

**ЗАДАЧА ПРО ОСЕСИМЕТРИЧНЕ КРУЧЕННЯ БАГАТОШАРОВОЇ ПЛИТИ
З ПРУЖНИМИ ЗВ'ЯЗКАМИ МІЖ ШАРАМИ**

На основі методу функцій податливості та з використанням інтегрального перетворення Ганкеля першого порядку запропоновано спосіб розв'язання задачі про кручення багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами. Для кожного із шарів введено дві допоміжні функції, пов'язані з трансформамами напружень і переміщень точок верхньої межі шару. Побудовано рекурентні співвідношення для допоміжних функцій і функції податливості сусідніх шарів плити. Для двошарової плити проаналізовано вплив коефіцієнтів пружних зв'язків, геометричних і механічних параметрів шарів на розподіл напружень у точках спільної межі шарів плити.

Вступ. Багатошарові плити входять до складу великої кількості інженерних конструкцій, тому визначення їх напружено-деформованого стану (НДС) викликає практичний і теоретичний інтерес. У більшості робіт, присвячених дослідженню їх деформації, розглядаються плити з ідеальним контактом між шарами. В реальних конструкціях між шарами може бути деякий проміжний клейовий шар, наявність якого необхідно враховувати при розрахунках на міцність шаруватих елементів конструкцій. У цій статті розглядаємо задачу про осесиметричне кручення багатошарової плити з пружними зв'язками між шарами. Згідно з моделлю [17], приймаємо, що між двома сусідніми шарами існують пружні зв'язки, якщо різниці переміщень точок верхньої межі нижнього шару і нижньої межі верхнього шару пропорційні відповідним напруженням у точках їх спільної межі. Аналіз робіт, присвячених осесиметричному крученню тіл, показав, що в основному розглядають контактні задачі про кручення півпростору, шару, багатошарової основи (задача Рейснера – Саґоці). Перші роботи стосовно дослідження деформації тіл, які перебувають в умовах осесиметричного кручення, присвячені крученню однорідного півпростору [23]. Ця задача залишається актуальною і на сьогодні [3, 4, 15, 22]. Задачі про кручення трансверсально-ізотропного та неоднорідного півпросторів розв'язано в роботах [16, 21, 24, 25]. Задача про кручення двошарового середовища досліджувалася у роботі [6]. Кручення багатошарової основи вперше розглянуто в роботі [8]. В [11] розв'язано задачу Рейснера – Саґоці для багатошарової основи з циліндричним включенням. У статтях [3, 4, 26] розв'язано задачі про кручення однорідного та неоднорідного півпросторів з різними типами покриттів. У монографії [19] розв'язано задачу про кручення ізотропної балки. Кручення ортотропного та неоднорідного шарів розглянуто в [7, 10]. Задачі про кручення шаруватої ортотропних, композитних та однорідних шаруватих плит розглядалися у працях [14, 18, 20, 27]. Антиплоска деформація пакету шарів з внутрішніми стрічковими та міжфазними включеннями вивчалась у монографії [12]. У статті [5] на основі методу функцій податливості [9] запропоновано спосіб розв'язання задачі про кручення півпростору періодичної структури. У [2] цим методом розв'язано задачу про осесиметричне кручення багатошарової основи, а в [1] отримано формули для визначення НДС двошарової плити, яка перебуває в умовах осесиметричного кручення, з пружними зв'язками між шарами. У пропонованій статті метод функцій податливості розповсюджено на багатошарові плити з пружними зв'язками між шарами.

1. Постановка задачі. Розглянемо плитку, яка складається з n невагомих пружних ізотропних шарів. Матеріал кожного шару k , $k = 1, \dots, n$, характеризуємо товщиною h_k і модулем зсуву μ_k . (Усі величини, які відно-

сяться до k -го шару, будемо відмічати нижнім індексом k). Між шарами плити діють пружні зв'язки. До верхньої і нижньої основ плити прикладено навантаження, яке викликає осесиметричне кручення (рис. 1). Необхідно визначити напруження і переміщення у шарах плити.

Пронумеруємо шари зверху вниз, починаючи з $k = 1$. У кожному шарі введемо циліндричну систему координат $O_k \rho z_k$, $k = 1, \dots, n$, з початком на верхній межі шару, як показано на рис. 1.

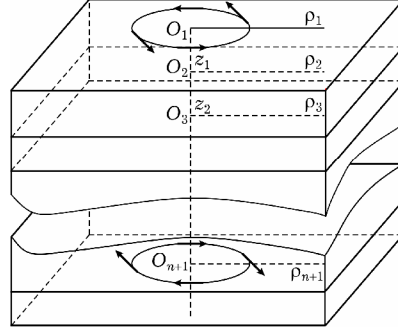


Рис. 1

Крайові умови на граничних поверхнях $z = 0$, $z = h_n$ запишемо як

$$\sigma_{z,1}(\rho, 0) = 0, \quad \tau_{\varphi z,1}(\rho, 0) = g(\rho), \quad (1)$$

$$\sigma_{z,n}(\rho, h_n) = 0, \quad \tau_{\varphi z,n}(\rho, h_n) = g(\rho). \quad (2)$$

Умови сумісної деформації шарів плити є такими:

$$u_{\varphi,k+1}(\rho, 0) = u_{\varphi,k}(\rho, h_k) + m_k \tau_{\varphi z,k}(\rho, h_k),$$

$$\tau_{\varphi z,k+1}(\rho, 0) = \tau_{\varphi z,k}(\rho, h_k), \quad (3)$$

де $m_k \geq 0$ – коефіцієнти пружних зв'язків, $k = 1, \dots, n$.

Введемо безрозмірні величини $\tilde{\rho}_k = \frac{\rho_k}{\ell}$, $\tilde{z}_k = \frac{z_k}{\ell}$, $\tilde{\tau}_{\varphi\rho,k} = \frac{\tau_{\varphi\rho,k}}{M}$, $\tilde{h}_k = \frac{h_k}{\ell}$, $\tilde{u}_{\varphi,k} = \frac{u_{\varphi,k}}{\ell}$, $\tilde{\mu}_k = \frac{\mu_k}{M}$, $\tilde{m}_k = \frac{m_k M}{\ell}$, $\tilde{\tau}_{\varphi z,k} = \frac{\tau_{\varphi z,k}}{M}$, $\tilde{\tau}_{\varphi\rho,k} = \frac{\tau_{\varphi\rho,k}}{M}$, $\tilde{g} = \frac{g}{M}$, де ℓ , M – характерні величини ($[\ell] = \text{м}$, $[M] = \text{Па}$). У подальшому символ «тильда» опускаємо. Всі міркування і розрахунки проводимо з безрозмірними величинами.

2. Метод розв'язування. Задача про визначення напружено-деформованого стану ізотропного шару, який скручується дотичними напруженнями, прикладеними до площин $z = 0$ та $z = h$, що обмежують шар, зводиться до розв'язання диференціального рівняння [13]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

де $u(\rho, z) = u_{\varphi}(\rho, z)$.

Ненульові компоненти напружено-деформованого стану пов'язані з функцією $u(\rho, z)$ співвідношеннями:

$$\tau_{\varphi\rho} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho} \right), \quad \tau_{\varphi z} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Для розв'язування задачі використаємо перетворення Ганкеля першого порядку:

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} \rho f(\rho) J_1(p\rho) d\rho, \quad f(\rho) = \int_0^{\infty} p \bar{f}(p) J_1(p\rho) dp.$$

У просторі трансформант компоненти напружено-деформованого стану окремого шару подамо у вигляді лінійних комбінацій допоміжних функцій $\gamma = \gamma(p)$ і $\delta = \delta(p)$ [5], зв'язаних з переміщеннями і напруженнями на верхній межі плити:

$$\bar{u}(p, z) = \frac{1}{\mu} (\gamma \operatorname{ch} pz + \delta \operatorname{sh} pz), \quad \bar{\tau}_{\varphi z}(p, z) = p(\gamma \operatorname{sh} pz + \delta \operatorname{ch} pz), \quad (4)$$

$$\gamma = \mu \bar{u}(p, 0), \quad \delta = \frac{1}{p} \bar{\tau}_{\varphi z}(p, 0). \quad (5)$$

Побудуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують допоміжні функції сусідніх шарів. Із урахуванням (4) і (5) запишемо крайові умови (1), (2) та умови сумісної деформації шарів плити (3) у просторі трансформант Ганкеля:

$$\delta_1 = \frac{1}{p} \bar{g}(p), \quad \bar{\tau}_{\varphi z, n+1} = \bar{g}(p),$$

$$\gamma_{k+1} = \mu_{k+1} \bar{u}_k(p, h_k) + \mu_{k+1} m_k \bar{\tau}_{\varphi z, k}(p, h_k),$$

$$\delta_{k+1} = \frac{1}{p} \bar{\tau}_{\varphi z, k}(p, h_k).$$

Застосуємо формули (4), (5) до лівих частин двох останніх співвідношень і подамо їх праві частини у вигляді лінійних комбінацій допоміжних функцій:

$$\gamma_{k+1} = \left(\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} C_k + \mu_{k+1} m_k p S_k \right) \gamma_k + \left(\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} S_k + \mu_{k+1} m_k p C_k \right) \delta_k, \quad (6)$$

$$\delta_{k+1} = S_k \gamma_k + C_k \delta_k, \quad (7)$$

де $C_k = \operatorname{ch} p_k$, $S_k = \operatorname{sh} p_k$, $p_k = p h_k$.

Введемо фіктивний шар з номером $n+1$. Вважатимемо, що контакт між n -м та $(n+1)$ -м шарами ідеальний ($m_{n+1} = 0$). Запишемо умови на межі n -го та $(n+1)$ -го шарів:

$$\delta_{n+1} = \frac{1}{p} \bar{\tau}_{\varphi z, n}(p, h_n), \quad (8)$$

де $\delta_{n+1} = \frac{1}{p} \bar{g}(p)$.

Виразимо δ_{n+1} послідовно через δ_n та γ_n , потім через γ_{n-1} та δ_{n-1} і аж до γ_1 та δ_1 :

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} = S_n \gamma_n + C_n \delta_n = & \left(\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} C_{n-1} S_n + \mu_n m_{n-1} p S_{n-1} S_n + C_n S_{n-1} \right) \gamma_{n-1} + \\ & + \left(\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} S_{n-1} S_n + \mu_n m_{n-1} p C_{n-1} S_n + C_n C_{n-1} \right) \delta_{n-1} = \dots \quad (9) \end{aligned}$$

Зі співвідношень (9) випливає, що γ_k можемо записати у вигляді лінійної комбінації функцій δ_k і δ_{n+1} :

$$\gamma_k = -A_k \delta_k + B_k \delta_{n+1}, \quad (10)$$

де A_k та B_k – функції податливості k -го шару багат шарової плити.

Побудуємо рекурентні співвідношення, які пов'язують функції податливості сусідніх шарів плити. Із формул (7) та (10) при $k = n$ отримуємо

$$\begin{aligned} \gamma_n = -A_n \delta_n + B_n \delta_{n+1}, \quad \gamma_n = & -\frac{C_n}{S_n} \delta_n + \frac{1}{S_n} \delta_{n+1}, \\ A_n = \frac{C_n}{S_n}, \quad B_n = & \frac{1}{S_n}. \quad (11) \end{aligned}$$

Зі співвідношень (6) та (10) одержуємо

$$\begin{aligned}
\gamma_{k+1} &= \left(\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} C_k + \mu_{k+1} m_k p S_k \right) \gamma_k + \left(\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} S_k + \mu_{k+1} m_k p C_k \right) \delta_k = \\
&= \left(\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} C_k + \mu_{k+1} m_k p S_k \right) (-A_k \delta_k + B_k \delta_{n+1}) + \\
&+ \left(\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} S_k + \mu_{k+1} m_k p C_k \right) \delta_k = \left(\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} S_k + \mu_{k+1} m_k p C_k - \right. \\
&- A_k \left. \left(\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} C_k + \mu_{k+1} m_k p S_k \right) \right) \delta_k + \\
&+ \left(\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} C_k + \mu_{k+1} m_k p S_k \right) B_k \delta_{n+1}. \tag{12}
\end{aligned}$$

З іншого боку, зі співвідношень (7) і (10) отримуємо

$$\begin{aligned}
\gamma_{k+1} &= -A_{k+1} \delta_{k+1} + B_{k+1} \delta_{n+1} = -A_{k+1} (S_k \gamma_k + C_k \delta_k) + B_{k+1} \delta_{n+1} = \\
&= -A_{k+1} (S_k (-A_k \delta_k + B_k \delta_{n+1}) + C_k \delta_k) + B_{k+1} \delta_{n+1} = \\
&= (A_{k+1} S_k A_k - A_{k+1} C_k) \delta_k + (B_{k+1} - A_{k+1} B_k S_k) \delta_{n+1}. \tag{13}
\end{aligned}$$

Порівнявши вирази (12) і (13), запишемо рекурентні співвідношення для обчислення функцій податливості:

$$A_k = \frac{A_{k+1} C_k + \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} S_k + \mu_{k+1} m_k p C_k}{A_{k+1} S_k + \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} C_k + \mu_{k+1} m_k p S_k} = \frac{T_k + \mu_k m_k p + \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} A_{k+1}}{1 + \mu_k m_k p T_k + \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} A_{k+1} T_k}, \tag{14}$$

$$B_k = \frac{\frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} B_{k+1}}{C_k + \mu_k m_k p S_k + \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} A_{k+1} S_k}, \tag{15}$$

де $T_k = \text{th} p_k$, $k = 1, \dots, n-1$.

Якщо функція податливості B_n є нульовою, то рекурентні співвідношення (14), (15) збігаються із рекурентними співвідношеннями для функцій податливості багат шарової основи з пружними зв'язками між шарами, побудованими раніше в [2]. При $n = 2$ отримуємо формули, побудовані в [1] для двошарової плити з пружними зв'язками між шарами. Таким чином, одержані результати можна вважати узагальненням праць [1, 2].

Визначивши матриці податливості за формулами (11), (14) і (15), знаходимо допоміжні функції δ_k за формулами (7), які з урахуванням співвідношень (10) подамо у такому вигляді:

$$\delta_{k+1} = (C_k - S_k A_k) \delta_k + S_k B_k \delta_{n+1}. \tag{16}$$

Функції δ_1 і δ_{n+1} знаходимо з крайових умов (1), (2). Функції γ_k знаходимо зі співвідношень (10). Підставляємо знайдені допоміжні функції у вирази для трансформант напружень і переміщень та застосовуємо до них обернене перетворення Ганкеля.

Запропонований спосіб визначення НДС багат шарової плити можна застосовувати до багат шарових плит з будь-якою скінченною кількістю шарів.

3. Числові результати та висновки. Обчислення проведено для двошарової плити, яка знаходиться під дією навантажень, які викликають осесиметричне кручення. Крайові умови (1), (2) задаємо у вигляді

$$\sigma_{z,1}(\rho, 0) = 0, \quad \tau_{\varphi z,1}(\rho, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & 0 < \rho < a - \varepsilon, \\ \frac{g}{4\pi a \varepsilon}, & a - \varepsilon < \rho < a + \varepsilon, \end{cases}$$

$$\sigma_{z,2}(\rho, h_2) = 0, \quad \tau_{\varphi z,2}(\rho, h_2) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & 0 < \rho < a - \varepsilon, \\ \frac{g}{4\pi a \varepsilon}, & a - \varepsilon < \rho < a + \varepsilon. \end{cases}$$

Із крайових умов визначаємо, що

$$\delta_1 = \delta_2 = g \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{\rho J_1(\rho r)}{\varepsilon} d\rho = \frac{g J_1(a r)}{2\pi r}.$$

Обчислення розподілу радіальних напружень $\tau_{\varphi z,1}$ на стику шарів двошарової плити виконано при $g = 1$, $a = 1$. На рис. 2 наведено графіки $\tau_{\varphi z,1}$ при $\mu_1/\mu_2 = 1$ і $h_1/h_2 = 1$ для різних значень коефіцієнта пружних зв'язків між шарами плити. Криві 1-4 відповідають значенням $m_1 = 0, 0.1, 1.0, 10$. Бачимо, що збільшення m_1 призводить до зменшення напружень $\tau_{\varphi z,1}(\rho, h_1)$.

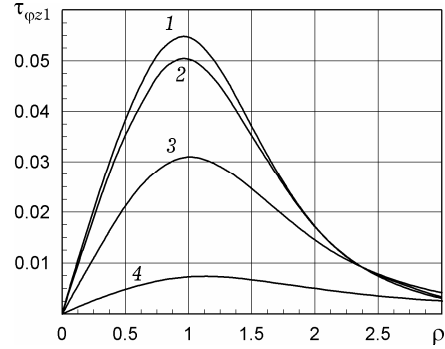


Рис. 2

Графіки на рис. 3 і рис. 4 ілюструють відповідно вплив зміни товщини шарів плити h_1/h_2 (криві 1-6) та модуль зсуву (криві 1, 2, 7-10) на розподіл напружень $\tau_{\varphi z,1}(\rho, h_1)$. Механічні та геометричні характеристики шарів плит, для яких проведено розрахунки, наведено у табл. 1.

Таблиця 1

Номер кривої	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m_1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
h_1/h_2	1	1	1/2	1/2	2	2	1	1	1	1
μ_1/μ_2	1	1	1	1	1	1	1/2	1/2	2	2

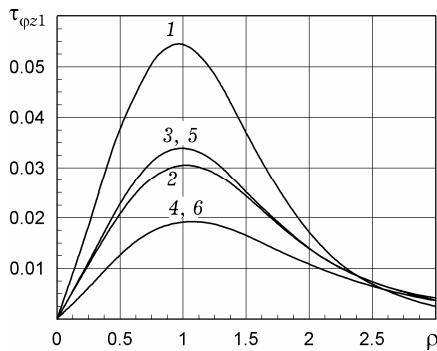


Рис. 3

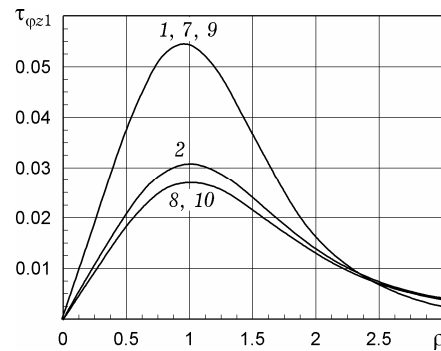


Рис. 4

Аналіз графіків, наведених на рис. 3 і рис. 4, засвідчує, що збільшення товщини та модуля зсуву верхнього або нижнього шару плити призводить до зменшення напружень $\tau_{\varphi z,1}$ як при ідеальному контакті шарів, так і при

наявності пружних зв'язків між шарами плити. На рис. 3 криві 3, 5 та 4, 6 співпадають, оскільки навантаження на плиту є симетричним. Із графіків, зображених на рис. 4, бачимо, що зміна модулів зсуву шарів плити (криві 7, 9 або 8, 10) не впливає на розподіл напружень $\tau_{\varphi z,1}(\rho, h_1)$, що також пояснюється тим, що навантаження на плиту є симетричним. Усі отримані механічні ефекти не суперечать отриманим у [2] для багат шарової основи з пружними зв'язками між шарами та узгоджуються із очікуваною фізичною картиною. У подальшому планується дослідити НДС плит з більшою кількістю шарів і при інших видах навантажень.

Висновки. Метод функцій податливості застосовано до задачі про осесиметричне кручення багат шарової плити з пружними зв'язками між шарами. У просторі трансформант Ганкеля побудовано рекурентні співвідношення, які пов'язують функції податливості сусідніх шарів плити. Для двошарової плити проаналізовано вплив коефіцієнтів пружних зв'язків, товщин шарів та їх модулів зсуву на розподіл радіальних напружень на стику шарів.

1. Антоненко Н. М. Осесиметричний скрут двошарової плити з пружними зв'язками між шарами // Конф. молодих учених «Підстригачівські читання-2015», 26–28 травня 2015. – Львів, 2015.
– <http://iapmm.lviv.ua/chyt2015/theses/Antonenko.pdf>.
2. Антоненко Н. Н., Величко І. Г. Задача о кручении многослойного основания с упругими связями между слоями // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2014. – № 1. – С. 127–131.
3. Васильев А. С., Васильева М. Е., Садырин Е. В. Кручение упругого полупространства с многослойным покрытием периодической структуры // Вестн. Донск. гос. техн. ун-та. – 2013. – № 5/6 (74). – С. 6–13.
4. Васильев А. С., Садырин Е. В., Федотов И. А. Контактная задача о кручении круглым штампом трансверсально-изотропного упругого полупространства с неоднородным трансверсально-изотропным покрытием // Вестн. Донск. гос. техн. ун-та. – 2013. – № 1-2 (70-71). – С. 25–34.
5. Величко І. Г., Стеганцев С. В. Задача про скрут півпростору періодичної структури // Вісн. Запоріз. держ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. Біолог. науки. – 2000. – № 2. – С. 32–37.
6. Грилицький Д. В. Кручення двошарового пружного середоща // Прикл. механіка. – 1961. – 7, № 1. – С. 89–95.
7. Дащенко А. Ф., Кольбихин Ю. Д. Кручение ортотропно-неоднородного слоя двумя штампами // Прикл. механика. – 1976. – 12, № 3. – С. 71–77.
Te same: Dashchenko A. F., Kolybikhin Yu. D. Torsion of an orthotropic non-homogeneous layer by two punches // Soviet Appl. Mech. – 1976. – 12, No. 3. – P. 269–274.
8. Петришин В. И. Кручение кольцевым штампом многослойного основания // Устойчивость и прочность элементов конструкций. – Днепропетровск: Днепропетр. гос. ун-т, 1988. – С. 96–99.
9. Приварников А. К. Решение граничных задач теории упругости для многослойных оснований: Метод. Разработка. – Днепропетровск: Днепропетр. гос. ун-т, 1976. – 60 с.
10. Пуру А. Э. К решению осесимметричной задачи кручения неоднородного слоя // Прикл. механика. – 1982. – 18, № 12. – С. 31–35.
Te same: Puro A. É. Solution of the axisymmetric problem of the torsion of an inhomogeneous layer // Soviet Appl. Mech. – 1982. – 18, No. 12. – P. 1071–1075.
11. Снитсер А. Р. Задача Рейснера–Сагоци для многослойного основания с цилиндрической полостью // Динам. системы. – 1994. – Вып. 13. – С. 55–61.
Te same: Snitser A. R. The Reissner–Sagoci problem for a multilayer base with a cylindrical cavity // J. Math. Sci. – 1996. – 82, No. 3. – P. 3439–3443.
12. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
13. Эйшинский А. М. Кручение анизотропных и неоднородных тел. – Днепропетровск: Полиграфист, 1999. – 389 с.

14. Abbès B., Guo Y. Q. Analytic homogenization for torsion of orthotropic sandwich plates: Application to corrugated cardboard // Compos. Struct. – 2010. – **92**, No. 3. – P. 699–706.
15. Brzoza A., Pauk V. Torsion of rough elastic half-space by rigid punch // Arch. Appl. Mech. – 2008. – **78**, No. 7. – P. 531–542.
16. Dhawan G. K. A mixed boundary value problem of a transversely-isotropic half-space under torsion by a flat annular rigid stamp // Acta Mech. – 1981. – **41**, No. 3-4. – P. 289–297.
17. Jones J. P., Whittier J. S. Waves at a flexibly bonded interface // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1967. – **34**, No. 4. – P. 905–909.
18. Li X., Li G., Wang C. H., You M. Optimum design of composite sandwich structures subjected to combined torsion and bending loads // Appl. Compos. Mater. – 2012. – **19**, No. 3-4. – P. 315–331.
19. Milne-Thomson L. M. Antiplane elastic systems. – Berlin: Springer, 1962. – viii+266 p.
20. Nikopour H., Selvadurai A. P. S. Torsion of a layered composite strip // Compos. Struct. – 2013. – **95**. – P. 1–4.
21. Rahimian M., Ghorbani-Tanha A. K., Eskandari-Ghadi M. The Reissner–Sagoci problem for a transversely isotropic half-space // Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech. – 2006. – **30**, No. 11. – P. 1063–1074.
22. Rahman M. The Reissner–Sagoci problem for a half-space under buried torsional forces // Int. J. Solids Struct. – 2000. – **37**, No. 8. – P. 1119–1132.
23. Reissner E., Sagoci H. F. Forced torsional oscillations of an elastic half-space. I // J. Appl. Phys. – 1944. – **15**, No. 9. – P. 652–654.
24. Selvadurai A. P. S., Singh B. M., Vrbik J. A Reissner–Sagoci problem for a non-homogeneous elastic solid // J. Elasticity. – 1986. – **16**, No. 4. – P. 383–391.
25. Tie-Jun Liu, Yue-Sheng Wang. Reissner–Sagoci problem for functionally graded materials with arbitrary spatial variation of material properties // Mech. Res. Commun. – 2009. – **36**, No. 3. – P. 322–329.
26. Vasiliev A., Sevostianov I., Aizikovich S., Jeng Y.-R. Torsion of a punch attached to transversely-isotropic half-space with functionally graded coating // Int. J. Eng. Sci. – 2012. – **61**. – P. 24–35.
27. Whitney J. M., Kurtz R. D. Analysis of orthotropic laminated plates subjected to torsional loading // Compos. Eng. – 1993. – **3**, No. 1. – P. 83–97.

ЗАДАЧА ОБ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ КРУЧЕНИИ МНОГОСЛОЙНОЙ ПЛИТЫ С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ МЕЖДУ СЛОЯМИ

На основе метода функций податливости и с использованием преобразования Ханкеля первого порядка предложен способ решения задачи о кручении многослойной плиты с упругими связями между слоями. Для каждого из слоев введены две вспомогательные функции, связанные с трансформантами напряжений и перемещений в точках верхней границы слоя. Построены рекуррентные соотношения для вспомогательных функций и функции податливости соседних слоев плиты. Для двухслойной плиты проанализировано влияние коэффициентов упругих связей, геометрических и механических параметров слоев на распределение напряжений в точках общей границы слоев плиты.

PROBLEM ON AXISYMMETRIC TORSION OF A MULTILAYER PLATE WITH ELASTIC BONDS BETWEEN LAYERS

Based on the method of compliance functions and with using Hankel transform of the first order a procedure of solving the problem of torsion of a multilayer plate with elastic bonds between the layers is proposed. Two auxiliary functions related with transformants of stresses and displacements in the points of the upper boundary of the layer are introduced for each of the layers. The recurrence relations binding auxiliary functions and compliance functions of neighboring layers of plates are constructed. For two-layer plate the influence of elastic bonds coefficients, geometrical and mechanical parameters of the layers on the stress distribution at points of common boundary layers of the plate is analyzed.

Запорізьк. нац. техн. ун-т, Запоріжжя

Одержано
27.06.15