

ОСОБЛИВОСТІ ЧИСЛОВОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ, ТЕПЛОВИХ І МЕХАНІЧНИХ ПОЛІВ У ДЕФОРМІВНИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛАХ ЗА КВАЗІУСТАЛЕНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Розглянуто підходи до числового моделювання зв'язаних електромагнітних, теплових й механічних полів в електропровідних тілах за дії зовнішнього квазіусталеного електромагнітного навантаження з урахуванням термо-чутливості матеріалу, нелінійної залежності індукцій від напруженостей електричного і магнітного полів та пружнопластичного характеру деформування. Ці підходи, які базуються на методи скінченних елементів і сім'ї різнищевих алгоритмів, становлять теоретичну основу для комп'ютерного моделювання процесів високотемпературної індукційної обробки виробів із феромагнітних (як магнітном'яких, так і магнітножорстких) матеріалів.

Для підвищення параметрів міцності та надійності виробів з електропровідних матеріалів у сучасних технологіях обробки широко використовують електромагнітні поля (ЕМП). Оскільки така обробка є, як правило, високотемпературною, при математичному моделюванні та теоретичному описі наявних фізико-механічних процесів виникає необхідність урахування залежності властивостей матеріалів від температури, пружнопластичного характеру деформування і нелінійних залежностей між індукціями та напруженостями електричного та магнітного полів. Це приводить до складності відповідних математичних моделей, які включають системи зв'язаних рівнянь різних типів і початкових та крайових умов. Дослідження різних фундаментальних математичних аспектів неklasичних задач, що виникають у прикладних застосуваннях, розглянуто в низці робіт математиків відомих українських шкіл, зокрема школи, створеної В. Я. Скоробагатьком [12, 14–16]. При цьому тут вирішено ряд питань, які стосуються й обчислювальних проблем при розв'язуванні таких задач.

Використання сучасних числових методів до згаданих задач електромагнітотермомеханіки за відсутності потужних обчислювальних систем часто виглядає достатньо проблематичним з точки зору реальних обсягів і часу обчислень [3, 18, 21, 22].

Питанням побудови методик числового визначення електромагнітних, теплових і механічних полів у твердих тілах з різними електропровідністю та здатністю до намагнічування й поляризації за електромагнітних навантажень з урахуванням залежності електро-, теплофізичних і механічних властивостей матеріалів від температури та пружнопластичного характеру деформування присвячені роботи [1, 3, 5, 9, 18].

У цій роботі розглянуто підходи, які дозволяють адекватно враховувати складну поведінку електропровідних тіл за дії ЕМП у широкому температурному діапазоні і в той же час суттєво скоротити обсяги обчислень, що дає можливість отримувати розв'язки складних зв'язаних задач математичної фізики практично без втрати точності.

Постановка задачі. Розглянемо здатне до намагнічування та поляризації ізотропне електропровідне тіло, яке займає область V з неперервною за Ліпшицем поверхнею Γ . Тіло, в області якого відсутні сторонні електричні заряди та струми, перебуває під впливом ЕМП, яке викликає розподілена у скінченній підобласті оточуючого середовища система струмів із густиною $\mathbf{j}^{(0)}$, амплітуда яких відносно мало змінюється у часі за період коливання електромагнітної хвилі. Ставиться задача про визначення зумовлених цим впливом напружено-деформованого стану тіла. За припущення, що частота зовнішнього ЕМП перебуває поза околom резонансної [20], процес деформу-

вання розглядаємо у квазістатичному наближенні. Електромеханічні, термоелектричні, магнітострикційні ефекти та вплив рухомості середовища на ЕМП вважаємо несуттєвими, а вектори індукції та напруженості відповідно електричного та магнітного полів – паралельними.

Відповідно до запропонованої у [1, 5, 9] математичної моделі зв'язані електромагнітне й температурне поля за рівнянь стану

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(1)} &= \mathbf{B}_*(\mathbf{H}^{(1)}, T), & \mathbf{D}^{(1)} &= \mathbf{D}_*(\mathbf{E}^{(1)}, T), & \mathbf{j}^{(1)} &= \gamma \mathbf{E}^{(1)}, \\ \mathbf{B}^{(0)} &= \mu_0 \mathbf{H}^{(1)}, & \mathbf{D}^{(0)} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}^{(0)} \end{aligned} \quad (1)$$

описує така система рівнянь електродинаміки та теплопровідності:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + Q, \quad \mathbf{r} \in V, \quad t \in [0, \tau_*], \quad (2)$$

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}^{(1)} \right) + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \mathbf{E}^{(1)} + \gamma \frac{\partial \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{B}^{(m)} = - \int_0^t \nabla \times \mathbf{E}^{(m)} dt', \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}^{(m)} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}^{(0)}) + \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(0)}}{\partial t^2} = - \frac{\partial \mathbf{j}^{(0)}}{\partial t}, \quad \mathbf{r} \in E^3 \setminus V, \quad (6)$$

за початкових умов

$$T(\mathbf{r}, 0) = T_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}^{(m)} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{E}^{(m)}}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

умов на межі Γ поділу тіла й середовища

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(0)}) &= 0, \\ \mathbf{n} \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}^{(1)} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}^{(0)} \right) &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$-\lambda \nabla T \mathbf{n} = \beta(T - T_S) + \lambda' \sigma_0 (T^4 - T_S^4) \quad (9)$$

та умов на нескінченності

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} |\mathbf{r}| |\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}, t)| &= \text{const}, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} |\mathbf{r}| \left(\frac{\partial \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}, t)}{\partial r} + \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \frac{\partial \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут \mathbf{E} , \mathbf{H} – вектори напруженості електричного та магнітного полів; \mathbf{D} , \mathbf{B} – електрична та магнітна індукції (величини з індексом $m = 0$ відносяться до зовнішнього середовища $E^3 \setminus V$, яке за електромагнітними властивостями розглядаємо в наближенні вакууму, а з індексом $m = 1$ – тіла); \mathbf{B}_* , \mathbf{D}_* – функції, які задають зв'язок між векторами індукції і напруженості відповідно магнітного та електричного полів у тілі; ε_0 , μ_0 – діелектрична й магнітна проникності вакууму; ∇ – оператор Гамільтона; \mathbf{r} – радіус-вектор точки; $\varepsilon = \varepsilon(|\mathbf{D}|, T)$, $\mu = \mu(|\mathbf{H}|, T)$ [18] – диференціальні діелектрична та магнітна проникності тіла; \mathbf{j} – вектор густини струму; $\gamma = \gamma(T)$ – коефіцієнт електропровідності; $c = c(T)$ – об'ємна теплоємність; $\lambda = \lambda(T)$ – коефіцієнт теплопровідності; Q – тепловиділення, пов'язані з протіканням у тілі

індукційних струмів, а також зумовлені намагнічуванням й поляризацією [20]; \mathbf{n} – вектор нормалі до поверхні Γ тіла; $\beta = \beta(T)$ – коефіцієнт тепловіддачі; T_S – температура зовнішнього середовища; λ' – ступінь чорноти поверхні тіла; σ_0 – постійна Стефана – Больцмана.

Ключові рівняння для визначення ЕМП в тілі отримано з рівнянь Максвелла, які записані відносно вектора напруженості електричного поля \mathbf{E} [9]. При цьому для визначення напруженості \mathbf{H} магнітного й індукції \mathbf{D} електричного полів, а також діелектричної та магнітної проникності тіла використовуємо криві намагнічування і поляризації (1) та формули

$$\mu = \frac{\partial |\mathbf{B}_*|}{\partial |\mathbf{H}^{(1)}|}, \quad \varepsilon = \frac{\partial |\mathbf{D}_*|}{\partial |\mathbf{E}^{(1)}|}. \quad (11)$$

Зауважимо, що рівняння Максвелла можна записати відносно вектора \mathbf{H} напруженості магнітного поля.

Вплив ЕМП на процеси теплопровідності враховуємо через тепловиділення. За джерела у правій частині рівняння теплопровідності (2) приймаємо усереднені за період T_ω коливання електромагнітної хвилі [20] тепловиділення

$$Q_* = \frac{1}{T_\omega} \int_t^{t+T_\omega} \left(\gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) dt. \quad (12)$$

Силовий вплив ЕМП на електропровідне тіло зводиться до дії пондеромоторних сил [20]:

$$\mathbf{F}_* = \frac{1}{T_\omega} \int_t^{t+T_\omega} (\mathbf{F}^A + \mathbf{F}^K + \mathbf{F}^M) dt, \quad (13)$$

$$\mathbf{F}^A = \mathbf{j}^{(1)} \times \mathbf{B}^{(1)}, \quad \mathbf{F}^K = (\mathbf{P} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{E}^{(1)},$$

$$\mathbf{F}^M = (\mathbf{M} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{M} \times (\nabla \times \mathbf{B}^{(1)}), \quad (14)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}^{(1)}, T) = \mathbf{D}_*(\mathbf{E}^{(1)}, T) - \varepsilon_0 \mathbf{E}^{(1)},$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{H}^{(1)}, T) = \mu_0^{-1} \mathbf{B}_*(\mathbf{H}^{(1)}, T) - \mathbf{H}^{(1)}, \quad (15)$$

де \mathbf{F}^A , \mathbf{F}^K , \mathbf{F}^M – відповідно сили Ампера, Кельвіна та сили впливу поля на молекулярні струми.

Отримані із розв'язків зв'язаної задачі електродинаміки й теплопровідності температурне поле і пондеромоторні сили є вихідними для визначення напружено-деформованого стану тіла в квазіусталеній постановці.

Для опису процесів деформування тіла використовуємо записані у приростах співвідношення неізотермічного пружнопластичного течіння [17].

Фізичні й геометричні співвідношення та рівняння рівноваги з відповідними граничними умовами, які утворюють повну систему рівнянь для визначення переміщень $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}^\top$, деформацій $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23}\}^\top$ і напружень $\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}\}^\top$, запишемо у такому, зручному для чисельної реалізації, вигляді [1, 3, 9]:

$$\{d\sigma\} = \mathbf{C}^{t+\Delta t} (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_T\}) + d\mathbf{C} (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_{pl}\}) + \mathbf{Z} dT, \quad (16)$$

$$\{\varepsilon\} = \mathbf{A} \mathbf{u}, \quad (17)$$

$$\mathbf{A}^\top \{\sigma\} + \mathbf{F}_* = 0, \quad \mathbf{r} \in V, \quad (18)$$

$$\mathbf{N}^T \{\sigma\} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_\sigma, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_u, \\ \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \Gamma, \quad \Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset, \quad (19)$$

де $\{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon_T\}$, $\{\varepsilon_{pl}\}$ – вектори повних, температурних і пластичних деформацій; \mathbf{p} , $\mathbf{u}^{(0)}$ – вектори зовнішнього силового навантаження (відмінного від електромагнітного) і переміщень, заданих відповідно на поверхнях Γ_σ і Γ_u ;

$$\mathbf{C}^{t+dt} = \mathbf{G}^{t+dt} - \frac{\mathbf{G}^{t+dt} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{G}^{t+dt}}{\frac{2}{3} k \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{G}^{t+dt} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}}; \\ d\mathbf{C} = d\mathbf{G} - \frac{\mathbf{G}^{t+dt} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^T d\mathbf{G}}{\frac{2}{3} k \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{G}^{t+dt} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}}; \\ \mathbf{Z} = \frac{\sqrt{\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\} \mathbf{G}^{t+dt} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T}}}{\frac{2}{3} k \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^T \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^T \mathbf{G}^{t+dt} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}};$$

\mathbf{A} , \mathbf{N} , \mathbf{G} – матриці оператора геометричних співвідношень теорії пружності, напрямних косинусів зовнішньої нормалі до поверхні і пружних сталей [23];

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\} = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{11}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{22}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{33}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{12}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{13}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{23}} \right\}^T$$

– вектор похідних функції течіння Φ у просторі напружень; $d\mathbf{G}$ – матриця приростів пружних модулів за крок навантаження (у зв'язку з їхньою температурною залежністю); k – кут нахилу кривої «еквівалентне напруження $\bar{\sigma}$ – еквівалентна пластична деформація $\bar{\varepsilon}_{pl}$ » [17]; індекс « $t + dt$ » означає, що величини обчислюються у момент часу $t + dt$ (наприкінці чергового кроку навантаження). Решту величин визначаємо у момент часу t (на початку кроку).

Відповідно до окресленої розрахункової схеми [1, 5, 9] задачу про визначення електромагнітних, теплових і механічних полів в електропровідному тілі за умов дії зовнішнього ЕМП розв'язуємо за два етапи. На першому із системи рівнянь (1)–(6), (11) за початкових умов (7), умов (8), (9) на межі поділу тіла та зовнішнього середовища й граничних умов (10) визначаємо розподіл температури та параметри, які характеризують ЕМП у тілі. Далі на основі отриманих розв'язків зв'язаної задачі електродинаміки й теплопровідності обчислюємо пондеромоторні сили \mathbf{F}_* , які разом із температурою складають вхідні дані для задачі другого етапу – визначення переміщень, деформацій і напружень у тілі з рівнянь неізотермічної термопружнопластичності (16)–(18) за відомих граничних умов (19).

Методика розв'язування. В основу методики розв'язування розглядуваної задачі покладено підхід [1, 9], який ґрунтується на сумісному використанні в рамках однієї обчислювальної схеми методу скінчених елементів (для апроксимації шуканих розв'язків за просторовими змінними) [23] та різницевих алгоритмів (для апроксимації за часом) [24].

Внаслідок застосування стандартної процедури скінченно-елементної дискретизації у варіанті методу зважених залишків [11] задачу першого етапу – зв'язану задачу для визначення ЕМП та температури (приймаючи, що рівняння (5) виконується тотожно) – зводимо до системи звичайних диференціальних рівнянь [2, 9, 19]

$$[L_1]\{\dot{T}_h(t)\} + [L_0]\{T_h(t)\} = \{f_T\}, \quad \{T_h(0)\} = \{T_h^0\}, \quad (20)$$

$$[M_2]\{\ddot{E}_h(t)\} + [M_1]\{\dot{E}_h(t)\} + [M_0]\{E_h(t)\} = \{f_E\},$$

$$\{E_h(0)\} = 0, \quad \{\dot{E}_h(0)\} = 0 \quad (21)$$

відносно невідомих значень векторів напруженості $\{E_h\}$ електричного поля і температури $\{T_h\}$ у вузлах скінченно-елементного поділу. Матрично-векторні характеристики задач (20), (21) обчислюємо через підсумовування відповідних характеристик окремих скінченних елементів [9, 18]. Отримані задачі Коші зводимо до системи алгебраїчних рівнянь за допомогою сім'ї однокрокових багатопараметричних алгоритмів [24]. При цьому на кожному часовому кроці за отримуваними вузловими значеннями напруженості електричного поля за допомогою співвідношень (4), (1) та (11) визначаємо індукцію і напруженість магнітного поля, індукцію електричного поля та магнітну й діелектричну проникності у кожному вузлі тіла та ітераційно уточнюємо всі шукані величини до досягнення збіжності розв'язків. Ця ітераційна процедура детально описана в [2].

Відповідно до теорії неізотермічного пружнопластичного течіння процес деформування розглядаємо покровоко. Пондеромоторні сили й розподіл температури у тілі, починаючи із заданих величин при $t = 0$, змінюються на відповідні прирости на кожному кроці навантаження так, що до завершення процесу деформування вони приймають свої кінцеві значення. На кожному кроці за цими приростами визначаємо прирости переміщень, деформацій і напружень, які підсумовуємо з отриманими на попередніх кроках. Так крок за кроком, як наслідок, отримуємо історію зміни термомеханічного стану тіла.

Прирости переміщень на черговому кроці навантаження $[t_j, t_j + \Delta t_j]$ визначаємо зі скінченно-елементного рівняння [9]

$$[\mathbf{K}_{ep}]\{d\mathbf{q}\} = \{d\mathbf{F}_*\} + \{d\mathbf{P}\} + \{d\mathbf{R}\}, \quad (22)$$

де $\{d\mathbf{q}\}$ – глобальний вектор приростів вузлових переміщень; матрицю жорсткості $[\mathbf{K}_{ep}]$ та вектори приростів пондеромоторних сил $\{d\mathbf{F}_*\}$, силового $\{d\mathbf{P}\}$ і температурного $\{d\mathbf{R}\}$ навантажень отримуємо через підсумовування відповідних характеристик окремих елементів [9].

Ітераційні процедури розв'язування нелінійної системи алгебраїчних рівнянь (22) будемо на основі методів змінних параметрів жорсткості та додаткових напружень [23]. За відомих приростів переміщень на даному кроці прирости деформацій і напружень визначаємо за допомогою геометричних (17) і фізичних (16) співвідношень.

Обчислювальні аспекти. Використання методу скінченних елементів разом із сім'єю однокрокових багатопараметричних різницевих схем фактично зводить розглядувану задачу до послідовності систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно вузлових значень напруженості електричного (магнітного) поля, температури й приростів переміщень. При цьому більша частина часу проведення обчислень йде на формування і розв'язування цих систем, причому час формування таких систем співвимірний з часом їх

розв'язування. Якщо врахувати, що процес розгортається ще й у часі, і на кожному часовому шарі формуються і розв'язуються системи рівнянь великої розмірності та (залежно від нелінійності поведінки матеріалу) не один раз (розв'язки ітераційно уточнюються), отримати розв'язок за відсутності високопродуктивних обчислювальних систем може бути досить проблематичним навіть вже у просторово-одновимірному випадку [21].

При організації обчислювального процесу виникає декілька рівнів труднощів. Насамперед необхідно оптимізувати чи хоча би суттєво скоротити обсяги обчислювальної роботи на одному часовому кроці.

При формуванні матричних характеристик окремих елементів виникає необхідність обчислення інтегралів по області елемента чи по його границі. Внаслідок складності підінтегральних виразів, якими для скінченних елементів з криволінійними границями разом з поліномами можуть бути раціональні та ірраціональні функції [23], ці інтеграли неможливо обчислити аналітично в замкненому вигляді. Тому інтегрування виконуємо чисельно. При цьому використовуємо спеціальні квадратурні формули, які дозволяють отримати вираш у часі розв'язування задачі без втрати точності результатів. Зокрема, часто використовуювані квадратурні формули Гауса для точного інтегрування по біквадратичному ізопараметричному елементу з 60-ма ступенями свободи [23] вимагають 27 ($3 \times 3 \times 3$) опорних точок, у той час наведені в [13] спеціальні формули – лише 14.

Враховуючи, що інтегрування по скінченному елементу проводимо в локальній системі координат елемента чи по його границі [23], значення функцій форми та їх похідних в опорних точках числового інтегрування можна не обчислювати заново для кожного скінченного елемента, а визначити лише один раз (на початку обчислень) і запам'ятати. Тоді обчислення коефіцієнтів матриці елемента фактично зводиться до визначення якобіана матриці перетворення координат у вузлах квадратурних формул. Крім того, можна обчислювати і зберігати лише ті елементи матриць, які розміщені на діагоналі і вище неї (матриці симетричні).

При застосуванні методу додаткових навантажень до розв'язування системи рівнянь (22) обчислення упродовж усього ітераційного процесу проводимо з постійною матрицею жорсткості $[K_{ep}]$, яку формуємо й обертаємо лише один раз (на першій ітерації). Розв'язування системи рівнянь (22) на всіх подальших ітераціях фактично зводиться до множення оберненої матриці на вектор, що займає менше ніж 3% процесорного часу, який йде і на формування повної системи рівнянь, і на її розв'язування. Суттєвим недоліком такого підходу, однак, є сповільнення збіжності ітераційного процесу із розширенням областей пластичності, внаслідок чого виникає необхідність у побудові певних процедур прискорення збіжності.

Щоб уникнути вказаних недоліків, застосовуємо комбінований підхід, згідно з яким деякий час проводимо обчислення методом додаткових напружень із постійною матрицею $[K_{ep}]$. Після сповільнення збіжності ітераційного процесу формуємо нову матрицю $[K_{ep}]$ і знову певний час продовжуємо обчислення з цією новою матрицею. Критерієм необхідності обчислення нової матриці $[K_{ep}]$ може бути перевищення певного значення кількості ітерацій N_j на даному кроці навантаження.

Суміщення методів змінних параметрів пружності й додаткових напружень дає змогу побудувати достатньо ефективний алгоритм розв'язування задачі термопружнопластичності та суттєво скоротити час обчислень.

Подальшого скорочення часу обчислень досягаємо за рахунок вибору різних кроків числового інтегрування рівнянь електродинаміки, теплопровідності та термомеханіки. За один період T_ω коливання електромагнітної хвилі залежні від температури електрофізичні характеристики матеріалу

практично не змінюються. Навіть у сильних полях (порядку 1 МА/м) крок Δt_T інтегрування задачі Коші (20) можна брати рівним T_ω без практичної втрати точності [21]. Розрахунок напруженості електричного поля упродовж періоду в цьому випадку проводимо при характеристиках матеріалу, миттєві значення яких відповідають температурі на початку періоду. Після завершення повного періоду T_ω електромагнітних коливань обчислюємо усереднені за період тепловиділення (12) та пондеромоторні сили (13) і знаходимо температуру із задачі Коші (20) на черговому часовому шарі. Напружено-деформований стан після обчислення температурного поля визначаємо лише тоді, коли за час, який пройшов з моменту попереднього розрахунку напруженого стану (на $(j-1)$ -му кроці навантаження), розподіл температури чи пондеромоторних сил у тілі достатньо змінився, тобто, якщо хоча би в одній точці тіла

$$\left| T^j - T^{j-1} \right| > \chi_T, \quad \frac{\left| \mathbf{F}_*^j - \mathbf{F}_*^{j-1} \right|}{\left| \mathbf{F}_*^j \right|} > \chi_F, \quad (23)$$

де T^j , T^{j-1} , \mathbf{F}_*^j , \mathbf{F}_*^{j-1} – відповідно значення температури й пондеромоторних сил у даний момент часу $t = t_j$ та в момент попереднього розрахунку напруженого стану (при $t = t_{j-1}$); χ_T , χ_F – числові параметри, які характеризують допустиму величину зростання температури й пондеромоторних сил за один крок навантаження. Якщо ж у жодній точці тіла умови (23) не виконуються, прирости напруженого стану не обчислюють, а переходять до розрахунку параметрів ЕМП на черговому періоді.

Як показує практика обчислень, для визначення параметрів ЕМП за період T_ω у найпростішому випадку (за лінійних залежностей між індукцією і напруженістю поля) необхідно пройти як мінімум 16 кроків за часом (у сильно нелінійних магнітних середовищах для збіжності необхідна на декілька порядків більша кількість кроків на період). І на кожному такому кроці при послідовному суміщенні алгоритмів розрахунку трьох полів різної фізичної природи треба визначати температурне поле та напружено-деформований стан у тілі, які практично не змінюються упродовж цього часу. Тобто відповідно до отриманих значень температури на кожному кроці треба заново обчислювати значення електрофізичних характеристик, формувати й розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь достатньо загального вигляду, що вимагає значних обсягів обчислень. При розрахунку параметрів ЕМП з фіксованим упродовж періоду розподілом температури матрицю системи лінійних алгебраїчних рівнянь формуємо й обертаємо лише один раз – на початку періоду. Всі подальші обчислення параметрів ЕМП упродовж періоду зводяться лише до множення цієї оберненої матриці на вектор, що значно (на порядки) скорочує обчислювальні затрати. Визначаючи температурне поле і напружений стан тіла лише раз на період, на декілька порядків скорочуємо час розв'язування задачі визначення напруженого стану тіла. Однак навіть і у цьому випадку при розгляді реальних процесів індукційного нагріву обчислювальні затрати можуть перевищувати можливості існуючих обчислювальних систем. Тому для розв'язуванні задачі застосовуємо такий алгоритм.

За електрофізичними характеристиками матеріалу, які відповідають початковій температурі, з кроком $\Delta t_E = T_\omega / N$ (де $N \geq 16$) декілька періодів (до виходу на усталений режим) розв'язуємо задачу Коші (21), після чого переходимо до розв'язування задачі (20) кроком Δt_T . Критерієм виходу ЕМП на усталений режим і переходу до визначення температури є виконання умови

$$\left| \frac{Q_*((k+1)T_\omega) - Q_*(kT_\omega)}{Q_*(kT_\omega)} \right| < \chi_Q, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (24)$$

у кожному вузлі скінченно-елементного поділу, де

$$Q_*((k+1)T_\omega) = \frac{1}{T_\omega} \int_{kT_\omega}^{(k+1)T_\omega} Q dt,$$

χ_Q – параметр, який характеризує досягнення збіжності. Якщо умова (24) виконується, переходимо до визначення температури із задачі Коші (20) з усередненими джерелами, потужність яких визначена упродовж останнього, $(k+1)$ -го, періоду.

Обчислення температурного поля з тими ж самими джерелами тепла продовжуємо доти, доки для кожного вузла скінченно-елементного поділу виконуються умови

$$\left| \frac{\gamma(T^{i+1}) - \gamma(T^i)}{\gamma(T^i)} \right| < \chi_\gamma, \quad \left| \frac{\mu(T^{i+1}) - \mu(T^i)}{\mu(T^i)} \right| < \chi_\mu,$$

$$\left| \frac{\varepsilon(T^{i+1}) - \varepsilon(T^i)}{\varepsilon(T^i)} \right| < \chi_\varepsilon,$$

де T^i, T^{i+1} – відповідно значення температури у вузлі у момент часу t_i (коли відбувся перехід від розв’язування задачі (21) до задачі (20)) і в поточний момент часу. Якщо максимальні відносні зміни якоїсь із характеристик досягли заданого порогу $\chi_\varepsilon, \chi_\mu$ чи χ_γ , це означає, що попередньо обчислені усереднені тепловиділення вже не відповідають поточному значенню температури й необхідно переходити на обчислення параметрів ЕМП при нових значеннях електрофізичних характеристик.

Величина кроку навантаження для задачі термопружнопластичності вибирається автоматично (визначається умовою (23) і параметрами χ_T, χ_F).

Зазначимо, що зміна величини кроків у процесі побудови розв’язків за часовими шарами дозволяє ще більше скоротити об’єми обчислень. Наприклад, при комп’ютерному моделюванні процесів високотемпературної індукційної обробки на початкових етапах після вимкнення струму охолодження відбувається інтенсивно. Проте з часом воно сповільнюється, що дозволяє отримувати точні оцінки температурного поля в тілі з набагато більшими кроками. Критерієм продовження розрахунків з незмінним кроком при цьому є виконання умов

$$\chi_{T_1} < \min_n |T^k - T^{k-1}|, \quad \max_n |T^k - T^{k-1}| < \chi_{T_2},$$

де n – номер вузла скінченно-елементного поділу тіла; T^{k-1}, T^k – відповідно значення температури у вузлі на початку ($t = t_{k-1}$) і в кінці ($t = t_{k-1} + \Delta t_T$) кроку; χ_{T_1}, χ_{T_2} – певні значення допустимої зміни температури за крок. Якщо зміна температури за крок Δt_T у всіх вузлах менша ніж χ_{T_2} , крок Δt_T подвоюється. Якщо ця зміна хоча б в одному вузлі перевищує значення χ_{T_1} , крок Δt_T удвічі зменшується.

Слід зазначити, що величини «параметрів збіжності» $\chi_\varepsilon, \chi_\mu, \chi_\gamma, \chi_Q$, визначаємо на основі обчислювального експерименту (здебільшого їх значення варіюються у межах від 2 до 5%).

Врахування термочутливості матеріалів. Температурні залежності електрофізичних, теплових і механічних характеристик матеріалів, кривих деформування, намагнічування, поляризації, як правило, апроксимують різними аналітичними залежностями за допомогою степеневих, дробово-раціональних, логарифмічних, експоненціальних, гіперболічних, тригонометричних функцій, інтерполяційних многочленів Лагранжа, Ньютона тощо. Такі аналітичні співвідношення не завжди дають задовільну апроксимацію наявних кривих у всьому діапазоні зміни температури, напруженості поля, деформацій тощо. Поруч з аналітичними апроксимаціями нелінійних властивостей матеріалів використовують інтерполяційні сплайни. На кривих, що характеризують властивості матеріалів, вибираємо достатню кількість опорних точок (γ_i, T_i) , між якими вихідну криву наближаємо (у найпростішому випадку) прямою лінією (див., наприклад, рис. 1). У процесі розрахунків значення характеристики у точці тіла з температурою T_p визначають через дві найближчі задані сусідні точки (γ_1, T_1) і (γ_2, T_2) (такі, що $T_1 < T_p \leq T_2$), використовуючи рівняння прямої

$$\gamma(T_p) = \gamma_1 + \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)}{(T_2 - T_1)}(T_p - T_1).$$

При заданні температурної залежності індукції від напруженості відповідно електричного й магнітного полів (кривих поляризації і намагнічування) чи напружень від деформацій (кривих деформування) справу маємо вже з функцією двох аргументів. Обчислювальну процедуру в цьому випадку можна проілюструвати на прикладі визначення магнітної проникності в точці інтегрування з температурою T_p та магнітною індукцією B_p . Оскільки криві намагнічування задані лише для певного дискретного набору температур, вибираємо дві сусідні за температурою криві (відповідно для температур T_1 та T_2 таких що $T_1 < T_p < T_2$ (див. рис. 2).

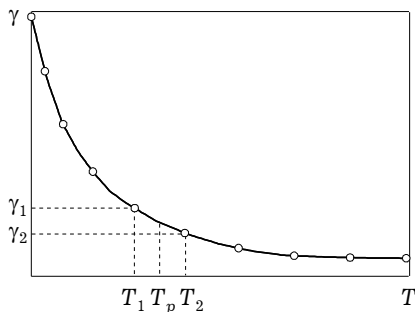


Рис. 1

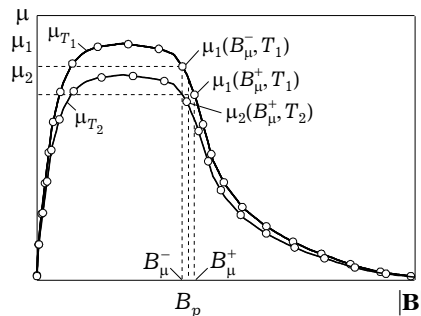


Рис. 2

Алгоритм обчислення магнітної проникності при цьому виглядає так:

1°. Знаходимо B_{μ}^{-} та B_{μ}^{+} такі, що $B_{\mu}^{-} \leq B_p < B_{\mu}^{+}$.

2°. Шукаємо відповідні значення магнітної проникності $\mu(B_{\mu}^{-}, T_1)$, $\mu(B_{\mu}^{+}, T_1)$, $\mu(B_{\mu}^{-}, T_2)$ і $\mu(B_{\mu}^{+}, T_2)$ для кривих, що відповідають температурам T_1 і T_2 .

3°. Враховуючи, що точки (B_{μ}^{-}, T_1) , (B_{μ}^{+}, T_1) і (B_{μ}^{-}, T_2) , (B_{μ}^{+}, T_2) з'єднані прямими лініями, визначаємо $\mu_1 = \mu(B_p, T_1)$, $\mu_2 = \mu(B_p, T_2)$ за формулами

$$\mu_1 = \mu(B_p, T_1) + \frac{\mu(B_{\mu}^{+}, T_1) - \mu(B_{\mu}^{-}, T_1)}{B_{\mu}^{+} - B_{\mu}^{-}}(B_p - B_{\mu}^{-}),$$

$$\mu_2 = \mu(B_p, T_2) + \frac{\mu(B_\mu^+, T_2) - \mu(B_\mu^-, T_2)}{B_\mu^+ - B_\mu^-} (B_p - B_\mu^-).$$

4°. Будемо лінійне наближення для $\mu(B_p, T_p)$ за допомогою співвідношення

$$\mu(B_p, T_p) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{T_2 - T_1} (T_p - T_1).$$

Якщо в даній точці відома напруженість магнітного поля H_p (при виборі за ключову функцію напруженість магнітного поля) і температура T_p , магнітну проникність визначаємо аналогічно, але працюємо вже з кривими намагнічування і кривими залежності магнітної проникності від напруженості магнітного поля (рис. 3). При цьому значення магнітної індукції та магнітної проникності в точці з напруженістю магнітного поля H_p і температурою T_p визначаємо з кривих намагнічування для двох сусідніх температур за формулами

$$B(H_p, T_p) = B_1 + \frac{B_2 - B_1}{T_2 - T_1} (T_p - T_1),$$

$$\mu(H_p, T_p) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{T_2 - T_1} (T_p - T_1).$$

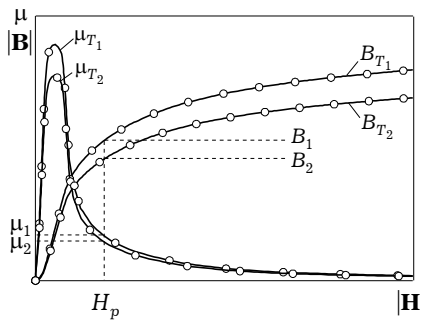


Рис. 3

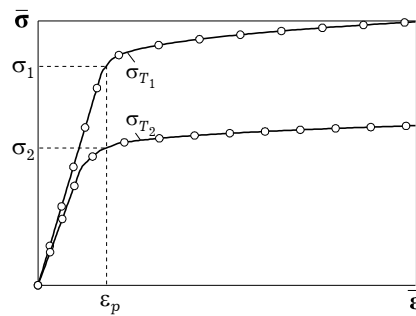


Рис. 4

Цей же алгоритм використовуємо для визначення діелектричної проникності в точці з температурою T_p і значенням індукції D_p (напруженості E_p) на основі кривих поляризації і залежності діелектричної проникності від індукції (напруженості) електричного поля, а також для побудови кривої деформування для даної температури, усереднюючи за лінійним законом криві деформування для заданих двох сусідніх значень температури (див. рис. 4).

Числова реалізація. Врахування наведених особливостей числової реалізації при розробці відповідного програмного забезпечення моделювання фізико-механічних процесів у виробі з електропровідних матеріалів за умов дії полів різної природи дозволило отримати розв'язки складних задач про визначення електромагнітного, теплового і механічного полів у виробі із феромагнітних (як магнітнотяжких, так і магнітножорстких) матеріалів при високотемпературній індукційній обробці [1, 3, 4, 6–10], визначити залишкові напруження у виробі після їх обробки, а також встановити **раціональні** параметри режимів термообробки з метою забезпечення рівномірності нагріву виробів, наведення у них бажаного рівня залишкових напружень чи мінімізації часу обробки за обмежень на напруження.

1. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д. Математичне моделювання індукційного нагріву електропровідних тіл // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2004. – Вип 8. – С. 41–55.
2. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д. Методика чисельного дослідження електромагнітних і температурних полів при індукційному нагріві електропровідних циліндричних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 4. – С. 140–148.
3. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д. Методика числового дослідження електромагнітних, температурних і механічних полів при високотемпературній індукційній обробці електропровідних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 4. – С. 146–156.
4. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д. Фізико-механічні процеси у феромагнетних тілах під час індукційної обробки // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – 40, № 2. – С. 29–35.
5. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д., Казарян К. Б. Математичне моделювання термомеханічних процесів в осесиметричних електропровідних тілах за електромагнітних навантажень // Машинознавство. – 2003. – № 4. – С. 3–7.
6. Гачкевич О., Дробенко Б., Касперський З. Розрахунок термонапруженого стану феромагнітного циліндра за індукційного нагрівання в рамках моделі неферомагнітного термочутливого пружно-пластичного електропровідного тіла // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А: Природ. науки. – 2006. – Вип. 1. – С. 85–90.
7. Дробенко Б. Моделювання процесів деформування електропровідних тіл за умов їх високочастотної термообробки // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип 65. – С. 216–225.
8. Дробенко Б. Моделювання термомеханічних процесів у термочутливих магнітотвердих феромагнітних тілах при високотемпературному індукційному нагріванні // Машинознавство. – 2006. – № 7. – С. 13–17.
9. Дробенко Б. Д. Термонапряженное состояние электропроводных тел при воздействии внешнего квазиустановившегося электромагнитного поля // Прикл. механика. – 2005. – № 12. – С. 13–25.
10. Дробенко Б. Термонапряженное состояние ферромагнитного цилиндра при высокотемпературном индукционном нагреве // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 40. – С. 68–75.
11. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – Москва: Мир, 1986. – 319 с.
12. Каленюк П., Нитребич З. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во нац. ун-ту «Львів. політехніка», 2002. – 292 с.
13. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – Москва: Наука, 1967. – 500 с.
14. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
15. Скоробагатько В. Я. Исследование по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1980. – 243 с.
16. Скоробагатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – Москва: Наука, 1983. – 311 с.
17. Allen D. H. Heisler W. E. A theory for analysis of thermoplastic materials // Comput. & Struct. – 1981. – 13. – P. 129–135.
18. Bay F., Labbe V., Favennec Y., Chenot J. L. A numerical model for induction heating processes coupling electromagnetism and thermomechanics // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2003. – 58, No. 6. – P. 839–867.
19. Hachkevych A., Drobenko B., Kournyts'kyi T. A mathematical simulation of high temperature induction heating of electroconductive solids // Int. J. Heat and Mass Transfer. – 2007. – 50. – P. 616–624.
20. Gaczkiewicz A., Kasperski Z. Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termomechaniki ciał przewodzących. – Opole: Politechnika Opolska, 1999. – 367 s.
21. Skoczkowski T., Kalus M. The mathematical model of induction heating of ferromagnetic pipes // IEEE Trans. Magnetics. – 1989. – No. 3. – P. 2745–2750.
22. Turowski J. Elektrodynamika techniczna. – Warszawa: Wyd-wo Nauk.-Techn., 1982. – 463 s.
23. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. Finite Element Method: V. 1. The Basis. – London: Butterworth Heinemann, 2000. – 689 p.
24. Zienkiewicz O. C., Wood W. L., Nine N. W. A unified set of single step algorithm. Part 1: General formulation and applications // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1984. 20. – P. 1529–1552.

**ОСОБЕННОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СВЯЗАННЫХ ЗАДАЧ
ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ, ТЕПЛОВЫХ И МЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ
В ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТЕЛАХ
ПРИ КВАЗИУСТАНОВИВШИХСЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ**

Рассмотрены подходы к численному моделированию электромагнитных, тепловых и механических полей в электропроводных телах, находящихся под воздействием внешнего квазистационарного электромагнитного нагружения, с учетом термочувствительности материала, нелинейной зависимости индукций от напряженностей электрического и магнитного полей и упругопластического характера деформирования. Эти подходы, основанные на методе конечных элементов и семействе разностных алгоритмов, составляют теоретическую основу для компьютерного моделирования процессов высокотемпературной индукционной обработки изделий из ферромагнитных (как магнитномягких, так и магнитножестких) материалов.

**SPECIAL FEATURES OF NUMERICAL ANALYSIS
OF COUPLED ELECTROMAGNETIC, THERMAL AND MECHANICAL FIELDS
IN THERMO-SENSITIVE ELECTRO-CONDUCTIVE SOLIDS
SUBJECTED TO QUASI-STEADY ELECTROMAGNETIC LOADINGS**

The approaches to numerical simulation of coupled electromagnetic, thermal and mechanical fields in electro-conductive solids subjected to external quasi-steady electromagnetic loading are considered. A mathematical model takes into account temperature dependence of all material coefficients, nonlinear dependence of induction on strength of both electrical and magnetic fields, and the possibility of elastic-plastic deformations. The approaches are based on the finite elements method and a family of finite difference algorithms and form the basis for computer simulation of high temperature induction treatment processes in ferromagnetic (both magnetically soft and hard) solids.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
² Політехніка Опольська, Опольце, Польща

Одержано
14.04.07