УДК 539.3

Г. Т. Сулим, О. В. Галазюк

ПЛОСКЕ СТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ТІЛІ З ТЕПЛОНЕПРОНИКНИМ ЦИЛІНДРИЧНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА ІСНУВАННЯ ТЕПЛОВОГО ШАРУ НА МЕЖІ КОНТАКТУ

Внаслідок постулювання існування теплових шарів – поверхонь розриву першого порядку, побудовано нову математичну модель теплового поля в тілі з гладкими теплоізольованими неоднорідностями. У рамках запропонованої моделі виявлено неперервну залежність розв'язку крайової задачі математичної фізики від крайових умов.

У своєму математично-філософському трактаті [4] професор В. Я. Скоробагатько відзначає таку рису математики, як її універсальність. Зокрема, наприклад, рівняння Лапласа описує різні фізичні процеси: електростатику, магнетизм, теорію гравітації Ньютона, стаціонарні процеси дифузії, теплопровідності, течії ідеальної нестисливої рідини та інше. Тому постановка і розв'язування нових задач для рівняння Лапласа є актуальними для побудови уточнених математичних моделей фізичних процесів для виявлення і можливості урахування важливих для практичного застосування ефектів, зокрема у нанотехнологіях.

Зазначимо, що у задачі про обтікання циліндра потоком ідеальної нестисливої рідини [3] потенціал швидкостей визначається розв'язком крайової задачі Неймана для рівняння Лапласа і визначає фізично некоректну картину течії, яка обумовлює існування парадоксу Даламбера – Ейлера.

Плоске стаціонарне температурне поле в необмеженому тілі з теплонепроникним циліндричним включенням радіуса R також визначається розв'язком задачі Неймана для рівняння Лапласа у полярній системі координат $(R\alpha, \beta)$ $(1 \le \alpha < \infty,\ 0 \le |\beta| \le \pi)$. Якщо температурне поле $T(\alpha,\beta)$ в тілі виникає внаслідок задання на безмежності потоку тепла в напрямку AB діаметра циліндра (рис. 1), то існує повна математична аналогія із класичною задачею про обтікання циліндра потоком ідеальної нестисливої рідини. При цьому температурне поле $T(\alpha,\beta)$ є антисиметричним відносно лінії DE, а радіальна складова $\tilde{q}_\alpha(\alpha,\beta)$ безрозмірного вектора теплового потоку $\tilde{\mathbf{q}} = R(\lambda T_0)^{-1}\mathbf{q} = -\operatorname{grad} T/T_0$, означеного законом теплопровідності Фур'є, дорівнює нулеві на цій лінії. З погляду фізики явища такий ефект можна пояснити за певних теплофізичних властивостей лінії BC, які уможливлюють проникнення крізь неї тільки кутової складової $\tilde{q}_\beta(\alpha,\beta)$ і про які не йшлося у постановці задачі. Це призводить до того, що вектор теплового потоку $\mathbf{q}$ дорівнює нулеві у діаметрально протилежних точках A і B, що суперечить фізиці явища.

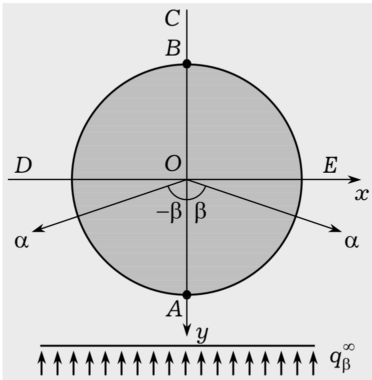

Рис. 1

Одним зі способів уникнення цієї фізичної некоректності, як виявилося, є застосування постулату про існування на поверхні $\alpha = 1$ контакту включення з тілом теплового шару нульової товщини з певною теплофізичною характеристикою $1/2 < q < 1$, який породжує стрибок кутової складової $\tilde{q}_\beta(1,\pm\pi)$ вектора $\mathbf{q}(1,\beta)$ у точці B. Цей стрибок відповідно до вимоги неперервної залежності розв'язку крайової задачі від крайових умов [5] мусить поширюватися і у тілі, обумовлюючи потребу запровадження матеріальної поверхні розриву [6] першого порядку − внутрішнього теплового шару.

З погляду фізики явища цей шар у розглядуваному випадку має властивості теплоактивної лінії і «створює» на собі стрибок кутової складової $\tilde{q}_\beta(\alpha, \pm\pi)$ вектора $\mathbf{q}$, а, отже, − теплові протипотоки.

Постановка і розв'язок некласичної задачі Неймана для рівняння Лапласа. Простір віднесемо до циліндричної системи координат $(R\alpha, \beta, R\gamma)$, де R − радіус циліндричного включення, і вважатимемо, що у ньому існує плоске стаціонарне температурне поле, яке не залежить від змінної γ. Тоді його закон розподілу − функцію $T(\alpha,\beta)$ − визначимо як розв'язок некласичної зовнішньої задачі математичної фізики для рівняння Лапласа у полярній системі координат (α, β):

$$\alpha\partial_\alpha(\alpha\partial_\alpha T) + \partial_\beta^2 T = 0, \qquad 1 \le \alpha \le \infty, \qquad 0 \le |\beta| < \pi, \tag{1}$$

за таких крайових умов на поверхні $\alpha = 1$ і на безмежності:

$$\tilde{q}_\alpha(1,\beta) = -\,\partial_\alpha T = 0, \quad 0 \le |\beta| < \pi,$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} T(\alpha,\beta) = T_0\alpha\cos\beta, \tag{2}$$

а також додаткової умови

$$\tilde{q}_\beta(\alpha,-\pi) + \tilde{q}_\beta(\alpha,+\pi) = 0, \qquad 1 \le \alpha < \infty, \tag{3}$$

яка визначає стрибок кутової складової вектора теплового потоку у поверхневому тепловому шарі в точці B.

Розв'язок рівняння (1), який задовольняє другу з умов (2), подамо у вигляді інтеграла Фур'є

$$T(\alpha,\beta) = T_0\alpha\cos\beta + \int_0^\infty V(\xi)\alpha^{-\xi}\cos\xi\, d\xi, \qquad 1 \le \alpha \le \infty, \qquad 0 \le |\beta| < \pi, \tag{4}$$

де $V(\xi)$ − довільна функція, яка забезпечує існування відповідного невластивого інтеграла і його заникання на безмежності. Якщо розв'язок (4) підставити у першу крайову умову (2), то для визначення функції $V(\xi)$ отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду:

$$\int_0^\infty \xi V(\xi)\cos\xi\beta\, d\xi = T_0\cos\beta, \qquad 0 \le |\beta| \le \pi. \tag{5}$$

Його розв'язок відповідно до методу розривних інтегралів Фур'є [1] подамо узагальненим рядом Неймана:

$$\xi V(\xi) = T_0\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{J_{2n-q+1}(\xi\pi)}{\xi^q}, \qquad q > 1/2, \tag{6}$$

з невизначеними наперед коефіцієнтами a_n, де $J_\gamma(\xi)$ − функції Бесселя першого роду порядку ν. Подальші дослідження базуватимуться на властивостях розривних інтегралів Фур'є [2]:

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(\beta_0\xi)\sin\xi\beta}{\xi^\lambda}\, d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\dfrac{2-\lambda+\nu}{2}\right)\beta F\left(\dfrac{2-\lambda+\nu}{2}; \dfrac{2-\lambda-\nu}{2}; \dfrac{3}{2}; \dfrac{\beta^2}{\beta_0^2}\right)}{2^{\lambda-1}\Gamma\left(\dfrac{\nu+\lambda}{2}\right)}, \qquad 0 \le |\beta| \le \beta_0,$$

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(\beta_0\xi)\sin\xi\beta}{\xi^\lambda}\, d\xi =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{2-\lambda+\nu}{2}\right)\beta_0^{\nu}F\left(\frac{2-\lambda+\nu}{2};\frac{1-\lambda+\nu}{2};\nu+1;\frac{{\beta_0}^2}{\beta^2}\right)}{2^{\lambda}\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{1+\lambda-\nu}{2}\right)|\beta|^{\nu-\lambda+1}},$$

$$|\beta| \ge \beta_0\,, \qquad (7)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{J_{\nu}(\beta_0\xi)\cos\xi\beta}{\xi^{\lambda}}d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\nu}{2}\right)\beta_0^{\lambda-1}F\left(\frac{1-\lambda+\nu}{2};\frac{1-\lambda-\nu}{2};\frac{1}{2};\frac{\beta^2}{\beta_0^2}\right)}{2^{\lambda}\Gamma\left(\frac{\nu+\lambda+1}{2}\right)}, \quad 0 \le |\beta| \le \beta_0\,,$$

$$\int_0^{\infty}\frac{J_{\nu}(\beta_0\xi)\cos\xi\beta}{\xi^{\lambda}}d\xi =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1-\lambda+\nu}{2}\right)\beta_0^{\nu}F\left(\frac{1-\lambda+\nu}{2};\frac{2-\lambda+\nu}{2};\nu+1;\frac{{\beta_0}^2}{\beta^2}\right)}{2^{\lambda}\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{\lambda-\nu}{2}\right)|\beta|^{\nu-\lambda+1}},$$

$$|\beta| \ge \beta_0\,, \qquad (8)$$

де $1/2 < \lambda < \nu + 1$,

$$F(a;b;c;x^2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)}\frac{x^{2k}}{k!}\,;$$

$\Gamma(x)$ − ґамма-функція; $F(a;b;c;x^2)$ − гіпергеометрична функція Ґаусса, задана гіпергеометричним рядом $F(a;b;c;x^2) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+k)\Gamma(b+k)}{\Gamma(c+k)}\frac{x^{2k}}{k!}$ з одиничним радіусом збіжності за умови $c-a-b>0$. Зазначимо, що гіпергеометричний ряд при $a=-n$ або $b=-n$ $(n \in N_0)$ вироджується у поліном відповідного степеня і його можна подати через поліноми Якобі.

Якщо ряд (6) підставити в інтегральне рівняння (5) і змінити порядок підсумовування та інтегрування, то після обчислення інтеграла за формулою (8) одержимо алгебричне рівняння

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-q+1)F\left(n-q+1;-n;\frac{1}{2};\frac{\beta^2}{\pi^2}\right)}{2^q\Gamma(n+1)\pi^{1-q}} = \cos\beta, \qquad 0 \le |\beta| \le \pi\,, \qquad (9)$$

відносно невизначених коефіцієнтів a_n. Оскільки гіпергеометрична функція $F\left(n-q+1;-n;\frac{1}{2};\frac{\beta^2}{\pi^2}\right)$ є поліномом степеня $2n$, то алгебричне рівняння (9) є рядом за повною системою функцій. Тому згідно з апроксимаційною теоремою Вейєрштрасса про наближення неперервної функції поліномом рівняння (9) має єдиний розв'язок − набір коефіцієнтів a_n за довільної неперервної на проміжку $0 \le |\beta| \le \pi$ функції. Оскільки функція $\cos\beta$ на проміжку $0 \le |\beta| \le \pi$ апроксимується з наперед заданою точністю поліномом відповідного степеня, то у розглядуваному випадку кількість коефіцієнтів a_n є обмежена.

Отже, якщо коефіцієнти a_n у розвиненні (6) відомі, то згідно з поданням (4) температурне поле в просторі матиме такий закон розподілу:

$$T(\alpha,\beta) = T_0\left(\alpha\cos\beta + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+1}(\xi\pi)}{\xi^{q+1}} e^{-\xi u}\cos\xi\beta\, d\xi\right),$$

$$\alpha = \exp u. \qquad (10)$$

Відповідно до закону теплопровідності Фур'є за відомим температурним полем (10) обчислимо безрозмірні теплові потоки у тілі $1 \le \alpha \le \infty$, $0 \le |\beta| < \pi$ і запишемо їх так:

$$\tilde{q}_\alpha(\alpha,\beta) = -\cos\beta + \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-u} \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+1}(\xi\pi)}{\xi^{q}} e^{-\xi u}\cos\xi\beta\, d\xi,$$

$$\tilde{q}_\beta(\alpha,\beta) = \sin\beta + \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-u} \int_0^{\infty} \frac{J_{2n-q+1}(\xi\pi)}{\xi^{q}} e^{-\xi u}\sin\xi\beta\, d\xi. \qquad (11)$$

Інтеграли у виразах (11) можна обчислити числовими методами, проте на поверхні циліндра $\alpha = 1$ $(u = 0)$ вони вироджуються у розривні інтеграли Фур'є і за формулами (7) і (8) одержимо, що

$$\tilde{q}_\alpha(1,\beta) = -\cos\beta + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n-q+1)\pi^q F\left(n-q+1; -n; \frac{1}{2}; \frac{\beta^2}{\pi^2}\right)}{2^q\Gamma(n+1)},$$

$$\tilde{q}_\beta(1,\beta) = \operatorname{sgn}\beta\left\{\sin|\beta| + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma\left(n-q+\frac{3}{2}\right)|\beta| F\left(n-q+\frac{3}{2}; -n+\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{\beta^2}{\pi^2}\right)}{2^{q-1}\pi^{2-q}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right\}. \qquad (12)$$

Аналіз виразу кутової складової $\tilde{q}_\beta(1,\beta)$ теплового потоку на поверхні контакту $\alpha = 1$ циліндричного включення з тілом вказує на те, що його величина залежить від параметра q. Тому за виконання додаткової вимоги (3) відповідно до умови збіжності гіпергеометричного ряду в точці $x = 1$ та існування інтегралів (11) параметр q може змінюватися тільки у таких межах:

$$1/2 < q < 1, \qquad (13)$$

і може слугувати певною теплофізичною характеристикою теплового шару на поверхні контакту $\alpha = 1$. Зокрема, за формулою підсумовування гіпергеометричного ряду, яка справджується у межах нерівності (13), одержимо величину стрибка кутової складової вектора теплового потоку $\mathbf{q}$ у точці $\beta = \pm\pi$:

$$\tilde{q}_\beta(1,\pm\pi) = \pm\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma\left(n-q+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(q-\frac{1}{2}\right)\pi^{q-1/2}}{2^q\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}. \qquad (14)$$

Для забезпечення неперервної залежності теплового потоку розв'язку крайової задачі математичної фізики від крайових умов [5] і геометричної симетрії задачі цей стрибок за допомогою запровадженої поверхні розриву першого порядку [6] поширимо у тілі від точки B уздовж лінії BC за заникаючим законом так:

$$\tilde{q}_\beta(\alpha,\pm\pi) = \pm\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-u}\int_0^\infty \frac{J_{2n-q+1}(\xi\pi)}{\xi^q} e^{-\xi u}\sin\xi\pi\, d\xi\,, \tag{15}$$

згідно з яким

$$\lim_{\alpha\to\infty}\tilde{q}_\beta(\alpha,\pm\pi) = 0\,.$$

У ньому кутова складова $\tilde{q}_\beta(\alpha,\pm\pi)$ вектора $\mathbf{q}$ теплового потоку під час переходу через лінію BC змінюється стрибком відповідно до подання (13).

За означеними рівнянням (9) коефіцієнтами a_n при $q = 0.75$ проведеним за формулою (15) числовим аналізом кутової складової $\tilde{q}_\beta(\alpha,\pm\pi)$ виявлено, що тепловий шар на лінії BC має властивості теплоактивної лінії. Це твердження ґрунтується на тому, що відповідно до виразу (15) на лінії BC існує стрибок $\tilde{q}_\beta(\alpha,\pm\pi)$ з максимальним значенням у точці B, причому $|\tilde{q}_\beta(\alpha,\pm\pi)| = 1$. Цей стрибок монотонно зменшується в області $1 \le \alpha \le \alpha_0$ і в точці $\alpha = \alpha_0 \approx 1.5$ змінює знак на протилежний, досягає максимуму в точці $\alpha = \alpha_1 \approx 2.6$ і заникає на безмежності (рис. 2). Зазначимо, що згідно з виразом (12) у поверхневому межовому шарі $\alpha = 1$ існує область $0 \le |\beta| \le \pi - \varepsilon = \delta \approx 0.95\pi$ (рис. 3), у якій $\tilde{q}_\beta(1,\beta)$ спочатку монотонно зростає, а потім спадає до нуля, щоб поза нею досягнути максимального від'ємного значення $\tilde{q}_\beta(\alpha,\pi) = -1$ при $\beta = \pi$ і забезпечити неперервну залежність розв'язку задачі від крайових умов.

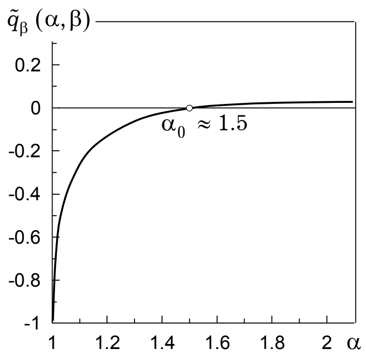

Рис. 2

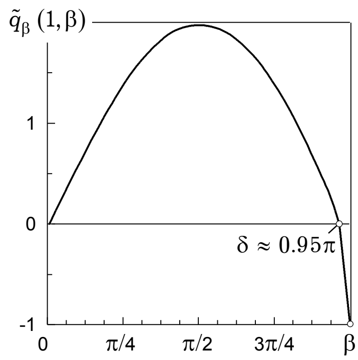

Рис. 3

Таким чином, розміщений на лінії BC внутрішній тепловий шар, температура якого відповідно до подання (10) визначається законом

$$T(\alpha,\pm\pi) = -T_0\left(\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_0^\infty \frac{J_{2n-q+1}(\xi\pi)}{\xi^{q+1}} e^{-\xi u}\cos\xi\pi\, d\xi\right),$$

можна трактувати з погляду фізики явища як теплоактивну лінію з певною тепловою характеристикою $1/2 < q < 1$, причому його температура в області $1 \le \alpha \le \alpha_0$ є вищою, ніж в оточуючому середовищі, а поза цією областю – нижчою. Отже, в області $1 \le \alpha \le \alpha_0$ тепловий шар створює кутову складову $\tilde{q}_\beta(\alpha,\pm\pi)$ вектора теплового потоку, а в області $\alpha_0 \le \alpha < \infty$ – її поглинає.

За гідродинамічною аналогією [3] можна побудувати інший розв'язок задачі (1), (2) через тригонометричні функції і отримати такі параметри теплового поля, за яких вимога (3) виконується за умови, що $\tilde{q}_\beta(1,\pm\pi) = 0$:

$$T(\alpha,\beta) = T_0(\alpha^{-1} + \alpha)\cos\beta = 2T_0 \operatorname{ch} u \cos\beta\,,$$

$$\tilde{q}_\alpha(\alpha,\beta) = -(1-\alpha^{-2})\cos\beta = -(1-e^{-2u})\cos\beta\,,$$

$$\tilde{q}_\beta(\alpha,\beta) = (1+\alpha^{-2})\sin\beta = (1+e^{-2u})\sin\beta\,. \qquad (16)$$

Отже, розв'язок (16) крайової задачі (1), (2) є частковим випадком некласичної крайової задачі математичної фізики і при цьому $\tilde{q}_\alpha(\alpha,\pi/2) = 0$. У виразах (16) $u = \ln\alpha$ і цей розв'язок збігається з параметрами температурного поля у півплощині $0 \le u < \infty$, $0 \le \beta < \infty$ за періодичної крайової умови $T(0,\beta) = 2T_0\cos\beta$ на її межі $u = 0$ і не відповідає фізичній постановці задачі про обтікання потоком тепла циліндричного включення.

Зазначимо, що величина обчисленого за формулою (12) при $q = 0.75$ теплового потоку $\tilde{q}_\beta$ у точці $(1,\pi/2)$ дорівнює 1.9945, а за формулою (16) – $\tilde{q}_\beta(1,\pi/2) = 2$, тобто їх значення практично збігаються, проте істотна відмінність проявляється у точці B (див. рис. 1 і рис. 3).

Отже, постулювання існування поверхневого теплового шару нульової товщини на межі $\alpha = 1$ контакту циліндричного включення з тілом зумовлює необхідність введення в розгляд внутрішнього теплового шару – поверхні розриву першого порядку для забезпечення виконання вимоги неперервної залежності розв'язку крайової задачі математичної фізики від крайових умов. Оскільки у запропонованій моделі вектори теплового потоку у точках A і B є різними, то такий характер розподілу параметрів теплового поля краще відповідає фізиці явища.

Повертаючись до гідродинамічної аналогії, можна стверджувати, що у такій постановці задачі парадокс Даламбера – Ейлера усувається.

1. *Галазюк В. А., Сулим Г. Т.* Рівновага дискової щілини з поверхневим шаром з реологічними властивостями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – **40**, № 4. – С. 17–33.
2. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 1100 с.
3. *Лойцянський Л. Г.* Механика жидкости и газа. – Москва: Наука, 1970. – 904 с.
4. *Новіков Л. О., Скоробогатько В. Я.* Методи математики: розвиток, застосування, суспільне відлуння. – Львів: Слово і Комерція, 1995. – 224 с.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1977. – 735 с.
6. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – Москва: Мир, 1975. – 592 с.

ПЛОСКОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ТЕЛЕ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННЫМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ С УЧЕТОМ СУЩЕСТВОВАНИЯ ТЕПЛОВОГО СЛОЯ НА ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА

В результате постулирования существования тепловых слоев – поверхностей разрыва первого порядка, предложена новая математическая модель теплового поля в теле с гладкими теплоизолированными неоднородностями. В рамках предложенной модели выявлена непрерывная зависимость решения краевой задачи математической физики от краевых условий.

PLANE STATIONARY TEMPERATURE FIELD IN A BODY WITH HEAT INSULATED CYLINDRICAL INCLUSION UNDER EXISTENCE OF HEAT LAYER ON THE CONTACT BOUNDARY

Due to postulating of existence of heat layers – the abruption surfaces of first range, a new mathematical model of heat field in a body with heat insulated smooth non-homogeneities is proposed. Within the presented model the continuous dependence of solution of the mathematical physics boundary-value problem on boundary conditions exists.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
04.05.07