УДК 539.377

М. М. Николишин[1], У. В. Жидик[2]

ВАРІАЦІЙНІ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗАНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ НЕОДНОРІДНИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК

Для взаємозв'язаної термопружності неоднорідних анізотропних оболонок сформульовано загальну та часткові варіаційні задачі, які є аналогами варіаційних задач Ху – Васідзу, віртуальної енергії, додаткової енергії і Біо в лінійній теорії пружності. Варіаційним шляхом доведено основну енергетичну теорему, а також показано, що варіаційні задачі допускають подання у формі рівнянь руху Лагранжа для систем з розсіюванням енергії.

Пружні оболонки як найбільш розповсюджені елементи сучасних конструкцій часто експлуатуються в складних умовах, що вимагає уточнених методів їхнього розрахунку: врахування взаємозв'язку полів різної природи, неоднорідності та анізотропії матеріалу в поперечному напрямку, початкових деформацій, інерційних членів тощо. Для виведення основних рівнянь, що описують поведінку таких оболонок, і розвитку методів розрахунку ефективно може бути використано апарат варіаційного числення [1, 2].

Для тривимірної спряженої термопружності варіаційні методи успішно використовувалися багатьма авторами (див., наприклад, [1, 4, 7, 9, 10]). Для термопружних оболонок ці методи розвинуті значно менше [6, 8]. Для неоднорідних оболонок вони практично відсутні.

У цій роботі сформульовано загальний і часткові варіаційні принципи взаємозв'язаної термопружності неоднорідних анізотропних оболонок із початковими деформаціями, які використано для виведення основних рівнянь і розвитку методів їх розв'язування.

Розглянемо оболонку сталої товщини $2h$, точки простору якої віднесені до нормальної криволінійної координатної системи $\mathbf{x} = \{x^\alpha, z\}$, $\alpha = 1, 2$, де $z = 0$ позначає серединну поверхню G оболонки, обмежену контуром g. Вважатимемо, що матеріал оболонки неоднорідний та анізотропний з однією площиною пружної і теплової симетрії, яка паралельна серединній поверхні, а приріст температури $t(\mathbf{x}, \tau)$ і вектор переміщень $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \tau)$ точок оболонки є лінійними функціями від поперечної координати z:

$$t(\mathbf{x}, \tau) = T_1(x^\alpha, \tau) + \frac{z}{h} T_2(x^\alpha, \tau), \qquad (1)$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{u}(x^\alpha, \tau) + z\,\boldsymbol{\gamma}(x^\alpha, \tau). \qquad (2)$$

Тоді компоненти деформації $e_{\alpha\beta}, e_{\alpha 3}, e_{33}$ в довільній точці оболонки можна виразити через компоненти деформації серединної поверхні $\varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha 3}, \varepsilon_{33}$, $\text{æ}_{\alpha\beta}$, $\text{æ}_{\alpha 3}$ такими формулами:

$$2e_{\alpha\beta} = \mu_\alpha^\delta(\varepsilon_{\delta\beta} + z\text{æ}_{\delta\beta}) + \mu_\beta^\delta(\varepsilon_{\delta\alpha} + z\text{æ}_{\delta\alpha}),$$
$$2e_{\alpha 3} = \varepsilon_{\alpha 3} + z\text{æ}_{\alpha 3}, \qquad e_{33} = \varepsilon_{33}, \qquad (3)$$

де μ_α^δ – так звані тензори оболонки [11].

Слід відмітити, що у випадку врахування деформацій, викликаних довільними фізико-хімічними процесами (назвемо їх початковими деформаціями або дисторсіями [5]), компоненти повної деформації, що входять у співвідношення (3), повинні бути подані як сума компонентів пружної деформації, які задовольняють фізичні співвідношення, і компонентів початкової деформації [5].

Нехай у початковий момент часу оболонка знаходиться в природному стані з температурою T_0. З моменту часу $\tau > 0$ під дією зовнішнього поверхневого силового навантаження $\mathbf{q} = \{q^\alpha, q^3\}$, $\mathbf{m} = \{m^\alpha, m^3\}$, початкових деформацій $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \{\varepsilon^0_{\alpha\beta}, \varepsilon^0_{\alpha3}, \varepsilon^0_{33}\}$, $\boldsymbol{\ae}^0 = \{\ae^0_{\alpha\beta}, \ae^0_{\alpha3}\}$, конвективного теплообміну через поверхні $z = \pm h$, внутрішніх джерел тепла $W^t_{(n)}$, $n = 1, 2$, а також контурних силових і температурних факторів в оболонці виникнуть: поле узагальнених переміщень $\mathbf{u} = \{u^\alpha, u^3\}$, $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma^\alpha, \gamma^3\}$ і температурне поле $T_{(n)}$, зусилля-моменти $\mathbf{N} = \{N^{\alpha\beta}, N^{\alpha3}, N^{33}\}$, $\mathbf{M} = \{M^{\alpha\beta}, M^{\alpha3}\}$ і деформації $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha3}, \varepsilon_{33},\}$, $\boldsymbol{\ae} = \{\ae_{\alpha\beta}, \ae_{\alpha3}\}$, вектори потоків тепла $\mathbf{Q}_{(n)} = \{Q^\alpha_{(n)}, Q^3_{(n)}\}$ та ентропії $\mathbf{H}_{(n)} = \{H^\alpha_{(n)}, H^3_{(n)}\}$. Перераховані величини віднесені до серединної поверхні і тому є функціями від координат x^α і часу τ. (У роботі використовуємо загальноприйняті в теорії оболонок позначення [6, 11].) Якщо вважати, що ці функції мають необхідні властивості гладкості, то вони повинні задовольняти відповідну систему диференціальних рівнянь і відповідні граничні умови, які виведемо варіаційним шляхом.

Загальний варіаційний принцип. Підставивши у функціонал тривимірної термопружності неоднорідного анізотропного тіла у формі Ху – Васідзу [2, 9] співвідношення (1)–(3) і виконавши інтегрування за координатою z, одержимо відповідний двовимірний функціонал теорії оболонок

$$
\begin{aligned}
I = \iint_G \Bigg\{ & F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{\ae}, \boldsymbol{\ae}^0, T_{(n)}) - N^{\beta\alpha}\left[\varepsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha - 2b_{\alpha\beta})\right] - \\
& - M^{\alpha3}(\ae_{\alpha3} - \nabla_\alpha \gamma_3) - N^{\alpha3}\left[\varepsilon_{\alpha3} - (\gamma_\alpha + \nabla_\alpha u_3 + b^\nu_\alpha u_\nu)\right] - \\
& - M^{\beta\alpha}\left[\ae_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\nabla_\alpha \gamma_\beta + \nabla_\beta \gamma_\alpha - 2b_{\alpha\beta})\right] - N^{33}(\varepsilon_{33} - \gamma_3) - \\
& - (q^i u_i + m^i \gamma_i) + \frac{1}{2} p^2 (I^i_N u_i + I^i_M \gamma_i) + \sum_{n=1}^{2}\left[\frac{2h}{2n-1} H^\alpha_{(n)} \nabla_\alpha T_{(n)} + \right. \\
& \left. + W'_{(n)} \frac{T_{(n)}}{T_0}\right] + 2T_{(2)} H^3_{(1)} + p\frac{T_0}{2}\sum_{n,m=1}^{2}\left[k^{(n,m)}_{\alpha\beta} H^\alpha_{(n)} H^\beta_{(m)} + \right. \\
& \left. + k^{(n,m)}_{33} H^3_{(n)} H^3_{(m)}\right] + p\frac{T_0}{2}\left[\frac{(H^+_3)^2}{\alpha^+_z} + \frac{(H^-_3)^2}{\alpha^-_z}\right] + H^+_3 t^+_c - H^-_3 t^-_c - \\
& - \sum_{n=1}^{2} T_{(n)}\left[H^+_3 - (-1)^n H^-_3\right]\Bigg\} dG - \int_{g_u}\left[N^i(u_i - \tilde{u}_i) + M^i(\gamma_i - \tilde{\gamma}_i)\right] dg - \\
& - \int_{g_N}(\tilde{N}^i u_i + \tilde{M}^i \gamma_i)\, dg + \sum_{n=1}^{2}\frac{2h}{2n-1}\Bigg\{\int_{g_s}\left(\frac{T_0}{2\alpha_g} p H^\alpha_{(n)} \nu_\alpha + \right. \\
& \left. + T^c_{(n)} - T_{(n)}\right) H^\alpha_{(n)} \nu_\alpha dg - \int_{g_t} T_{(n)} \tilde{H}^\alpha_{(n)} \nu_\alpha dg\Bigg\}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Тут вільна енергія F, віднесена до одиниці площі серединної поверхні, визначається за формулою

$$F(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{æ}, \boldsymbol{æ}^0, T_{(n)}) =$$

$$= V_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{æ}, \boldsymbol{æ}^0) - \Theta(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{æ}, \boldsymbol{æ}^0, T_{(n)}) - \frac{1}{2T_0} \sum_{n,m=1}^{2} C^e_{(n,m)} T_{(n)} T_{(m)} , \quad (5)$$

де

$$V_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{æ}, \boldsymbol{æ}^0) =$$

$$= \frac{1}{2}\big[D^{\alpha\beta\delta\gamma}_{(1)}(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^0_{\alpha\beta})(\varepsilon_{\delta\gamma} - \varepsilon^0_{\delta\gamma}) + D^{\alpha 3\delta 3}_{(1)}(\varepsilon_{\alpha 3} - \varepsilon^0_{\alpha 3})(\varepsilon_{\delta 3} - \varepsilon^0_{\delta 3}) +$$

$$+ 2D^{\alpha\beta 33}_{(1)}(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^0_{\alpha\beta})(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}) + D^{3333}_{(1)}(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33})(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}) +$$

$$+ 2D^{\alpha\beta\delta\gamma}_{(2)}(\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon^0_{\alpha\beta})(æ_{\delta\gamma} - æ^0_{\delta\gamma}) + 2D^{\alpha 3\delta 3}_{(2)}(\varepsilon_{\alpha 3} - \varepsilon^0_{\alpha 3})(æ_{\delta 3} - æ^0_{\delta 3}) +$$

$$+ 2D^{\alpha\beta 33}_{(2)}(æ_{\alpha\beta} - æ^0_{\alpha\beta})(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}) + D^{\alpha\beta\delta\gamma}_{(3)}(æ_{\alpha\beta} - æ^0_{\alpha\beta})(æ_{\delta\gamma} - æ^0_{\delta\gamma}) +$$

$$+ D^{\alpha 3\delta 3}_{(3)}(æ_{\alpha 3} - æ^0_{\alpha 3})(æ_{\delta 3} - æ^0_{\delta 3})\big], \quad (6)$$

$$\Theta(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^0, \boldsymbol{æ}, \boldsymbol{æ}^0, T_{(n)}) =$$

$$= \sum_{n=1}^{2}\big[\beta^{\alpha\delta}_{(n)}(\varepsilon_{\alpha\delta} - \varepsilon^0_{\alpha\delta}) + \beta^{33}_{(n)}(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}) + h\beta^{\alpha\delta}_{(n+1)}(æ_{\alpha\delta} - æ^0_{\alpha\delta})\big] T_{(n)} . \quad (7)$$

Інші позначення такі:

$$\{T_{(n)},\, T^c_{(n)},\, H^i_{(n)}\} = \frac{2n-1}{2h}\int_{-h}^{h}\{t,\, t^c_g,\, s^i\}\left(\frac{z}{h}\right)^{n-1} dz, \qquad H^{\pm}_3 = s^3\big|_{z=\pm h},$$

$$\{k^{(n,m)}_{ij},\, \lambda^{ij}_{(n,m)},\, C^e_{(n,m)}\} = \int_{-h}^{h}\{k_{ij},\, \lambda^{ij},\, c_e\}\left(\frac{z}{h}\right)^{n+m-2} dz ,$$

$$\{\beta^{ij}_{(n)},\, W'_{(n)}\} = \int_{-h}^{h}\{\beta^{ij},\, w'_t\}\left(\frac{z}{h}\right)^{n-1} dz, \qquad n, m = 1, 2, \qquad p = \frac{d}{d\tau},$$

$$I^i_N = \rho_{(1)}u^i + \rho_{(2)}\gamma^i, \qquad I^i_M = \rho_{(2)}u^i + \rho_{(3)}\gamma^i, \qquad \beta^{\nu\delta} = C^{\nu\delta\gamma\tau}\alpha^t_{\gamma\tau} + C^{\nu\delta 33}\alpha^t_{33},$$

$$\beta^{33} = C^{33\gamma\tau}\alpha^t_{\gamma\tau} + C^{3333}\alpha^t_{33}, \qquad \rho_{(r)} = \int_{-h}^{h}\mu\rho z^{r-1}\, dz ,$$

$$D^{ijk\ell}_{(r)} = \int_{-h}^{h} C^{ipkq}\delta^j_a\delta^\ell_b\mu\,\mu^a_p\,\mu^b_q\, z^{r-1}\, dz, \qquad D^{ijk\ell}_{(r)} = D^{k\ell ij}_{(r)},$$

$$D^{\alpha\beta\lambda 3}_{(r)} = D^{333\alpha}_{(r)} = 0, \qquad r = 1, 2, 3, \qquad \{N^{ij},\, M^{ij}\} = \int_{-h}^{h}\mu\,\sigma^{ab}\delta^i_a\,\mu^j_b\{1,\, z\}\, dz ,$$

$$\{q^i,\, m^i\} = \int_{-h}^{h}\mu\,\mu^i_a F^a\{1,\, z\}\, dz + \big[\mu\,\mu^i_a\sigma^{a3}\{1,\, z\}\big]\Big|_{-h}^{+h},$$

$$N^i = N^{\alpha i}\nu_\alpha, \qquad M^i = M^{\alpha i}\nu_\alpha, \qquad \mu = \det(\mu^\beta_\alpha), \qquad \mu^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha - z b^\beta_\alpha,$$

σ^{ij} – компоненти тензора напружень; F^α – компоненти вектора масових сил; $C^{ijk\ell}(\mathbf{x}), \alpha^t_{kl}(\mathbf{x}), \lambda^{ij}(\mathbf{x}), k_{ij}(\mathbf{x})$ – компоненти тензорів пружних сталих, лінійного розширення, теплопровідності та теплового опору анізотропного тіла відповідно; $c_e(\mathbf{x})$ – питома теплоємність; $\rho(\mathbf{x})$ – густина матеріалу; $s^i(\mathbf{x}, \tau)$ – компоненти вектора потоку ентропії; $\dot{w}'_t(\mathbf{x}, \tau) = w_t(\mathbf{x}, \tau)$ – інтенсивність теплових джерел; $t^{\pm}_c$ і t^c_g – значення температури середовищ, які омивають поверхні $z=\pm h$ і контур g; $\alpha_z^{\pm}$ і α_g – коефіцієнти тепловіддачі з цих поверхонь і контуру; ν_α – компоненти одиничного вектора нормалі до контуру; ∇_α – символ коваріантної похідної в метриці серединної поверхні; b_α^β – поверхневий тензор кривини; δ_i^j – символ Кронекера; індекси, позначені грецькими буквами, приймають значення 1, 2, а латинськими – 1, 2, 3; індекси n і m у дужках не мають тензорного характеру і приймають значення 1, 2; використовується звичайне правило підсумовування за індексами, що повторюються; крапкою зверху позначено частинну похідну за часом.

Стосовно функціонала (4) справджується така

Теорема. *Рівняннями Ейлера варіаційної задачі* $\delta I=0$ *є повна система диференціальних рівнянь теорії взаємозв'язаної термопружності неоднорідних анізотропних оболонок, а природними (ейлеровими) граничними умовами – механічні та температурні умови на краю оболонки.*

Для доведення теореми вважатимемо, що величини $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{æ}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$, $T_{(n)}$, $H^i_{(n)}$, $H_3^{\pm}$ є незалежними. Далі, обчислюючи їх варіації, які припускаємо довільними, одержимо основні рівняння розглядуваних оболонок [3]

– рівняння руху:

$$\nabla_\beta N^{\beta\alpha}-b_\beta^\alpha N^{\beta 3}+q^\alpha-\ddot I_N^\alpha=0,\qquad \nabla_\beta N^{\beta 3}+b_{\alpha\beta}N^{\beta\alpha}+q^3-\ddot I_N^3=0,$$

$$\nabla_\beta M^{\beta\alpha}-N^{\alpha 3}+m^\alpha-\ddot I_M^\alpha=0,\qquad \nabla_\beta M^{\beta 3}+b_{\alpha\beta}M^{\beta\alpha}-N^{33}+m^3-\ddot I_M^3=0;\qquad (8)$$

– геометричні співвідношення:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=\frac{\nabla_\beta u_\alpha+\nabla_\alpha u_\beta}{2}-b_{\alpha\beta}u_3,\qquad \varepsilon_{\alpha 3}=\gamma_\alpha+\nabla_\alpha u_3+b_\alpha^\beta u_\beta,$$

$$æ_{\alpha\beta}=\frac{\nabla_\beta\gamma_\alpha+\nabla_\alpha\gamma_\beta}{2}-b_{\alpha\beta}\gamma_3,\qquad æ_{\alpha 3}=\nabla_\alpha\gamma_3,\qquad \varepsilon_{33}=\gamma_3;\qquad (9)$$

– фізичні співвідношення:

$$N^{\nu\alpha}=D_{(1)}^{\alpha\nu\delta\gamma}(\varepsilon_{\delta\gamma}-\varepsilon^0_{\delta\gamma})+D_{(2)}^{\alpha\nu\delta\gamma}(æ_{\delta\gamma}-æ^0_{\delta\gamma})+D_{(1)}^{\alpha\nu 33}(\varepsilon_{33}-\varepsilon^0_{33})-\sum_{m=1}^{2}\beta^{\nu\alpha}_{(m)}T_{(m)},$$

$$N^{33}=D_{(1)}^{33\delta\gamma}(\varepsilon_{\delta\gamma}-\varepsilon^0_{\delta\gamma})+D_{(2)}^{33\delta\gamma}(æ_{\delta\gamma}-æ^0_{\delta\gamma})+D_{(1)}^{3333}(\varepsilon_{33}-\varepsilon^0_{33})-\sum_{m=1}^{2}\beta^{33}_{(m)}T_{(m)},$$

$$M^{\nu\alpha}=D_{(2)}^{\alpha\nu\delta\gamma}(\varepsilon_{\delta\gamma}-\varepsilon^0_{\delta\gamma})+D_{(3)}^{\alpha\nu\delta\gamma}(æ_{\delta\gamma}-æ^0_{\delta\gamma})+D_{(2)}^{\alpha\nu 33}(\varepsilon_{33}-\varepsilon^0_{33})-h\sum_{m=1}^{2}\beta^{\nu\alpha}_{(m+1)}T_{(m)},$$

$$N^{\alpha 3}=D_{(1)}^{\alpha 3\delta 3}(\varepsilon_{\delta 3}-\varepsilon^0_{\delta 3})+D_{(2)}^{\alpha 3\delta 3}(æ_{\delta 3}-æ^0_{\delta 3}),$$

$$M^{\alpha 3}=D_{(2)}^{\alpha 3\delta 3}(\varepsilon_{\delta 3}-\varepsilon^0_{\delta\gamma})+D_{(3)}^{\alpha 3\delta 3}(æ_{\delta 3}-æ^0_{\delta 3});\qquad (10)$$

– балансові рівняння:

$$\frac{\partial F}{\partial T_{(n)}}-\frac{2h}{2n-1}\left(\nabla_\alpha H^\alpha_{(n)}-\frac{1}{T_0}W'_{(n)}\right)+2(n-1)H^3_{(1)}-\left(H^+_{(3)}-(-1)^n H^-_{(3)}\right)=0,\quad (11)$$

де

$$\frac{\partial F}{\partial T_{(n)}}=-\left[\beta^{\alpha\delta}_{(n)}(\varepsilon_{\alpha\delta}-\varepsilon^0_{\alpha\delta})+\beta^{33}_{(n)}(\varepsilon_{33}-\varepsilon^0_{33})+\right.$$

$$\left.+h\beta^{\alpha\delta}_{(n+1)}(æ_{\alpha\delta}-æ^0_{\alpha\delta})\right]-\frac{1}{T_0}\sum_{m=1}^{2}C^e_{(n,m)}T_{(m)};\qquad (12)$$

– рівняння переносу тепла:

$$\sum_{m=1}^{2} T_0\, k_{\alpha\beta}^{(n,m)}\, \dot H_{(m)}^{\alpha} + \frac{2h}{2n-1} \nabla_\beta T_{(n)} = 0\,,$$

$$\sum_{m=1}^{2} T_0\, k_{33}^{(n,m)} \dot H_{(m)}^{3} + 2(2-n) T_{(2)} = 0\,; \tag{13}$$

– умови конвективного теплообміну на поверхнях $z = \pm h$:

$$T_0\, \dot H_3^{\pm} \pm \alpha_z^{\pm}\left(t_c^{\pm} - t^{\pm}\right) = 0\,; \tag{14}$$

граничні умови

– статичні на частині контуру g_N:

$$N^{\alpha i}\nu_\alpha = \tilde N^i, \qquad M^{\alpha i}\nu_\alpha = \tilde M^i\,; \tag{15}$$

– геометричні на частині контуру g_u:

$$u_i = \tilde u_i, \qquad \gamma_i = \tilde\gamma_i\,; \tag{16}$$

– температурні другого роду на частині контуру g_t:

$$H_{(n)}^{\alpha}\nu_\alpha = \tilde H_{(n)}^{\alpha}\nu_\alpha\,; \tag{17}$$

– конвективний теплообмін на частині контуру g_s:

$$T_0\, \dot H_{(n)}^{\alpha}\nu_\alpha - \alpha_g\left(T_{(n)} - T_{(n)}^{c}\right) = 0\,. \tag{18}$$

Зі співвідношень (11)–(14) рівняння теплопровідності можна записати у традиційному вигляді

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha\left(\sum_{m=1}^{2}\lambda_{(n,m)}^{\alpha\beta}\nabla_\beta T_{(m)}\right) - \frac{n-1}{h^2}\lambda_{(1,1)}^{33} T_{(2)} - \sum_{m=1}^{2} C_{(n,m)}^{e}\dot T_{(m)} + W_{(n)}^{t} - \\ - T_0\Big[\beta_{(n)}^{\alpha\nu}\left(\dot\varepsilon_{\alpha\nu} - \dot\varepsilon_{\alpha\nu}^{0}\right) + \beta_{(n)}^{33}\left(\dot\varepsilon_{33} - \dot\varepsilon_{33}^{0}\right) + \\ + h\beta_{(n+1)}^{\alpha\nu}\left(\dot\varkappa_{\alpha\nu} - \dot\varkappa_{\alpha\nu}^{0}\right)\Big] - f_{(n)}^{c} = 0, \quad n = 1, 2\,,\end{aligned} \tag{19}$$

де функції $f_{(n)}^{c}$ залежать від типу граничних умов на поверхнях $z = \pm h$. Так, для умов другого роду можна записати, що $f_{(n)}^{c} = T_0\left(\dot H_3^{+} - (-1)^n \dot H_3^{-}\right)$, а для умов третього роду маємо $f_{(n)}^{c} = \left(T_{(1)} - t_1^{c}\right)\varepsilon_{(n)}^{t} + \left(T_{(2)} - t_2^{c}\right)\varepsilon_{(3-n)}^{t}$, де $\varepsilon_{(n)}^{t} = \alpha_z^{+} - (-1)^n \alpha_z^{-}$ і $t_{(n)}^{c} = \left(t_c^{+} - (-1)^n t_c^{-}\right)/2$.

Теорему доведено. ◊

Таким чином, серед усіх можливих термомеханічних станів, які задовольняють систему взаємозв'язаних рівнянь (8)–(14) і відповідні граничні умови (15)–(18), дійсно існує той, при якому функціонал (4) досягає стаціонарного значення $\delta I = 0$.

Сформульований варіаційний принцип як аналог відомого з теорії пружності принципу Ху – Васідзу є найзагальнішим принципом теорії термопружності неоднорідних анізотропних оболонок з урахуванням термомеханічної взаємодії. З нього як часткові випадки випливають інші, менш загальні принципи. Розглянемо деякі з них.

Принцип віртуальної енергії. Якщо варіюванню підлягають компоненти переміщень u_i, γ_i і характеристики температури $T_{(n)}$, то, вважаючи, що рівняння (9), (13), (14) і умови (16), (18) задовольняються, одержимо аналог відомого з теорії пружності [2, 10] принципу віртуальної енергії

$$\mathcal{W}(\delta\boldsymbol{\varepsilon},\delta\boldsymbol{æ},\mathbf{N},\mathbf{M})+\iint_G \Theta(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{æ},\delta T_{(n)})\,dG+D\big(H^i_{(n)},\delta\dot H^i_{(n)}\big)+\delta P_t=$$

$$=\iint_G \Theta(\boldsymbol{\varepsilon}^0,\boldsymbol{æ}^0,\delta T_{(n)})\,dG+\iint_G\big[(q^i-\ddot I^i_N)\,\delta u_i+(m^i-\ddot I^i_M)\,\delta\gamma_i\big]dG+$$

$$+\int_g (N^i\delta u_i+M^i\delta\gamma_i)\,dg-\iint_G\sum_{n=1}^{2}\Big[H_3^+-(-1)^n H_3^- -\frac{1}{T_0}W'_{(n)}\Big]\delta T_{(n)}\,dG-$$

$$-\int_g\sum_{n=1}^{2}\frac{2h}{2n-1}H^\alpha_{(n)}\nu_\alpha\delta T_{(n)}\,dg\,. \tag{20}$$

Тут

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{æ},\mathbf{N},\mathbf{M})=\iint_G\big(N^{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta}+N^{\alpha3}\varepsilon_{\alpha3}+N^{33}\varepsilon_{33}+M^{\alpha\beta}æ_{\alpha\beta}+M^{\alpha3}æ_{\alpha3}\big)\,dG\,,$$

$$D\big(H^i_{(n)},\dot H^i_{(n)}\big)=T_0\iint_G\sum_{n,m=1}^{2}\big(k^{(n,m)}_{\alpha\beta}H^\alpha_{(m)}\dot H^\beta_{(n)}+k^{(n,m)}_{33}H^3_{(m)}\dot H^3_{(n)}\big)\,dG\,,$$

$$P_t=\frac{1}{2T_0}\iint_G\sum_{n,m=1}^{2}C^e_{(n,m)}T_{(n)}T_{(m)}\,dG\,.$$

Праву частину варіаційного рівняння (20), яка містить добуток зовнішніх навантажень на віртуальні прирости переміщень і температури, можна інтерпретувати як узагальнену термомеханічну віртуальну роботу. Це рівняння дозволяє у варіаційній формі виразити рівняння рівноваги (8) і рівняння балансу (11), а також граничні умови (15) і (17).

Принцип додаткової енергії. Якщо варіюванню підлягають зусилля-моменти $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$, компоненти потоку ентропії $H^i_{(n)}$, зовнішнє поверхневе і контурне навантаження та сили інерції, то, вважаючи, що рівняння (8), (10), (11), (14) та умови (15), (18) задовольняються, одержимо наступне варіаційне рівняння:

$$\mathcal{W}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{æ},\delta\mathbf{N},\delta\mathbf{M})+\iint_G \Theta(\delta\boldsymbol{\varepsilon},\delta\boldsymbol{æ},T_{(n)})\,dG+D\big(\delta H^i_{(n)},\dot H^i_{(n)}\big)+\delta P_t=$$

$$=\iint_G \Theta(\delta\boldsymbol{\varepsilon}^0,\delta\boldsymbol{æ}^0,T_{(n)})\,dG+\iint_G\big[(\delta q^i-\delta\ddot I^i_N)\,u_i+(\delta m^i-\delta\ddot I^i_M)\,\gamma_i\big]dG+$$

$$+\int_g (\delta N^i u_i+\delta M^i\gamma_i)\,dg-\iint_G\sum_{n=1}^{2}\Big[\delta H_3^+-(-1)^n\delta H_3^- -\frac{1}{T_0}\delta W'_{(n)}\Big]T_{(n)}\,dG-$$

$$-\int_g\sum_{n=1}^{2}\frac{2h}{2n-1}\delta H^\alpha_{(n)}\nu_\alpha T_{(n)}\,dg\,, \tag{21}$$

яке виражає принцип додаткової енергії в термопружності неоднорідних анізотропних оболонок. Його права частина містить добуток приростів зовнішнього навантаження на дійсно існуючі переміщення і температуру. Цей принцип дає можливість у варіаційній формі виразити рівняння нерозривності деформацій, рівняння переносу тепла та геометричні граничні умови.

Принцип Біо. Якщо варіюванню підлягають компоненти переміщень і потоку ентропії, то, вважаючи, що рівняння (9), (11), (14) і умови (16), (18) задовольняються, одержимо аналог варіаційного рівняння Біо у тривимірній термопружності [1, 4]:

$$\delta\mathcal{W}_\varepsilon + \delta D + \delta P_t =$$

$$= \iint_G \left(N_0^{\alpha\beta}\delta\varepsilon_{\alpha\beta} + N_0^{\alpha 3}\delta\varepsilon_{\alpha 3} + N_0^{33}\delta\varepsilon_{33} + M_0^{\alpha\beta}\delta\text{æ}_{\alpha\beta} + M_0^{\alpha 3}\delta\text{æ}_{\alpha 3}\right) dG +$$

$$+ \iint_G \left[\left(q^i - \ddot{I}_N^i\right)\delta u_i + \left(m^i - \ddot{I}_M^i\right)\delta\gamma_i\right] dG + \int_g \left(N^i\delta u_i + M^i\delta\gamma_i\right) dg +$$

$$+ \iint_G \sum_{n=1}^{2} \left(\frac{1}{T_0}\,\delta W'_{(n)}\right) T_{(n)}\, dG - \iint_G \sum_{n=1}^{2} \left[\delta H_3^+ - (-1)^n\,\delta H_3^-\right] T_{(n)}\, dG -$$

$$- \int_g \sum_{n=1}^{2} \frac{2h}{2n-1}\,\delta H_{(n)}^{\alpha}\nu_\alpha T_{(n)}\, dg + \iint_G \Theta\left(T_{(n)}, \delta\boldsymbol{\varepsilon}^0, \delta\boldsymbol{\text{æ}}^0\right) dG\,. \tag{22}$$

Тут

$$\mathcal{W}_\varepsilon = \iint_G V_\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\text{æ}})\, dG\,,$$

$$N_0^{\nu\alpha} = D_{(1)}^{\alpha\nu\delta\gamma}\varepsilon_{\delta\gamma}^0 + D_{(2)}^{\alpha\nu\delta\gamma}\text{æ}_{\delta\gamma}^0 + D_{(1)}^{\alpha\nu 33}\varepsilon_{33}^0, \quad N_0^{\nu 3} = \ldots \text{ і т. д. (див. (10)).}$$

Права частина рівняння (22) містить віртуальні прирости, з одного боку, для переміщень, а з другого – для зовнішніх температурних навантажень. Тому це рівняння потрібно розглядати як варіаційне рівняння змішаного типу.

Якщо знехтувати спряженістю деформаційних і температурних полів, то можна одержати два незв'язаних варіаційних рівняння: варіаційне рівняння температурної задачі і варіаційне рівняння теплопровідності розглядуваної теорії оболонок. Останнє з них запишемо у вигляді

$$\delta P_t + D\left(\delta H_{(n)}^i, \dot{H}_{(n)}^i\right) =$$

$$= \iint_G \sum_{n=1}^{2} \left(\frac{1}{T_0}\,\delta W'_{(n)}\right) T_{(n)}\, dG - \iint_G \sum_{n=1}^{2} \left[\delta H_3^+ - (-1)^n\,\delta H_3^-\right] T_{(n)}\, dG -$$

$$- \int_g \sum_{n=1}^{2} \frac{2h}{2n-1}\,\delta H_{(n)}^{\alpha}\nu_\alpha T_{(n)}\, dg\,. \tag{23}$$

Це рівняння є аналогом відповідного варіаційного принципу Біо в лінійній тривимірній теплопровідності [1].

Одержані варіаційні принципи дозволяють розвинути різні методи розв'язку крайових задач теорії термопружності та теплопровідності неоднорідних анізотропних оболонок. Як приклад розглянемо можливість використання узагальнених координат до варіаційного рівняння (22), вважаючи джерела тепла заданими ($\delta W'_{(n)} = 0$).

Рівняння руху Лагранжа. Нехай компоненти вектора переміщень u_i, γ_i і потоку ентропії $H_{(n)}^i$, $H^{\pm}$ є функціями деяких узагальнених координат $q_s = q_s(\tau)$, $s = 1, 2, \ldots, p$. Тоді, використовуючи методи варіаційного числення, подамо (22) у формі рівнянь руху Лагранжа для систем з розсіюванням енергії

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_s}\right) - \frac{\partial K}{\partial q_s} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial}{\partial q_s}\left(\mathcal{W}_\varepsilon + P_t\right) = Q_s\,. \tag{24}$$

Тут K і Q_s – відповідно кінетична енергія і узагальнені сили

$$K = \frac{1}{2}\iint_G \left(\dot{I}_N^i \dot{u}_i + \dot{I}_M^i \dot{\gamma}_i\right) dG \,,$$

$$Q_s = \iint_G \left(q^i \frac{\partial u_i}{\partial q_s} + m^i \frac{\partial \gamma_i}{\partial q_s} \right) dG - \iint_G \sum_{n=1}^{2} T_{(n)} \left(\frac{\partial H^+}{\partial q_s} - (-1)^n \frac{\partial H^-}{\partial q_s} \right) dG +$$

$$+ \iint_G \sum_{n=1}^{2} T_{(n)} \left(\beta_{(n)}^{\alpha\delta} \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\delta}^0}{\partial q_s} + \beta_{(n)}^{33} \frac{\partial \varepsilon_{33}^0}{\partial q_s} + h\beta_{(n)}^{\alpha\delta} \frac{\partial \varkappa_{\alpha\delta}^0}{\partial q_s} \right) dG +$$

$$+ \int_g \left(N^i \frac{\partial u_i}{\partial q_s} + M^i \frac{\partial \gamma_i}{\partial q_s} \right) dg - \int_g \sum_{n=1}^{2} \frac{2h}{2n-1} T_{(n)} \frac{\partial H_{(n)}^\alpha}{\partial q_s} \nu_\alpha \, dg \,.$$

У випадку лінійної залежності поля переміщень і потоку ентропії від узагальнених координат із (24) одержимо зв'язану систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами відносно узагальнених координат $q_s(\tau)$:

$$\sum_i \left(m_{is} \ddot{q}_s + a_{is} \dot{q}_s + b_{is} q_s \right) = Q_s \,. \tag{25}$$

Тут m_{is}, a_{is}, b_{is} – відповідно коефіцієнти інерції, опору та відновлення.

Якщо координатні функції є формами власних коливань, що задовольняють умови ортогональності, то рівняння (25) стають незв'язаними і їхній загальний розв'язок можна подати у вигляді

$$q_s(\tau) = q_s^0 e^{-\lambda_s \tau} \cos \omega_s \tau + \frac{\dot{q}_s^0 + \lambda_s q_s^0}{\omega_s} e^{-\lambda_s \tau} \sin \omega_s \tau +$$

$$+ \frac{1}{m_s \omega_s} \int_0^\tau Q_s(\tau') \, e^{-\lambda_s (\tau - \tau')} \sin \omega_s (\tau - \tau') \, d\tau' \,,$$

де $q_s^0 = q_s(0)$; $\dot{q}_s^0 = \dot{q}_s(0)$; $\lambda_s = a_s / 2m_s$; $\omega_s^2 = b_s / m_s - \lambda_s^2$.

У випадку неспряженої динамічної задачі термопружності потрібно покласти $\lambda_s = 0$. Для квазістатичної задачі маємо $q_s = Q_s / \left(m_s \omega_s^2 \right)$.

Таким чином, при наявності координатних функцій знайдені узагальнені координати повністю визначають розв'язок задачі термопружності неоднорідних анізотропних оболонок.

Основна енергетична теорема. Варіаційне рівняння (22) використаємо для доведення основної енергетичної теореми в теорії термопружності неоднорідних анізотропних оболонок. Вважаючи, що δu_i, $\delta \gamma_i$ і $\delta T_{(n)}$ є дійсними переміщеннями та дійсною температурою в оболонці, будемо мати

$$\delta u_i = \dot{u}_i d\tau, \qquad \delta \gamma_i = \dot{\gamma}_i d\tau, \qquad \delta T_{(n)} = \dot{T}_{(n)} d\tau, \qquad \delta \mathcal{W}_\varepsilon = \dot{\mathcal{W}}_\varepsilon d\tau \,,$$

$$\delta K = \dot{K} d\tau, \qquad \delta D = \dot{D} d\tau = \chi d\tau, \qquad \delta W_{(n)}' = \dot{W}_{(n)}' d\tau = W_{(n)}^t d\tau \,,$$

$$\delta H_3^\pm = \dot{H}_3^\pm d\tau = \pm \frac{\alpha_z^\pm}{T_0} \left(t^\pm - t_c^\pm \right) d\tau \,.$$

Тоді рівняння (22) прийме вигляд

$$\frac{d}{d\tau} \left(\mathcal{W}_\varepsilon + K + P_t \right) + \chi_t =$$

$$= \iint_G \sum_{n=1}^{2} \frac{1}{T_0} W_{(n)}^t T_{(n)} \, dG + \frac{1}{T_0} \iint_G \sum_{n=1}^{2} \left[t_1^c \varepsilon_{(n)}^t + t_2^c \varepsilon_{(3-n)}^t \right] T_{(n)} \, dG +$$

$$+ \frac{2h\alpha_g}{T_0} \int_g \sum_{n=1}^{2} \frac{T_{(n)} T_{(n)}^c}{2n-1} \, dg + \iint_G \left(q^i \dot{u}_i + m^i \dot{\gamma}_i \right) dG + \int_g \left(N^i \dot{u}_i + M^i \dot{\gamma}_i \right) dg +$$

$$+\iint_G \left(N_0^{\alpha\beta}\dot{\varepsilon}_{\alpha\beta} + N_0^{\alpha 3}\dot{\varepsilon}_{\alpha 3} + N_0^{33}\dot{\varepsilon}_{33} + M_0^{\alpha\beta}\dot{\varkappa}_{\alpha\beta} + M_0^{\alpha 3}\dot{\varkappa}_{\alpha 3}\right) dG +$$

$$+\iint_G \Theta\left(T_{(n)}, \delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^0, \delta\dot{\boldsymbol{\varkappa}}^0\right) dG\,, \tag{26}$$

де

$$\chi_t = \frac{1}{T_0}\iint_G \left\{ \sum_{n,m=1}^{2} \lambda_{(n,m)}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha T_{(n)} \nabla_\beta T_{(m)} + \frac{\lambda_{(1,1)}^{33}}{h^2} T_{(2)}^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{2} \left(T_{(1)}\, \varepsilon_{(n)}^t + T_{(2)}\, \varepsilon_{(3-n)}^t\right) T_{(n)} \right\} dG + \frac{2h\alpha_g}{T_0} \int_g \sum_{n=1}^{2} \frac{T_{(n)}^2}{2n-1}\, dg\,. \tag{27}$$

Рівняння (26) виражає закон збереження енергії в теорії термопружності неоднорідних анізотропних оболонок: зміна повної механічної і теплової енергії, а також енергії розсіювання в деформованій оболонці за одиницю часу дорівнює зміні роботи, яка виконана зовнішнім механічним навантаженням і нагрівом оболонки.

Застосовуючи відомий підхід [6], енергетичне рівняння (26) можна використати для доведення **теореми єдиності** розв'язку крайових задач теорії термопружності неоднорідних анізотропних оболонок. Це рівняння також може бути застосоване для дослідження дисипації при взаємозв'язаних термопружних процесах.

Розсіювання механічної енергії. Нехай зовнішні дії на оболонку відсутні, тобто ззовні енергія не поступає. Тоді з рівняння (26) одержимо, що зміна повної енергії при вільних коливаннях дорівнює від'ємному значенню величини розсіяної енергії за одиницю часу:

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = -\chi_t\,, \tag{28}$$

де $\mathcal{E} = \mathcal{W}_\varepsilon + K + P_t$, а функція зміни розсіяної енергії $\chi_t \ge 0$ дається формулою (27), з якої видно, що розсіювання механічної енергії оболонки при необоротних термопружних процесах зумовлено наявністю теплових потоків всередині оболонки ($\lambda^{\alpha\beta} \ne 0,\ \lambda^{33} \ne 0$) через її поверхні $z = \pm h$ ($\alpha_z^{\pm} \ne 0$) і через контур g ($\alpha_g \ne 0$).

З формул (28) і (27) випливає наступне: якщо при вільних коливаннях оболонки приріст температури відсутній ($T_{(n)} = 0$), то повна енергія її залишається сталою $\left(\dfrac{d\mathcal{E}}{d\tau} = 0\right)$, а якщо враховується зміна температури оболонки внаслідок її деформування ($T_{(n)} \ne 0$), то початково накопичена механічна енергія при вільних коливаннях оболонки в часі спадає $\left(\dfrac{d\mathcal{E}}{d\tau} < 0\right)$ до свого мінімального значення, при якому досягається стан термодинамічної рівноваги. Отже, вільні коливання оболонки затухають внаслідок розсіювання механічної енергії. Логарифмічний декремент затухання визначається за формулою $d_t = \left|\tilde{\dot{\mathcal{E}}}\right| / \tilde{\mathcal{E}}$, де хвилькою зверху позначено усереднені за часом величини.

Висновки. Сформульовано загальний варіаційний принцип теорії взаємозв'язаної термопружності неоднорідних анізотропних оболонок з початковими деформаціями, який можна розглядати, як аналог принципу Ху – Васідзу у лінійній теорії пружності. Повна система диференціальних рівнянь і відповідні граничні умови випливають як рівняння Ейлера з умови стаціонарності виведеного функціоналу. Використовуючи теорію перетворення варіаційних задач, одержано ряд часткових принципів, які є аналогами відомих принципів з теорії пружності та теплопровідності. Показана можливість використання одержаних варіаційних принципів для побудови розв'язків відповідних крайових задач, доведення теореми єдиності та дослідження розсіювання механічної енергії при взаємозв'язаних термопружних процесах.

1. *Био М.* Вариационные принципы в теории теплообмена. – Москва: Энергия, 1975. – 208 с.
2. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – Москва: Мир, 1987. – 542 с.
3. *Жидик У. В.* Математичне моделювання термомеханічної поведінки неоднорідних анізотропних оболонок // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 72–75.
4. *Коваленко А. Д.* Избранные труды. – Киев: Наук. думка, 1976. – 762 с.
5. *Подстригач Я. С., Осадчук В. А., Федюк Е. М., Николишин М. М.* Метод дисторсий в теории тонких оболочек с трещинами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 29–41.
6. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.
7. *Подстригач Я. С., Шевчук П. Р.* Вариационная форма уравнений теории термодиффузионных процессов в деформируемом твердом теле // Прикл. математика и механика. – 1969. – **33**, № 4. – С. 774–776.
8. *Швец Р. Н., Флячок В. М.* Вариационный подход к решению динамических задач механотермодиффузии анизотропных оболочек // Мат. физика и нелинейная механика. – 1991. – Вып. 16 (50). – С. 39–43.
9. *Ben-Amoz M.* On a variational theorem in coupled thermoelasticity // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – No. 4. – P. 243–245.
10. *Kaczkowski Z.* On variational principles in thermoelasticity // Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Techn. – 1982. – **30**, No. 5-6. – P. 245–250.
11. *Rychter Z.* On linear theory of anisotropic shells of moderate thickness // Mechanika teoretyczna i stosowana. – 1983. – **21**, No. 2-3. – P. 147–154.

ВАРИАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ВЗАИМОСВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Для взаимосвязанной термоупругости неоднородных анизотропных оболочек сформулированы общая и частные вариационные задачи, являющиеся аналогами соответственно вариационных задач Ху – Васидзу, виртуальной энергии, дополнительной энергии и Био в линейной теории упругости. Вариационным путем доказана основная энергетическая теорема, а также показано, что вариационные задачи допускают представление в форме уравнений движения Лагранжа для систем с рассеянием энергии.

VARIATIONAL STATEMENTS OF PROBLEMS FOR COUPLED THERMOELASTICITY OF HETEROGENEOUS ANISOTROPIC SHELLS

The general and individual variational problems for coupled thermoelasticity of heterogeneous anisotropic shells have been formulated. They are analogues of variational problems of Hu-Washizu, virtual energy, virtual complementary energy and Biot in the linear elasticity theory. The main energetic theorem has been proven by variational way. And it has been shown that variational problems admit their representation in the form of Lagrange equations of motion for disperse energy systems.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано 01.06.06