r \left(\frac{2r}{1-r} \right)^{2p-k} (1-\varepsilon)^{2p-k+1}.$$

Тому

$$\left| \Phi_k^{(n-2k)} - \Phi_k^{(4p-2k)} \right| \le 2r \left(\frac{2r}{1-r} \right)^{2p-k} (1-\varepsilon)^{2p-k+1}. \tag{18}$$

Оцінимо тепер $\prod\limits_{j=1}^{k} \dfrac{\left| a_{j,j} \right|}{\left| Q_j^{(4p-2j)} Q_j^{(n-2j)} \right|}$.

1°. Нехай $k = 2\ell$. Тоді

$$\prod_{j=1}^{2\ell} \frac{\left| a_{j,j} \right|}{\left| Q_j^{(4p-2j)} Q_j^{(n-2j)} \right|} =$$

$$= \frac{\left| a_{1,1} \right|}{\left| Q_1^{(n-2)} Q_{2l}^{(n-4\ell)} \right|} \cdot \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\left| a_{2j,2j} \right|}{\left| Q_{2j}^{(4p-4j)} Q_{2j-1}^{(4p-4j+2)} \right|} \cdot \prod_{j=1}^{\ell-1} \frac{\left| a_{2j+1,2j+1} \right|}{\left| Q_{2j}^{(n-4j)} Q_{2j+1}^{(n-4j-2)} \right|} \le$$

$$\le \frac{(r(1-\varepsilon))}{(1-2r)\left(1 - 2r - \dfrac{r}{1-2r} \right)} \cdot \frac{(r(1-\varepsilon))^{\ell-1}}{(1-2r)^{\ell-1} \left(1 - 2r - \dfrac{r}{1-2r} \right)^{\ell-1}} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\left| a_{2j,2j} \right|}{\left| Q_{2j}^{(4p-4j)} Q_{2j-1}^{(4p-4j+2)} \right|} = \frac{(r(1-\varepsilon))^{\ell}}{(1-5r+4r^2)^{\ell}} \cdot \prod_{j=1}^{\ell} \frac{\left| a_{2j,2j} \right|}{\left| Q_{2j}^{(4p-4j)} Q_{2j-1}^{(4p-4j+2)} \right|}.$$

Зауважимо, що

$$\frac{\left|a_{2j,2j}\right|}{\left|Q_{2j}^{(4p-4j)}Q_{2j-1}^{(4p-4j+2)}\right|}=\frac{1}{\left|1+\Phi_{2j-1}^{(4p-4j+2)}+\dfrac{a_{2j,2j}}{Q_{2j}^{(4p-4j)}}\right|}\frac{\left|a_{2j,2j}\right|}{\left|Q_{2j}^{(4p-4j)}\right|}\le$$

$$\le 1+\frac{\left|1+\Phi_{2j-1}^{(4p-4j+2)}\right|}{\left|1+\Phi_{2j-1}^{(4p-4j+2)}+\dfrac{a_{2j,2j}}{Q_{2j}^{(4p-4j)}}\right|}\le 1+\frac{1+2r}{1-2r}=\frac{2}{1-2r},$$

$$j=1,\ldots,\ell,\qquad \ell=1,2,\ldots. \tag{19}$$

Тому

$$\prod_{j=1}^{2\ell}\frac{\left|a_{j,j}\right|}{\left|Q_j^{(4p-2j)}Q_j^{(n-2j)}\right|}\le\left(\frac{2r(1-\varepsilon)}{(1-2r)(1-5r+4r^2)}\right)^{\ell}. \tag{20}$$

2°. Нехай $k=2\ell-1$. Враховуючи нерівності (13) для залишків ДНД, умови теореми (15) та оцінку (19), одержимо

$$\prod_{j=1}^{2\ell-1}\frac{\left|a_{j,j}\right|}{\left|Q_j^{(4p-2j)}Q_j^{(n-2j)}\right|}=$$

$$=\frac{\left|a_{1,1}\right|}{\left|Q_1^{(n-2)}Q_{2l-1}^{(4p-4l+2)}\right|}\cdot\prod_{j=1}^{\ell-1}\frac{\left|a_{2j,2j}\right|}{\left|Q_{2j}^{(4p-4j)}Q_{2j-1}^{(4p-4j+2)}\right|}\cdot\prod_{j=1}^{\ell-1}\frac{\left|a_{2j+1,2j+1}\right|}{\left|Q_{2j}^{(n-4j)}Q_{2j+1}^{(n-4j-2)}\right|}\le$$

$$\le\frac{2^{\ell-1}r^{\ell}(1-\varepsilon)^{\ell}}{(1-2r)^{\ell+1}(1-5r+4r^2)^{\ell-1}}. \tag{21}$$

Крім того,

$$\frac{\prod\limits_{j=1}^{2p+1}\left|a_{j,j}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{2p}\left|Q_j^{(4p-2j)}\right|\cdot\prod\limits_{j=1}^{2p+1}\left|Q_j^{(n-2j)}\right|}=$$

$$=\frac{\left|a_{1,1}\right|}{\left|Q_1^{(n-2)}\right|}\cdot\prod_{j=1}^{p}\frac{\left|a_{2j,2j}\right|}{\left|Q_{2j}^{(4p-4j)}Q_{2j-1}^{(4p-4j+2)}\right|}\cdot\prod_{j=1}^{p}\frac{\left|a_{2j+1,2j+1}\right|}{\left|Q_{2j}^{(n-4j)}Q_{2j+1}^{(n-4j-2)}\right|}\le$$

$$\le\frac{r(1-\varepsilon)}{1-2r}\left(\frac{2r(1-\varepsilon)}{(1-5r+4r^2)(1-2r)}\right)^{p}. \tag{22}$$

Використовуючи формулу (17) та оцінки (18), (20), (21), (22), одержимо

$$\left|f_n-f_{4p}\right|\le\left|\Phi_0^{(n)}-\Phi_0^{(4p)}\right|+\sum_{k=1}^{p}\frac{\left|\Phi_{2k-1}^{(n-4k+2)}-\Phi_{2k-1}^{(4p-4k+2)}\right|\cdot\prod\limits_{j=1}^{2k-1}\left|a_{j,j}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{2k-1}\left|Q_j^{(4p-2j)}Q_j^{(n-2j)}\right|}+$$

$$+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{\left|\Phi_{2k}^{(n-4k)}-\Phi_{2k}^{(4p-4k)}\right|\cdot\prod\limits_{j=1}^{2k}\left|a_{j,j}\right|}{\prod\limits_{j=1}^{2k}\left|Q_j^{(4p-2j)}Q_j^{(n-2j)}\right|}+\left|\Phi_{2p}^{(n-2p)}\right|\cdot\prod_{j=1}^{2p}\frac{\left|a_{j,j}\right|}{\left|Q_j^{(4p-2j)}Q_j^{(n-2j)}\right|}+$$

$$+\frac{\prod_{j=1}^{2p+1}|a_{j,j}|}{\prod_{j=1}^{2p}\left|Q_j^{(4p-2j)}\right|\prod_{j=1}^{2p+1}\left|Q_j^{(n-2j)}\right|}\le 2r\left(\frac{2r}{1-r}\right)^{2p}(1-\varepsilon)^{2p+1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{p}2r\left(\frac{2r}{1-r}\right)^{2p-2k+1}\frac{r}{(1-2r)^2}\left(\frac{2r}{(1-2r)(1-5r+4r^2)}\right)^{k-1}(1-\varepsilon)^{2p-k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{p-1}2r\left(\frac{2r}{1-r}\right)^{2p-2k}\frac{r}{1-2r}\left(\frac{2r}{(1-2r)(1-5r+4r^2)}\right)^{k}(1-\varepsilon)^{2p-k}+$$

$$+2r\left(\frac{2r}{(1-2r)(1-5r+4r^2)}\right)^{p}(1-\varepsilon)^{p}+$$

$$+\frac{r}{1-2r}\left(\frac{2r}{(1-2r)(1-5r+4r^2)}\right)^{p}(1-\varepsilon)^{p}\le 2r\left(\frac{2r}{1-r}\right)^{2p}(1-\varepsilon)^{2p+1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\frac{r(1-r)}{(1-2r)^2}\left(\frac{2r}{1-r}\right)^{2p-2k+2}\left(\frac{2r}{(1-2r)(1-5r+4r^2)}\right)^{k-1}(1-\varepsilon)^{2p-k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{p-1}2r\frac{r}{1-2r}\left(\frac{2r}{1-r}\right)^{2p-2k}\left(\frac{2r}{(1-2r)(1-5r+4r^2)}\right)^{k}(1-\varepsilon)^{2p-k}+$$

$$+\left(2r+\frac{r}{1-2r}\right)\left(\frac{2r}{(1-2r)(1-5r+4r^2)}\right)^{p}(1-\varepsilon)^{p}. \qquad (23)$$

Припустимо, що α − дійсний корінь рівняння

$$F(\alpha)=8\alpha^3-14\alpha^2+9\alpha-1=0.$$

Розглянемо такі випадки:

(***a***) $r\le\alpha$.

Оскільки $F'(x)=24x^2-28x+9>0$ для всіх дійсних x, то $F(r)\le 0$ при $r\le\alpha$, тобто $8r^3-14r^2+9r-1\le 0$, отже,

$$2r\le 1-7r+14r^2-8r^3=1-2r-5r+10r^2+4r^2-8r^3=$$

$$=(1-2r)(1-5r+4r^2).$$

Таким чином,

$$\frac{2r}{(1-2r)(1-5r+4r^2)}\le 1.$$

Крім того, $\frac{2r}{1-r}<1$ для $r<\frac{1}{3}$. Оскільки $\alpha<\frac{1}{7}$, то $\frac{2r}{1-r}<1$ для $r\le\alpha$.

Позначимо

$$d=\max\left\{\sqrt{\frac{2r}{1-r}},\ \frac{2r}{(1-2r)(1-5r+4r^2)}\right\}\le 1.$$

Тоді

$$|f_n-f_{4p}|\le 2r\left(\frac{2r}{1-r}\right)^{2p}(1-\varepsilon)^{2p+1}+$$

$$+\sum_{k=1}^{p}\frac{r(1-r)}{(1-2r)^2}d^{p-k+1}d^{k-1}(1-\varepsilon)^{2p-k}+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{2r\cdot r}{1-2r}d^{p-k}d^{k}(1-\varepsilon)^{2p-k}+$$

$$+ 2rd^p(1-\varepsilon)^p + \frac{r}{1-2r} d^p(1-\varepsilon)^p \le 2r\left(\frac{2r}{1-r}\right)^{2p} (1-\varepsilon)^{2p+1} +$$

$$+ p\frac{r(1-r)}{(1-2r)^2} d^p(1-\varepsilon)^p + (p-1)\frac{2r\cdot r}{1-2r} d^p(1-\varepsilon)^{p+1} +$$

$$+ 2rd^p(1-\varepsilon)^p + \frac{r}{1-2r} d^p(1-\varepsilon)^p \le 2r\left(\frac{2r}{1-r}\right)^{2p} (1-\varepsilon)^{2p+1} +$$

$$+\left(p\frac{r(1-r)}{(1-2r)^2} + (p-1)\frac{2r\cdot r}{1-2r} + 2r + \frac{r}{1-2r}\right)(1-\varepsilon)^p .$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\left|f_n - f_{4p}\right| \le 2r\left(\frac{2r}{1-r}\right)^{2p}(1-\varepsilon)^{2p+1} + \left(p\frac{r(1+r)}{(1-2r)^2} + 3r\right)(1-\varepsilon)^p$$

і остаточно отримуємо, що

$$\lim_{n\to\infty}\left|f_n - f_{4p}\right| \to 0 \qquad \text{при} \qquad p\to\infty .$$

(**б**) $\alpha < r < 1/4$.

Розглянемо функціональний ДНД вигляду

$$\hat{\Phi}_0(z) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty}\frac{\hat{a}_{k,k}(z)}{1+\hat{\Phi}_k(z)}, \tag{24}$$

$$\hat{\Phi}_k(z) = \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{\hat{a}_{k+j,k}(z)}{1} + \mathop{\mathrm{D}}_{j=1}^{\infty}\frac{\hat{a}_{k,k+j}(z)}{1}, \qquad k=0,1,\ldots, \tag{25}$$

де

$$\hat{a}_{2k,2k}(z) = a_{2k,2k}, \qquad \hat{a}_{2k-1,2k-1}(z) = a_{2k-1,2k-1}z, \qquad k=1,2,\ldots,$$

$$\hat{a}_{k,k+2j-1}(z) = a_{k,k+2j-1}z, \qquad \hat{a}_{k+2j-1,k}(z) = a_{k+2j-1,k}z,$$

$$\hat{a}_{k,k+2j}(z) = a_{k,k+2j}, \qquad \hat{a}_{k+2j,k} = a_{k+2j,k}, \qquad k=0,1,\ldots, \qquad j=1,2,\ldots .$$

В області $\mathcal{D}_\varepsilon = \left\{ z : |z| < \dfrac{1}{1-\varepsilon}\right\}$ елементи функціонального ДНД (24), (25) задовольняють умови леми, тому для його фігурних наближень (7) справджується нерівність

$$\left|\hat{f}_n(z)\right| \le \left|\hat{\Phi}_0^{(n)}(z)\right| + \frac{\left|\hat{a}_{1,1}(z)\right|}{\left|\hat{Q}_1^{(n-2)}(z)\right|} \le 2r + \frac{r}{1-2r} .$$

Отже, всі фігурні підхідні дроби ДНД (24), (25) − це голоморфні функції, рівномірно обмежені в області $\mathcal{D}_\varepsilon$. Якщо $z \in \mathcal{D}_\alpha = \left\{ z : |z| < \dfrac{\alpha}{r}\right\}$, то, як було показано вище, ДНД (24), (25) збігається рівномірно. Очевидно, що $\mathcal{D}_\alpha \subset \mathcal{D}_\varepsilon$, тому за теоремою Монтеля − Віталі [3] цей дріб збігається рівномірно на компактах області $\mathcal{D}_\varepsilon$, зокрема, на множині $\{1\}$, а це означає, що ДНД (1) збігається фігурно. При цьому

$$\left|f_n\right| \le 2r(1-\varepsilon) + \frac{r(1-\varepsilon)}{1-2r} = \frac{3-4r}{1-2r}r(1-\varepsilon),$$

$$|f| = \lim_{n\to\infty}\left|f_n\right| \le \frac{3-4r}{1-2r}r(1-\varepsilon).$$

Теорему доведено. ◊

Наслідок. *Множини*

$$E_1 = \{z : |z| \le r(1-\varepsilon)\},$$

$$E_2 = \left\{ z : |z| \ge 2\left(1 + 2r + \frac{r}{1-2r}\right)\right\},$$

де r, ε *− додатні сталі,* $r < 1/4$, $\varepsilon < 1$, *утворюють парну множину збіжності ДНД* (1).

Наслідок можна вважати двовимірним аналогом відомої теореми Лейтона − Уолла [5].

1. *Антонова Т. М.* Збіжність гіллястих ланцюгових дробів з комплексними елементами та їх парних частин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 2003. − **46,** № 4. − С. 7−15.
2. *Баран О. Є.* Багатовимірне узагальнення теореми Лейтона − Уолла для гіллястих ланцюгових дробів з нерівнозначними змінними // Мат. аналіз і диференц. рівняння та їх застосування: Тези доп. Міжнар. наук. конф. (Ужгород, 18−23 вер., 2006). − С. 8.
3. *Боднар Д. И.* Ветвящиеся цепные дроби. − Киев: Наук. думка, 1986. − 176 с.
4. *Болтарович Е. А.* Аналог признака сходимости Лейтона − Уолла для ветвящихся цепных дробей // Методы исследования дифференц. и интегральных операторов. − Киев: Наук. думка, 1989. − С. 32−36.
5. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. − Москва: Мир, 1985. − 414 с.
6. *Кучмінська Х. Й., Сусь О. М., Возна С. М.* Апроксимативні властивості двовимірних неперервних дробів // Укр. мат. журн. − 2003. − **55**, № 1. − С. 30−44.
7. *Малачковський Г. Г.* Деякі спарені області збіжності для гіллястих ланцюгових дробів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 1996. − **39,** № 2. − С. 62−64.

О ПАРНЫХ МНОЖЕСТВАХ СХОДИМОСТИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Доказан аналог теоремы Лейтона − Уолла о парных множествах сходимости для двумерных цепных дробей с комплексными элементами.

ON THE TWIN CONVERGENCE REGIONS FOR TWO-DIMENSIONAL CONTINUED FRACTIONS WITH COMPLEX ELEMENTS

The analogue of the Leighton − Wall's theorem for two-dimensional continued fractions has been proved.

[1] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,

[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 25.05.07