УДК 514.824, 514.764

Д. О. Дзякович

ОБҐРУНТУВАННЯ ТЕОРІЇ КАЛУЦИ – КЛЕЙНА В РАМКАХ 4-ВИМІРНОЇ ГЕОМЕТРІЇ РІМАНА – КАРТАНА

Розглядається новий підхід до геометризації електромагнетизму, заснований на специфічній інтерпретації теорії Калуци − Клейна. 5-вимірний простір цієї теорії пропонується представити як формальний засіб аналізу 4-вимірного простору зі скрутом. Для цього досліджуються наслідки параметризації конкретного простору такого типу вздовж ліній відповідного векторного поля, що характеризує його геометрію. Показано, що в рамках нового підходу всі результати теорії Калуци − Клейна з деякими відмінностями та узагальненнями можна отримати і для 4-вимірного простору зі скрутом.

Вступ. Теорія Калуци − Клейна добре відома в теоретичній фізиці. Завдяки переконливим результатам і перспективам математичного узагальнення вона стала класичним прикладом об'єднання гравітації та електромагнетизму. Основи та сучасний стан цієї теорії описані в [1, 2, 7−9]. Головними недоліками класичної теорії Калуци − Клейна можна вважати необґрунтоване запровадження додаткового 5-го виміру та штучний характер метрики використовуваного 5-вимірного простору. Подолання зазначених недоліків могло б вивести цю теорію на новий рівень і дати підстави для надання їй статусу фізичної.

У цій статті розглядаємо можливе вирішення цієї проблеми з використанням геометрії Рімана − Картана, що описує простір зі скрутом [5, 10]. Аналізуючи властивості 4-вимірного простору зі скрутом, який розглядався у [3, 6], вдається обґрунтувати доцільність запровадження 5-го виміру разом з усіма особливостями метрики відповідного 5-вимірного простору.

Такий підхід кардинально відрізняється від класичного, в якому метричні властивості простору Калуци пояснюються «компактифікацією» додаткового виміру [7, 8]. Причини ж цієї компактифікації залишаються незрозумілими, при цьому замість однієї штучної умови на метрику накладається інша − менш точна.

Незрозумілість 5-го виміру та специфічний вигляд метрики в теорії Калуци − Клейна залишають враження формальності 5-вимірного простору. Це, в свою чергу, стимулює пошуки інших підходів (проективний варіант теорії) і навіть інших шляхів геометризації електромагнетизму. У роботі [3] пропонувалося використовувати для цього абсолютно антисиметричний тензор скруту, нормований на довільну сталу, зберігаючи 4-вимірність просторово-часового континууму. На жаль, у такому випадку неможливо отримати основні рівняння теорії (відповідні фізичні закони) з простих геометричних принципів, уникаючи при цьому будь-яких штучних маніпуляцій. Але, як виявилось, геометрія розглянутого в [3] простору може бути корисною для обґрунтування формальних засад теорії Калуци − Клейна.

Мета роботи − дослідити метричні наслідки існування у просторі нормованого абсолютно антисиметричного скруту та особливості параметризації цього простору вздовж ліній поля дуального вектора конторсії, а також показати, що 4-вимірному простору з відповідною геометрією Рімана − Картана формально відповідає 5-вимірний простір теорії Калуци − Клейна, який можна використовувати для вивчення геометричних властивостей 4-вимірного простору зі скрутом.

Також цікаво з'ясувати, які нові наслідки виникають у зв'язку з новою інтерпретацією простору Калуци.

1. Викладення отриманих результатів. Геометрія Рімана − Картана описує простір з квадратичною формою метрики та коваріантно сталим метричним тензором:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \qquad \nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0.$$

Коефіцієнти зв'язності $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ допускають у цьому випадку наявність тензора скруту $S^\alpha_{\cdot\mu\nu}$, який вважається відмінним від нуля:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \left\{{}^{\alpha}_{\mu\nu}\right\} + K^\alpha_{\cdot\mu\nu}, \qquad S^\alpha_{\cdot\mu\nu} \equiv \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} = K^\alpha_{\cdot\mu\nu} - K^\alpha_{\cdot\nu\mu},$$

де $\left\{{}^{\alpha}_{\mu\nu}\right\}$ – символи Крістоффеля, $K^\alpha_{\cdot\mu\nu}$ – тензор конторсії (антисиметричний за першою парою індексів), грецькі індекси $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\} \subset \{0, 1, 2, 3\}$. Сигнатура метрики вибирається простороподібною (−, +, +, +).

Сформулюємо вихідні положення, що лежать в основі подальшого дослідження.

Припущення 1. Многовид, що розглядається, є 4-вимірним просторово-часовим континуумом і описується геометрією Рімана – Картана.

Припущення 2. Тензор конторсії многовиду антисиметричний за будь-якою парою індексів (абсолютно антисиметричний). Таку ж властивість має і тензор скруту.

Припущення 3. Квадрат норми тензора конторсії (і так само тензора скруту) є сталою величиною, більшою від нуля.

Припущення 2 та 3 конкретизують основне припущення 1 і зосереджують увагу лише на окремому випадку просторів зі скрутом, для якого

$$K_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} {}^*K^\mu, \qquad S_{\alpha\beta\gamma} = 2K_{\alpha\beta\gamma}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{3!} K^{\alpha\beta\gamma} K_{\alpha\beta\gamma} = -{}^*K_\sigma {}^*K^\sigma = K^2 > 0, \tag{2}$$

де $\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$ – тензор Леві-Чівіти, ${}^*K^\mu$ – дуальний вектор для тензора конторсії, а K – довільна дійсна стала, яку покладемо більшою від нуля ($K = \mathrm{const} > 0$). У такому просторі тензор конторсії (або скруту) має лише три незалежні компоненти (з урахуванням умови (2)) і задає часоподібне векторне поле ${}^*K^\mu$, якому відповідає часоподібний одиничний вектор λ^μ (тобто $\lambda^\sigma \lambda_\sigma = -1$):

$${}^*K^\mu = \frac{1}{6} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} K_{\alpha\beta\gamma}, \qquad \lambda^\mu = \frac{{}^*K^\mu}{\sqrt{\left| {}^*K_\sigma {}^*K^\sigma \right|}} = \frac{{}^*K^\mu}{K}. \tag{3}$$

Простір зі скрутом, для якого виконується припущення 2, має одну цікаву особливість. Як і в геометрії Рімана, лінії екстремальної довжини співпадають у цьому просторі з лініями сталого напрямку.

Існування у просторі власного векторного поля (3) дозволяє утворити лінійну координатну форму

$$d\lambda = -\lambda_\mu dx^\mu, \tag{4}$$

що дає проекційну характеристику переміщення dx^μ. Дійсний інтервал $d\lambda$ характеризує переміщення уздовж ліній поля ${}^*K^\mu$ і співпадає з відповідним приростом параметра довжини, визначеного на цих лініях.

Твердження 1. *Кожній парі сусідніх точок у просторі зі скрутом* (1) *за умови* (2) *відповідає проекційний інтервал* $d\lambda$ (4).

Твердження 2. *Лінійна форма* (4) *задає метрику специфічної метричної геометрії, яка реалізується у просторі зі скрутом, що розглядається. У рамках цієї геометрії відстані між точками простору визначаються як інтеграл від* $d\lambda$ (4) *уздовж геодезичної, що з'єднує відповідні точки.*

Твердження 2 порушує нове цікаве питання, проте його розвиток виходить за межі поставленої задачі.

Розглянемо більш детально властивості параметра λ. Припущення 3 гарантує існування поля ${}^{*}K^{\mu}$ в усьому просторі, а також збереження цим полем часоподібного напрямку (2). Тому параметр довжини λ, визначений на лініях цього поля, можна розглядати як глобальний часоподібний параметр і використовувати його для характеристики положення у просторі. Але такий параметр не буде голономним, тобто залежатиме від способу визначення. Зміна параметра λ при переході від однієї точки до іншої обчислюється як інтеграл від виразу (4) і залежить від шляху інтегрування. Різниця значень $\Delta\lambda$, обчислених для двох різних траєкторій переходу (шляхів інтегрування L_{12} та L'_{12}), дорівнює циркуляції поля $-\lambda^{\mu}$ по відповідному замкненому контуру C:

$$\Delta\lambda_{L_{12}} - \Delta\lambda_{L'_{12}} = \Delta\lambda_{L_{12}} + \Delta\lambda_{L'_{21}} =$$

$$= -\int\limits_{L_{12}} \lambda_{\mu}\, dx^{\mu} - \int\limits_{L'_{21}} \lambda_{\mu}\, dx^{\mu} = -\oint\limits_{C} \lambda_{\mu}\, dx^{\mu}. \qquad (5)$$

За теоремою Стокса (див. [4, §6, §83])

$$\Delta\lambda_{C} = -\oint\limits_{C} \lambda_{\mu}\, dx^{\mu} = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma} f_{\mu\nu}\, d\sigma^{\mu\nu},$$

$$f_{\mu\nu} \equiv \partial_{\mu}\lambda_{\nu} - \partial_{\nu}\lambda_{\mu}, \qquad (6)$$

де $\Delta\lambda_{C}$ – циркуляція поля $-\lambda^{\mu}$ по контуру C або зміна параметра λ при обході цього контуру ($\Delta\lambda_{C} = \Delta\lambda_{L_{12}} + \Delta\lambda_{L'_{21}}$, $C \equiv L_{12} \bigcup L'_{21}$), $d\sigma^{\mu\nu}$ – елемент поверхні Σ, обмеженої контуром C. Отже, якщо $f_{\mu\nu} \neq 0$, то після обходу замкненого контуру параметр λ змінюється на величину $\Delta\lambda_{C}$, яка залежить від вибраного контуру.

Твердження 3. *В одній і тій самій точці простору з координатами* x^{μ}, $\mu \in \{0,1,2,3\}$, *параметр* λ *може набувати всіх можливих значень, що відповідають обходам усіх можливих контурів* C:

$$f_{\mu\nu} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \forall\lambda' \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in U_{4}, \quad \exists C, \quad \lambda(x) \to \lambda(x) + \Delta\lambda_{C} = \lambda',$$

де U_{4} *– чотиривимірний простір Рімана – Картана, що розглядається.*

Формальні властивості параметра λ дозволяють запровадити додаткову 5-ту координату, яка не залежить від x^{μ} та характеризує положення у просторі з урахуванням здійснених обходів довільних замкнених контурів. Перш ніж це зробити, знайдемо інфінітезимальну зміну параметра λ в 4-вимірному просторі для довільного шляху переходу між сусідніми точками (точками 1 і 2 на рис. 1). Нехай L_{12} – довільний нескінченно малий контур, що замикається на вектор переміщення dx^{μ}, який відокремлює дві сусідні точки. Позначимо через $D\lambda$ нескінченно малу зміну λ при переході вздовж цього контуру. Переміщення dx^{μ} задає альтернативний шлях переходу L'_{12}, якому відповідає нескінченно мала зміна $d\lambda$. Позначивши циркуляцію λ^{μ} при обході нескінченно малого замкненого контуру через $\delta\lambda$, отримуємо з (5), (6) та (4) такий результат:

$$D\lambda = d\lambda + \delta\lambda = -\lambda_{\mu}dx^{\mu} + \delta\lambda. \qquad (7)$$

Циркулярну складову $D\lambda$ у виразі (7) формально можна розглядати як зміну окремого координатного параметра $d\xi$ при фіксованих координатах x^μ. Таким чином, повна зміна λ, яка в загальному випадку відповідає двом сусіднім точкам, залежить від диференціалів 5-ти незалежних «координат»: dx^μ, $\mu \in \{0,1,2,3\}$, та $d\xi$, де $d\xi \equiv \delta\lambda$.

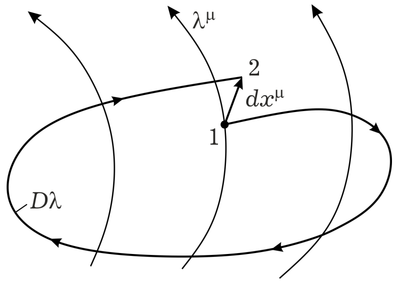

Рис. 1

Формально представити й описати 4-вимірний простір з усіма можливими значеннями λ в кожній його точці (твердження 3) можна лише за допомогою додаткового 5-го виміру. Відкладаючи значення λ в напрямку, ортогональному до векторів координатного базису просторово-часового континууму, отримаємо 5-вимірний простір з метрикою

$$dI^2 = ds^2 + D\lambda^2 = (g_{\mu\nu} + \lambda_\mu \lambda_\nu) dx^\mu dx^\nu - 2\lambda_\mu dx^\mu d\xi + d\xi^2 . \tag{8}$$

Це класична метрика теорії Калуци − Клейна, яку можна також записати з використанням 5-вимірних позначень (для цього випадку використовуємо грецькі індекси з рисочками):

$$dI^2 = \bar{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} dx^{\bar{\mu}} dx^{\bar{\nu}}, \qquad \{\bar{\mu},\bar{\nu}\} \subset \{0,1,2,3,5\}, \qquad x^5 \equiv \xi ,$$

$$\bar{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} + \lambda_\mu \lambda_\nu & -\lambda_\mu \\ \hline -\lambda_\nu & 1 \end{array} \right), \qquad \bar{g}^{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \left(\begin{array}{c|c} g^{\mu\nu} & \lambda^\mu \\ \hline \lambda^\nu & 0 \end{array} \right). \tag{9}$$

Незалежність компонент метрики (9) від x^5 є відображенням того факту, що справжній простір, в якому визначаються всі величини, залишається 4-вимірним. Але це аж ніяк не нівелює корисність додаткового 5-го виміру для більш комплексного вивчення властивостей відповідного 4-вимірного простору, особливо, якщо йдеться про фізичні застосування. Аналізуючи формальний простір з метрикою (8), можна отримати в повному обсязі всі результати теорії Калуци − Клейна для просторово-часового континууму, що відповідає зробленим припущенням.

Наведемо основні результати теорії Калуци − Клейна з урахуванням специфіки інтерпретації 5-го виміру. Рух заряджених частинок описується в цій теорії рівняннями геодезичних 5-вимірного простору. Використовуючи введені раніше позначення, можна представити ці рівняння у такому вигляді:

$$\frac{du^\alpha}{ds} = -\left\{ {\alpha \atop \mu\nu} \right\} u^\mu u^\nu - \frac{D\lambda}{ds} f^{\alpha}_{\cdot\mu} u^\mu , \tag{10}$$

$$\frac{D\lambda}{ds} \equiv \frac{d\lambda}{ds} + \frac{d\xi}{ds} = \mathrm{const} \sim \frac{q}{m} . \tag{11}$$

Записані рівняння відрізняються від звичайних рівнянь руху [2, 4] лише додатковим співвідношенням (11), яке визначає закон зміни 5-ї координати ξ для частинки з рівняннями руху (10). З 4-вимірної точки зору, вираз (11) задає спосіб визначення зміни параметра λ уздовж світової лінії частинки, згідно з яким $D\lambda$ вимірюється інтервалом власного часу $d\tau = c^{-1}|ds|$ з відповідним сталим коефіцієнтом (пропорційним відношенню заряду до маси q/m). Відповідно до твердження 3 серед усіх можливих значень незалежного параметра λ у кожній точці світової лінії частинки завжди можна вибрати і поставити їй у відповідність саме такі його значення $\lambda(\tau)$, які змінюватимуться за законом (11). Таке приписування переміщенню частинки dx^μ конкретної зміни λ до жодних фізичних наслідків не призводить.

Наявність скруту у первинному 4-вимірному просторі дається взнаки при отриманні польового лаґранжіану, оскільки треба враховувати компоненти тензора конторсії у виразі для 5-вимірної зв'язності $\bar{\Gamma}^{\bar{\alpha}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$. Тензор конторсії визначається у 4-вимірному просторі умовою ортогональності (1), тобто ортогональним до нього векторним полем λ^μ (3) та нормою K:

$$K_{\alpha\beta\gamma} = K\lambda^\mu \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}.$$

Якщо вектор λ^μ задається у 5-вимірному просторі компонентами $\bar{\lambda}^{\bar{\mu}}$, то у 5-вимірних позначеннях умову ортогональності для тензора конторсії можна записати так:

$$\bar{K}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}} = K\bar{\lambda}^{\bar{\mu}}\bar{n}^{\bar{\nu}}\bar{\varepsilon}_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}, \tag{12}$$

де $\bar{n}^{\bar{\nu}}$ – одиничний вектор, ортогональний до базисних векторів просторово-часового континууму ($\bar{\lambda}^{\bar{\mu}}\bar{\lambda}_{\bar{\mu}} = -1$, $\bar{n}^{\bar{\nu}}\bar{n}_{\bar{\nu}} = 1$, $\bar{\lambda}^{\bar{\mu}}\bar{n}_{\bar{\mu}} = 0$).

У просторі з абсолютно антисиметричною конторсією (12) [6] скалярна кривина $\bar{R}$ визначається виразом

$$\bar{R} = \bar{R}(^5\{^{\bar{\alpha}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\}) - \bar{K}^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}}\bar{K}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}} = R(\{^{\alpha}_{\mu\nu}\}) - \frac{1}{4}f^{\mu\nu}f_{\mu\nu} - 6K^2, \tag{13}$$

де $^5\{^{\bar{\alpha}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\}$ – символи Крістоффеля у 5-вимірному просторі.

Відповідно принцип найменшої дії [7–9] для знаходження структурних рівнянь геометрії матиме вигляд

$$\delta\int \bar{R}\sqrt{|\bar{g}|}\,d^5x = \Delta\xi\cdot\delta\int\left(R(\{^{\alpha}_{\mu\nu}\}) - \frac{1}{4}f^{\mu\nu}f_{\mu\nu} - 6K^2\right)\sqrt{|g|}\,d^4x = 0.$$

Лаґранжіан (13) та його фізичні наслідки досліджувалися у [3]. Відмінність отриманого лаґранжіана у тому, що крім доданків гравітаційного та електромагнітного полів, він містить також доданок, який відповідає космологічній сталій $\Lambda = 3K^2$.

Висновки. Як показало проведене дослідження, 5-вимірний простір із метрикою, що використовується в теорії Калуци – Клейна, можна розглядати як формальний засіб для представлення і вивчення специфічних метричних аспектів 4-вимірного простору зі скрутом. Цей результат може бути корисним для формування нових підходів до проблеми геометризації фундаментальних взаємодій.

Використовуючи лише звичайні чотири виміри просторово-часового континууму, а також відповідну геометрію, вдається побудувати геометричний формалізм 5-вимірного простору з метрикою такою ж, як у теорії Калуци – Клейна. Але геометричні та фізичні наслідки такого підходу дещо відрізняються від результатів цієї теорії. Тензорна частина зв'язності виявляється пов'язаною з метрикою, яка стає залежною від поля тензора конторсії. Крім того, наявність скруту безпосередньо впливає на польовий лаґранжіан, зумовлюючи виникнення в ньому космологічної константи.

Викладений підхід порушує деякі нові недосліджені питання, а також передбачає можливість подальших узагальнень. До таких відкритих питань можна віднести дослідження геометрії з лінійною формою метрики, яка реалізується у розглянутому просторі зі скрутом. Цікаво також було б дослідити можливість узагальнення цього підходу з використанням більш загальної геометрії зі скрутом та більшої кількості додаткових формальних вимірів.

1. *Александров А. Н., Вавилова И. Б., Жданов В. И. и др.* Общая теория относительности: признание временем. – Киев: Наук. думка, 2015. – 332 с.
2. *Владимиров Ю. С.* Классическая теория гравитации. – Москва: Либроком, 2009. – 264 с.
3. *Дзякович Д. О.* Геометризація електромагнетизму в просторі зі скрутом // Журн. фіз. досліджень. – 2014. – **18**, № 2-3. – С. 2001-1–2001-5.
4. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика: Учеб. пособие: В 10 т. – Т. II. Теория поля. – Москва: Наука, 1988. – 512 с.
5. *Пономарев В. Н., Барвинский А. О., Обухов Ю. Н.* Геометродинамические методы и калибровочный подход к теории гравитационных взаимодействий. – Москва: Энергоатомиздат, 1985. – 166 с.
6. *Lam Y.* Totally asymmetric torsion on Riemann – Cartan manifold. http://arxiv.org/abs/gr-qc/0211009v12002.
7. *Muntean I.* Mechanisms of unification in Kaluza – Klein theory // In: The ontology of spacetime II / Ed. D. Dieks. – Amsterdam: Elsevier, 2008. – P. 275–300.
8. *Overduin J. M., Wesson P. S.* Kaluza – Klein gravity // Phys. Rept. – 1997. – 283, No. 5-6. – P. 303–378. – https://doi.org/10.1016/S0370-1573(96)00046-4.
9. *Wesson P. S.* Space, time, matter: Modern Kaluza – Klein theory. – Singapore: World Sci. Publ. Co., 1999. – 209 p.
10. *Xie H.-J., Shirafuji T.* Torsion field equation and spinor source // Prog. Theor. Phys. – 1997. – **97**, No. 1. – P. 129–140. https://doi.org/10.1143/PTP.97.129.

ОБОСНОВАНИЕ ТЕОРИИ КАЛУЦЫ – КЛЕЙНА В РАМКАХ 4-МЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ РИМАНА – КАРТАНА

Рассматривается новый подход к геометризации электромагнетизма, основанный на специфической интерпретации теории Калуцы – Клейна. 5-мерное пространство этой теории предлагается представить как формальное средство анализа 4-мерного пространства с кручением. Для этого изучаются следствия параметризации конкретного пространства такого типа вдоль линий соответствующего векторного поля, характеризующего его геометрию. Показано, что в рамках нового подхода все результаты теории Калуцы – Клейна с некоторыми отличиями и обобщениями можно получить и для 4-мерного пространства с кручением.

RATIONALE FOR THE KALUZA – KLEIN THEORY WITHIN THE FRAMEWORK OF 4-DIMENSIONAL RIEMANN – CARTAN GEOMETRY

A new approach to geometrization of the electromagnetism based on a specific interpretation of Kaluza – Klein theory is considered. It is proposed to represent the 5-dimensional space of this theory as formal tool for analyzing 4-dimensional space with torsion. For this purpose the corollaries of parameterization of this type particular space along the lines of the corresponding vector field that describes its geometry are investigated. It is shown that within the framework of new approach all results of Kaluza – Klein theory with some distinctions and generalizations can be obtained for a 4-dimensional space with torsion.

Укр. наук.-дослід. конструкт.-технол.
ін-т еластомерних матеріалів і виробів, Дніпро

Одержано
24.02.17