

**ВИЗНАЧЕННЯ ПЛОСКОГО НЕОСЕСИМЕТРИЧНОГО
ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ РАДІАЛЬНО-НЕОДНОРІДНОГО КІЛЬЦЯ**

Розвинуто методику розв'язування плоских неосесиметричних задач теорії пружності та термопружності в напруженнях для радіально-неоднорідних порожнистого циліндра та диска. Методика ґрунтується на інтегруванні рівнянь рівноваги, які не залежать від властивостей матеріалу. Це дає можливість використання співвідношень між напруженнями, отриманих для випадку однорідного матеріалу, внаслідок чого поставлені задачі зводяться до ключових інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

Вступ. Відомо, що достовірність розрахунків міцності та інших експлуатаційних характеристик елементів конструкцій залежить від урахування тих чи інших властивостей матеріалів, зокрема, від урахування залежності теплофізичних та механічних характеристик від координати місця точки тіла (неоднорідність) або від розподілу температури (термочутливість). У зв'язку з цим інтенсивно розвиваються математичні моделі, які дозволяють враховувати ці властивості матеріалів при розв'язуванні задач механіки деформівного твердого тіла, а також методи розв'язування таких задач.

Як важливий приклад неоднорідних та термочутливих матеріалів слід розглянути функціонально-градієнтні матеріали. Ці метало-керамічні композити використовують для покращення показників експлуатаційних характеристик елементів конструкцій [17, 18], які функціонують у середовищах високих температур. Щоб уникнути стрибків властивостей матеріалів у зонах контакту складників, що підвищує схильність до руйнування, ці композити формуються технологічно з властивостями, які неперервно змінюються при переході через зону контакту.

Серед об'єктів, виготовлених з функціонально-градієнтних матеріалів, які характеризуються неоднорідністю в одному з просторових напрямків, за активністю вивчення в останні десятиліття помітно виділяють радіально-неоднорідні циліндри та диски. Щоб не переобтяжувати огляд значною кількістю робіт, присвячених розв'язуванню одновимірних задач такого класу, обмежимося методами розв'язування плоских неосесиметричних задач теорії пружності та термопружності для вказаних тіл. Аналітичний розв'язок рівняння Нав'є плоскої неосесиметричної задачі теорії пружності та термопружності для довгого товстостінного порожнистого циліндра зі степеневою залежністю від радіальної координати пружних властивостей матеріалу знайдено у формі комплексних рядів Фур'є у роботі [14]. Крім того, там же знайдено неосесиметричні розподіли температур із відповідних задач теплопровідності за змінного коефіцієнта теплопровідності. Аналогічні розв'язки отримано в роботах [19, 20]. У роботі [23] побудовано розв'язок задачі теорії пружності для порожнистого циліндра, модуль пружності якого експоненціально залежить від радіальної координати. При цьому вихідний неперервно неоднорідний циліндр було замінено багат шаровим циліндром тих же розмірів, що складається з однорідних концентричних циліндричних шарів однакової малої товщини, ідеально скріплених між собою. Для побудови розв'язків отриманих для кожного шару задач використано функцію напружень Мічела [9, 16]. Подібний підхід застосовано у [15]. За аналогією із багат шаровими тілами функцію Гріна для радіально-неоднорідних порожнистого та суцільного циліндрів побудовано в [13]. Чисельну методику дослідження неосесиметричних термонапружень у радіально-неоднорідному циліндрі було запропоновано у [22].

У цій роботі розвинуто методику розв'язування плоских неосесиметричних задач теорії пружності й термопружності для радіально-неоднорідної

кільцевої області, до яких зводяться такого класу задачі для довгого по-
рожного циліндра за умов плоскої деформації (ПД) та для тонкого диска з
осьовим отвором у випадку плоского напруженого стану (ПНС). Методика
ґрунтується на зведенні вихідних задач до інтегральних рівнянь Вольтерра [8]
із застосуванням методу безпосереднього інтегрування вихідних рівнянь [2, 3].
Ключовим положенням цього підходу є використання співвідношень між
компонентами тензора напружень, які отримані на основі рівнянь рівноваги і
не залежать від властивостей матеріалу. Це відкриває можливість зручного
поширення методики дослідження напружень в однорідних тілах на випадок
неоднорідних. Таким чином, методику [3] було розвинуто в [4, 5, 7] для розв'я-
зування одновимірних задач теорії пружності й термопружності для неодно-
рідних і термочутливих циліндричних тіл. Аналогічно методику [2] було розви-
нуто в [11, 21] на випадок неоднорідної в поперечному перерізі смуги.

Постановка задачі. Плоска квазістатична неосесиметрична задача тео-
рії пружності та термопружності у кільцевій області $k \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$
за відсутності масових сил описується [1, 9] рівняннями рівноваги

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_r) + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} = \sigma, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_{r\varphi}) + \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (1)$$

рівнянням суцільності в деформаціях

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \varphi} (\rho e_{r\varphi}) = \frac{\partial^2 e_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial e_\varphi}{\partial \rho} \right) - \rho \frac{\partial e_r}{\partial \rho} \quad (2)$$

та фізичними співвідношеннями

$$\begin{Bmatrix} e_r \\ e_\varphi \end{Bmatrix} = \frac{1}{\bar{E}} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \end{Bmatrix} - \frac{\bar{\nu}}{\bar{E}} \begin{Bmatrix} \sigma_\varphi \\ \sigma_r \end{Bmatrix} + \bar{\alpha} T - \bar{e}, \quad e_{r\varphi} = \frac{1}{G} \sigma_{r\varphi}. \quad (3)$$

Тут $\{\rho, k\} = \{r, R_1\} / R_2$; r, φ – розмірні радіальна та кутова координати
циліндричної системи координат; R_1 і R_2 – внутрішній і зовнішній радіуси
кільця; $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_{r\varphi}, e_r, e_\varphi, e_{r\varphi}$ – компоненти тензорів напружень і деформації;

$$\sigma = \sigma_r + \sigma_\varphi; \quad (4)$$

$T = T(\rho, \varphi)$ – відоме температурне поле, яке знаходиться з відповідної за-
дачі теплопровідності [1];

$$\bar{E} = \begin{cases} \frac{E}{1-\nu^2}, & \text{ПД,} \\ E, & \text{ПНС,} \end{cases} \quad \bar{\nu} = \begin{cases} \frac{\nu}{1-\nu}, & \text{ПД,} \\ \nu, & \text{ПНС,} \end{cases} \quad \bar{\alpha} = \begin{cases} \alpha(1+\nu), & \text{ПД,} \\ \alpha, & \text{ПНС,} \end{cases} \quad \bar{e} = \begin{cases} \nu e_0, & \text{ПД,} \\ 0, & \text{ПНС,} \end{cases}$$

$E = E(\rho)$ – модуль пружності; $\nu = \nu(\rho)$ – коефіцієнт Пуассона; $G = G(\rho)$ –
модуль зсуву; $\alpha = \alpha(\rho)$ – коефіцієнт лінійного температурного видовження;
 $e_0 = e_z = \text{const}$ – осьова деформація циліндра у випадку ПД ($e_0 = 0$, якщо
торці циліндра зацемлено поміж жорсткими площинами [9]).

Для визначення напружень систему рівнянь (1)–(3) слід доповнити [12]
інтегральними умовами суцільності

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left[k e_r(k, \varphi) + e_r(1, \varphi) - k^2 \frac{\partial e_\varphi}{\partial \rho} \Big|_{\rho=k} - \frac{\partial e_\varphi}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} \right] \begin{Bmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{Bmatrix} d\varphi = \\ & = \int_0^{2\pi} [k e_{r\varphi}(k, \varphi) + e_{r\varphi}(1, \varphi)] \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{Bmatrix} d\varphi, \end{aligned} \quad (5)$$

які отримано в [6] на основі інтегрування рівнянь суцільності Коші [9]. Крім
того, шукані напруження мають задовольняти крайові умови

$$\begin{aligned}\sigma_r|_{\rho=k} &= -p_1(\varphi), & \sigma_r|_{\rho=1} &= -p_2(\varphi), \\ \sigma_{r\varphi}|_{\rho=k} &= q_1(\varphi), & \sigma_{r\varphi}|_{\rho=1} &= q_2(\varphi).\end{aligned}\quad (6)$$

Використовуючи співвідношення (3), (4) та рівняння рівноваги (1), подамо рівняння суцільності (2) у напруженнях

$$\Delta\left(\frac{\sigma}{E} + \bar{\alpha}T\right) = \frac{\sigma_r}{2} \frac{d^2}{d\rho^2}\left(\frac{1}{G}\right) + \frac{\sigma_\varphi}{2\rho} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{G}\right) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{d\bar{\epsilon}}{d\rho}\right), \quad (7)$$

$$\text{де } \Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Отже, напруження, спричинені зовнішніми навантаженнями (6) та температурним полем T , слід визначати з рівнянь (1), (7) та умов (5), (6).

Побудова розв'язку. Подамо шукані компоненти тензора напружень, температурне поле та задані навантаження (6) у вигляді розвинень у ряди Фур'є:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \\ \sigma \\ T \\ p_j \\ \sigma_{r\varphi} \\ q_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_0(\rho) \\ \Phi_0(\rho) \\ \sigma_0(\rho) \\ T_0(\rho) \\ p_{j0} \\ S_0(\rho) \\ q_{j0} \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} R_n^1(\rho) \\ \Phi_n^1(\rho) \\ \sigma_n^1(\rho) \\ T_n^1(\rho) \\ p_{jn}^1 \\ S_n^2(\rho) \\ q_{jn}^2 \end{Bmatrix} \cos n\varphi + \begin{Bmatrix} R_n^2(\rho) \\ \Phi_n^2(\rho) \\ \sigma_n^2(\rho) \\ T_n^2(\rho) \\ p_{jn}^2 \\ S_n^1(\rho) \\ q_{jn}^1 \end{Bmatrix} \sin n\varphi, \quad (8)$$

де [10]

$$\{R_0, \Phi_0, \sigma_0, T_0, p_{j0}, S_0, q_{j0}\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma, T, p_j, \sigma_{r\varphi}, q_j\} d\varphi, \quad (9)$$

$$\{R_n^1, \Phi_n^1, \sigma_n^1, T_n^1, p_{jn}^1, S_n^2, q_{jn}^2\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma, T, p_j, \sigma_{r\varphi}, q_j\} \cos n\varphi d\varphi,$$

$$\{R_n^2, \Phi_n^2, \sigma_n^2, T_n^2, p_{jn}^2, S_n^1, q_{jn}^1\} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma, T, p_j, \sigma_{r\varphi}, q_j\} \sin n\varphi d\varphi. \quad (10)$$

Побудуємо спершу розв'язок задачі для напружень з нижнім індексом «0». Як було показано у [12], елементарна частина дотичних напружень не залежить ні від властивостей матеріалу, ні від температурного поля і визначається простим виразом

$$S_0 = \frac{1}{\rho^2} k^2 q_{10} = \frac{1}{\rho^2} q_{20}$$

за необхідної умови

$$q_{20} = k^2 q_{10} \quad \text{або} \quad \int_0^{2\pi} (q_2 - k^2 q_1) d\varphi = 0$$

для дотичних зусиль. Ці розв'язок та умова детально простежені у [9, с. 140].

Підставивши відповідні вирази (8) у рівняння (7), для коефіцієнтів напружень (9) отримуємо рівняння суцільності

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{d}{d\rho}\left(\frac{\sigma_0}{E} + \bar{\alpha}T_0\right)\right) = \frac{\rho R_0}{2} \frac{d^2}{d\rho^2}\left(\frac{1}{G}\right) + \frac{\Phi_0}{2} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{G}\right) + \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{d\bar{\epsilon}}{d\rho}\right). \quad (11)$$

У роботі [12] на основі рівнянь рівноваги було отримано вираз

$$\rho^2 R_0 = -k^2 p_{10} + \int_k^\rho \eta \sigma_0(\eta) d\eta \quad (12)$$

та інтегральну умову для елементарної частини сумарних напружень

$$\int_k^1 \rho \sigma_0 d\rho = k^2 p_{10} - p_{20}. \quad (13)$$

Застосовуючи інтегрування частинами та використовуючи вираз (12), рівняння щільності (11) зводимо до вигляду

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{\sigma_0}{E} + \bar{\alpha} T_0 \right) = \frac{R_0}{2} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{G} \right) + \frac{d\bar{e}}{d\rho}. \quad (14)$$

Рівняння типу (14) розглядалося для аналогічної одновимірної задачі в [4, 5, 7], де з використанням (12) його було зведено до інтегрального рівняння

$$\sigma_0 = \bar{E} \left[C_0 + \bar{e} - P_0 - \bar{\alpha} T_0 + \frac{1}{2} \int_k^{\rho} \xi \sigma_0(\xi) \mathcal{K}_0(\rho, \xi) d\xi \right]. \quad (15)$$

Тут C_0 – стала інтегрування,

$$\mathcal{K}_0(\rho, \xi) = \int_{\xi}^{\rho} \frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{G(\eta)} \right) d\eta, \quad P_0 = \frac{k^2 p_{10}}{2} \mathcal{K}_0(\rho, k). \quad (16)$$

Для побудови розв'язку рівняння (15) використаємо методику [4, 5, 7], яка полягає у відшуванні елементарної частини сумарних напружень у вигляді границі

$$\sigma_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_0^{(m)} \quad (17)$$

послідовних наближень

$$\sigma_0^{(0)} \equiv 0,$$

$$\sigma_0^{(m)} = \bar{E} \left[C_0^{(m)} + \bar{e}^{(m)} - \bar{\alpha} T_0 - P_0 + \frac{1}{2} \int_k^{\rho} \xi \sigma_0^{(m-1)}(\xi) \mathcal{K}_0(\rho, \xi) d\xi \right], \quad m = 1, 2, \dots$$

Для визначення невідомих $C_0^{(m)}$ та $\bar{e}^{(m)}$ використаємо умову (13). У випадку ПД циліндра із защемленими від осьових переміщень торцями, а також ПНС тонкого диска внаслідок відсутності осьової деформації маємо

$$\bar{e}^{(m)} = 0. \quad (18)$$

Тоді з (13) нескладно знайти, що

$$C_0^{(m)} = b_1^{(m)} / I_1, \quad (19)$$

де

$$b_1^{(m)} = k^2 p_{10} - p_{20} + \int_k^1 \rho \bar{E} (\bar{\alpha} T_0 + P_0) d\rho - \frac{1}{2} \int_k^1 \rho \bar{E} \int_k^{\rho} \xi \sigma_0^{(m-1)}(\xi) \mathcal{K}_0(\rho, \xi) d\xi d\rho,$$

$$I_1 = \int_k^1 \rho \bar{E} d\rho.$$

У випадку ПД циліндра з вільними торцями додаткову умову

$$\bar{e}^{(m)} \int_k^1 \rho E d\rho = \nu \int_k^1 \rho (\alpha E T_0 - \nu \sigma_0^{(m)}) d\rho \quad (20)$$

отримуємо з фізичного співвідношення

$$\sigma_z = E e_0 + \nu \sigma - \alpha E T$$

та умови відсутності навантажень на торцях циліндра:

$$\int_0^{2\pi} \int_k^1 \rho \sigma_z d\rho d\phi = 0.$$

З системи умов (13), (20) для цього випадку знаходимо

$$C_0^{(m)} = \frac{b_1^{(m)}I_1 - b_2^{(m)}I_2}{I_1^2 - I_2^2}, \quad \bar{e}^{(m)} = \frac{v(b_2^{(m)}I_1 - b_1^{(m)}I_2)}{I_1^2 - I_2^2}, \quad (21)$$

де

$$b_2^{(m)} = \int_k^1 \frac{\rho E}{1-v} \left(\alpha T_0 + \frac{v P_0}{1+v} \right) d\rho - \frac{1}{2} \int_k^1 \frac{\rho v E}{1-v^2} \int_k^\rho \xi \sigma_0^{(m-1)}(\xi) \mathcal{K}_0(\rho, \xi) d\xi d\rho,$$

$$I_2 = \int_k^1 \rho v \bar{E} d\rho.$$

Після визначення сумарних напружень за формулою (17) границі послідовних наближень, складові у виразах яких визначаються з (18), (19) або (21), елементарну частину радіальних напружень знаходимо за формулою (12), а колових – за формулою

$$\Phi_0 = \sigma_0 - R_0,$$

що впливає з (4), (8), (9).

Для визначення коефіцієнтів (10) компонент тензора напружень (8) використаємо вирази, отримані в [12] на основі інтегрування рівнянь рівноваги (1):

$$S_n^i = \frac{1}{2\rho^2} \left[k^2 \chi_n^+(\rho, k) q_{1n}^i + (-1)^i k^2 \chi_n^-(\rho, k) p_{1n}^i - \right. \\ \left. - (-1)^i \int_k^\rho \eta \sigma_n^i(\eta) (n \chi_n^+(\rho, \eta) + \chi_n^-(\rho, \eta)) d\eta \right],$$

$$R_n^i = -\frac{1}{2\rho^2} \left[(-1)^i k^2 \chi_n^-(\rho, k) q_{1n}^i + k^2 \chi_n^+(\rho, k) p_{1n}^i - \right. \\ \left. - \int_k^\rho \eta \sigma_n^i(\eta) (n \chi_n^-(\rho, \eta) + \chi_n^+(\rho, \eta)) d\eta \right],$$

$$\Phi_n^i = \frac{1}{2\rho^2} \left[(-1)^i k^2 \chi_n^-(\rho, k) q_{1n}^i + k^2 \chi_n^+(\rho, k) p_{1n}^i - \right. \\ \left. - \int_k^\rho \eta \sigma_n^i(\eta) (n \chi_n^-(\rho, \eta) + \chi_n^+(\rho, \eta)) d\eta \right] + \sigma_n^i, \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

Тут $\chi_n^\pm(x, y) = x^{-n} y^n \pm x^n y^{-n}$. Крім того, було встановлено необхідні умови

$$(n+1) \int_k^1 \rho^{1+n} \sigma_n^i d\rho = k^{2+n} p_{1n}^i - p_{2n}^i + (-1)^i (k^{2+n} q_{1n}^i - q_{2n}^i),$$

$$(n-1) \int_k^1 \rho^{1-n} \sigma_n^i d\rho = p_{2n}^i - k^{2-n} p_{1n}^i + (-1)^i (k^{2-n} q_{1n}^i - q_{2n}^i). \quad (23)$$

Як зазначалося [12], умови (23) слугуватимуть для визначення сталих інтегрування у шуканому розв'язку. Проте друга з них вироджується при $n = 1$, і замість неї має бути використана умова (5). Натомість ця друга з умов (23) при $n = 1$ породжує умови

$$k p_{11}^i - p_{21}^i = (-1)^i (k q_{11}^i - q_{21}^i), \quad i = 1, 2, \quad (24)$$

які у термінах (6) мають вигляд

$$\int_0^{2\pi} (k p_1 - p_2) \begin{Bmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} d\varphi = \int_0^{2\pi} (k q_1 - q_2) \begin{Bmatrix} -\cos \varphi \\ \sin \varphi \end{Bmatrix} d\varphi$$

і виражають рівновагу зовнішніх зусиль у проекціях на осі декартових координат [9, с. 147].

Підставивши розвинення (8) у рівняння (7) або ж застосувавши до нього інтегральні перетворення (10), знаходимо рівняння

$$\Delta_n \left(\frac{\sigma_n^i}{\bar{E}} + \bar{\alpha} T_n^i \right) = \frac{R_n^i}{2} \frac{d^2}{d\rho^2} \left(\frac{1}{G} \right) + \frac{\Phi_n^i}{2\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{G} \right), \quad (25)$$

де

$$\Delta_n = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{n^2}{\rho^2}.$$

Розв'язок рівняння (25) з урахуванням двох останніх виразів (22) має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_n^i = \bar{E} \left[A_n^i \rho^{-n} + B_n^i \rho^n + P_n^i + Q_n^i - \bar{\alpha} T_n^i + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \int_k^\rho \frac{1}{\eta^2} \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{G(\eta)} \right) \int_k^\eta \xi \sigma_n^i(\xi) [(n+1)\rho^n \xi^n \eta^{-2n} - \right. \\ \left. - (n-1)\rho^{-n} \xi^{-n} \eta^{2n}] d\xi d\eta \right]. \end{aligned}$$

Тут A_n^i, B_n^i – сталі інтегрування,

$$\begin{aligned} P_n^i = -\frac{k p_{1n}^i}{4} \left(\frac{\chi_n^-(\rho, k)}{n} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{G} \right) \Big|_{\rho=k} + \right. \\ \left. + k \int_k^\rho \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{G(\eta)} \right) (k^{-n} \rho^{-n} \eta^{2(n-1)} + k^n \rho^n \eta^{-2(n+1)}) d\eta \right), \\ Q_n^i = \frac{(-1)^i k^2 q_{1n}^i}{4} \int_k^\rho \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{G(\eta)} \right) (k^{-n} \rho^{-n} \eta^{2(n-1)} - k^n \rho^n \eta^{-2(n+1)}) d\eta. \end{aligned}$$

Змінивши порядок інтегрування в отриманому розв'язку, зводимо його до інтегрального рівняння

$$\sigma_n^i = \bar{E} \left[A_n^i \rho^{-n} + B_n^i \rho^n + P_n^i + Q_n^i - \bar{\alpha} T_n^i + \frac{1}{4} \int_k^\rho \xi \sigma_n^i(\xi) \mathcal{K}_n(\rho, \xi) d\xi \right], \quad (26)$$

де

$$\mathcal{K}_n(\rho, \xi) = \int_\xi^\rho \frac{d}{d\eta} \left(\frac{1}{G} \right) ((n+1)\rho^n \xi^n \eta^{-2(n+1)} - (n-1)\rho^{-n} \xi^{-n} \eta^{2(n-1)}) d\eta. \quad (27)$$

Розв'язок рівняння (26) будемо за допомогою тієї ж методики, що була застосована для рівняння (15), у вигляді

$$\sigma_n^i = \lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_n^{i(m)}, \quad (28)$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_n^{i(0)} \equiv 0, \\ \sigma_n^{i(m)} = \bar{E} \left[A_n^{i(m)} \rho^{-n} + B_n^{i(m)} \rho^n + P_n^i + Q_n^i - \right. \\ \left. - \bar{\alpha} T_n^i + \frac{1}{4} \int_k^\rho \xi \sigma_n^{i(m-1)}(\xi) \mathcal{K}_n(\rho, \xi) d\xi \right], \quad (29) \end{aligned}$$

а сталі інтегрування $A_n^{i(m)}, B_n^{i(m)}$, $n \geq 2$, $i = 1, 2$, $m = 1, 2, \dots$, визначаємо з умов (23) у вигляді

$$A_n^{i(m)} = \frac{I_1 F_{1n}^{i(m)} - I_n^+ F_{2n}^{i(m)}}{\gamma_n}, \quad B_n^{i(m)} = \frac{I_1 F_{2n}^{i(m)} - I_n^- F_{1n}^{i(m)}}{\gamma_n}. \quad (30)$$

Тут

$$\begin{aligned} F_{1n}^{i(m)} &= \frac{1}{n+1} [k^{2+n} p_{1n}^i - p_{2n}^i + (-1)^i (k^{2+n} q_{1n}^i - q_{2n}^i)] - \\ &\quad - \int_k^1 \rho^{1+n} \bar{E}(\rho) F_n^{i(m)}(\rho) d\rho, \\ F_{2n}^{i(m)} &= \frac{1}{n-1} [p_{2n}^i - k^{2-n} p_{1n}^i + (-1)^i (k^{2-n} q_{1n}^i - q_{2n}^i)] - \\ &\quad - \int_k^1 \rho^{1-n} \bar{E}(\rho) F_n^{i(m)}(\rho) d\rho, \\ F_n^{i(m)}(\rho) &= P_n^i + Q_n^i - \bar{\alpha} T_n^i + \frac{1}{4} \int_k^\rho \xi \sigma_n^{i(m-1)}(\xi) \mathcal{K}_n(\rho, \xi) d\xi, \\ \gamma_n &= I_1^2 - I_n^- I_n^+, \quad \{I_n^+, I_n^-\} = \int_k^1 \rho \{ \rho^{2n}, \rho^{-2n} \} \bar{E}(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

Аналогічно, як у випадку однорідного матеріалу [12], сталі $A_1^{i(m)}$, $i = 1, 2$, $m = 1, 2, \dots$, визначаємо з використанням інтегральної умови (5) та умов (24) у вигляді

$$\begin{aligned} 4A_1^{i(m)} &= k p_{11}^i \left[k \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{G} \right) \Big|_{\rho=k} - \frac{1}{G(k)} - \frac{1+k^2}{4} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{G} \right) \Big|_{\rho=1} \right] + \\ &\quad + \frac{p_{21}^i}{2} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{G} \right) \Big|_{\rho=1} + (-1)^i k q_{11}^i \left[\frac{1}{G(k)} + \frac{1-k^2}{4} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{G} \right) \Big|_{\rho=1} \right] + \\ &\quad + \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1}{G} \right) \Big|_{\rho=1} \int_k^1 \rho^2 \sigma_1^{i(m-1)} d\rho. \end{aligned} \quad (31)$$

Вирази для сталих $B_1^{i(m)}$, $i = 1, 2$, $m = 1, 2, \dots$, отримуємо з першої умови (23) при $n = 1$:

$$\begin{aligned} 2I_1^+ B_1^{i(m)} &= k^3 p_{11}^i - p_{21}^i + (-1)^i (k^3 q_{11}^i - q_{21}^i) - 2I_1 A_1^{i(m)} - \\ &\quad - 2 \int_k^1 \rho^2 \bar{E} \left[P_1^i + Q_1^i - \bar{\alpha} T_1^i + \frac{1}{4} \int_k^\rho \xi \sigma_1^{i(m-1)}(\xi) \mathcal{K}_1(\rho, \xi) d\xi \right] d\rho, \end{aligned} \quad (32)$$

де сталі $A_1^{i(m)}$ мають вигляд (31).

Визначивши складові сумарних напружень у вигляді границі (28) поспідовних наближень (29), сталі інтегрування у яких мають вигляд (30)–(32), відповідні складові компонент тензора напружень знаходимо за формулами (22).

З виразів (16), (27) легко зробити висновок, що при $G = \text{const}$ співвідношення (15) і (26) визначають точний аналітичний розв'язок задачі.

Приклади числових розрахунків та обговорення.

Приклад 1. Для числової перевірки розвинутої методики розглянемо приклад, наведений у [23] для випадку ПД порожнистого циліндра, що перебуває під дією зовнішніх зусиль

$$p_1 = -p_0 \cos(\mu\varphi), \quad p_2 = q_1 = q_2 = 0, \quad \mu = \text{const}, \quad p_0 = \text{const}, \quad (33)$$

при нехтуванні температурним полем T . При цьому прийнято $E(\rho) =$

$= E_0 \exp(\beta\rho)$, де $\beta = \text{const}$, $E_0 = \text{const}$, $\nu = \nu_0 = \text{const}$ (у всіх розрахунках нижче $\nu_0 = 0.3$), $G = G_0 \exp(\beta\rho)$, де $G_0 = E_0 / (2 + 2\nu_0)$.

У роботі [23] числові значення безрозмірних напружень σ_r / p_0 , σ_ϕ / p_0 , і $\sigma_{r\phi} / p_0$ були отримані для випадку циліндра внутрішнього радіуса $r_0 = 1$ та зовнішнього $r_e = 5$, коли $\mu = 0$ та $\mu = 4$, для значень $\beta = 0$ (однорідний матеріал), $\beta = \pm 1.5$ та $\beta = \pm 3$. Оскільки у цій роботі використовуємо безрозмірні координати, віднесені до зовнішнього радіуса, то для порівняння даних нам слід покласти $k = r_0 / r_e$ і $\beta = 0, \pm 1.5r_e, \pm 3r_e$.

Зауважимо, що у випадку $\mu = 0$ зусилля (33) і, як наслідок, напруження у циліндрі не залежать від кутової змінної. Таким чином, напруження описуються лише елементарними складовими (9).

На рис. 1 зображено розподіли радіальних напружень у кільці, сторони якого навантажені зусиллями (33) при $\mu = 0$. Нескладно перекоонатися, що наведені значення напружень співпадають з відповідними, отриманими в [23, рис. 2, с. 604]. Аналогічний висновок випливає з порівняння стрічок I (значення радіальних напружень, отримані методом [23]) та II (отримані за запропонованою методикою) у табл. 1.

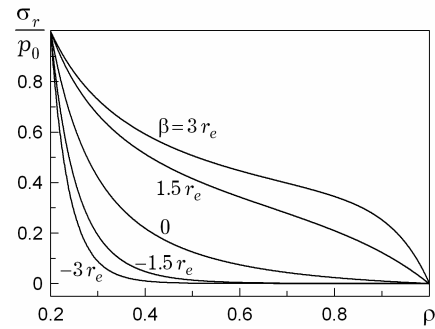


Рис. 1

Таблиця 1

ρ	$\beta = 3r_e$	$\beta = 1.5r_e$	$\beta = -3r_e$	$\beta = -1.5r_e$	
0.4	0.591	0.514	0.007	0.051	I
	0.592	0.513	0.010	0.047	II
0.6	0.450	0.341	0.004	0.004	I
	0.447	0.343	1E-4	0.004	II
0.8	0.343	0.207	0.000	9E-4	I
	0.344	0.209	0.000	4E-4	II

Порівняння результатів для **колових напружень і, так само, напружень, розрахованих при $\mu = 4$, виявляє їх співпадіння з високою точністю.** На рис. 2 наведено розподіли радіальних (рис. 2a), колових (рис. 2b) та дотичних (рис. 2c) напружень у першому квадранті для випадку $\mu = 4$.

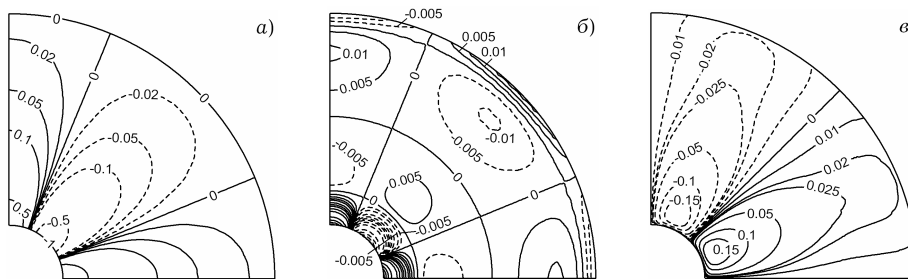


Рис. 2

Під час обчислень встановлено швидку збіжність ітераційних процесів (17), (28).

Приклад 2. Розглянемо приклад, вивчений у роботі [12], коли кільце зазнає сталого тиску на двох діаметрально протилежних ділянках границі $\rho = 1$:

$$p_1 = q_1 = q_2 = 0, \quad p_2 = \begin{cases} p, & \varphi \in V, \\ 0, & \varphi \notin V, \end{cases}$$

де

$$V = \left[\frac{(2\ell + 1)\pi}{2} - \Theta, \frac{(2\ell + 1)\pi}{2} + \Theta \right], \quad \ell = 0, 1, \quad p = \text{const}, \quad \Theta \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right].$$

Обчислення здійснюватимемо для тих же пружних властивостей матеріалу, які розглянуті у попередньому прикладі.

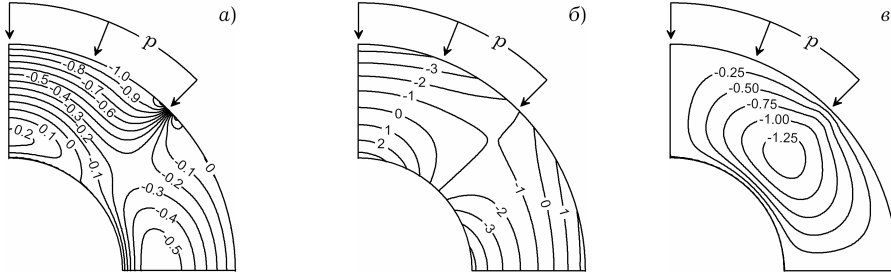


Рис. 3

З рис. 3, на якому зображено розподіли радіальних (рис. 3а), колових (рис. 3б) і дотичних (рис. 3с) напружень, розрахованих при $\Theta = \pi/4$, $\beta = 1.5$, $k = 0.5$ у випадку ПД, у першому квадранті площини, робимо висновок, що, як і слід було очікувати, якісно вони співпадають з отриманими для однорідного кільця [12]. Кількісна ж різниця між напруженнями у перерізах $\varphi = 0, \pi/2$ зображена на рис. 4 для радіальних (рис. 4а) та колових (рис. 4б) напружень, розрахованих у тих же умовах для значень параметра $\beta = 0, \pm 1.5, \pm 2.0$. Спостерігаємо істотний вплив радіальної неоднорідності на розподіл напружень у кільці.

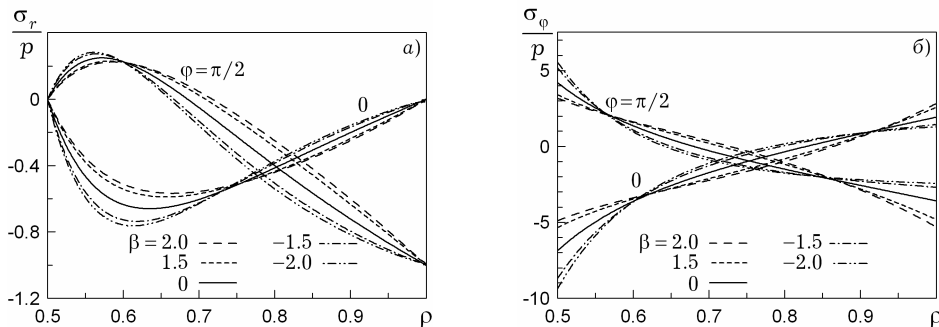


Рис. 4

Про швидку збіжність ітераційних процедур свідчать наступні показники. Наприклад, для ітерацій (17) у випадку $\Theta = \pi/4$, $\beta = 1.5$, $k = 0.5$ відносна похибка між ітераціями $m = 1$ та $m = 2$ не перевищує 12%, а між $m = 2$ і $m = 3$ – 0.8%. Для ітерацій (28) при $n = 2$ – відповідно 16% і 1.4%.

Варто зауважити, що, на відміну від аналогічного випадку навантажень кільцевої області для однорідного матеріалу, у випадку радіальної неоднорідності напруження у кільці за ПД та ПНС різняться між собою. Проте, наприклад, для радіальних напружень при $\Theta = \pi/4$, $\beta = 2$, $k = 0.5$ у перерізах $\varphi = 0, \pi$ ця різниця не перевищує 1.5%, а в перерізах $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$ – 1%. Аналогічні оцінки справедливі і для колових, і для дотичних напружень.

Приклад 3. Розглянемо наостанок розподіл напружень у вільному від силових навантажень кільці з неосесиметричним розподілом температури $T/\tau = 1 + (\rho^2 - k^4/\rho^2) \cos 2\varphi/(1 - k^4)$. Такий розподіл отримано з відповідної стаціонарної задачі теплопровідності [1] для кільця, на внутрішній поверхні якого задано температуру $\tau = \text{const}$, а на зовнішній – $\tau(1 + \cos 2\varphi)$. Прийmemo у цьому прикладі $E = E_0$, $G = G_0$, $\nu = \nu_0$, $\alpha = \alpha_0 \exp(\beta\rho)$, причому G_0, E_0, ν_0, β – сталі. Оскільки модуль зсуву є сталим, то, як було зауважено вище, розвинута методика забезпечує точний аналітичний розв’язок задачі термопружності. Крім того, як показано в [1], розглянуте температурне поле не спричинює напружень у випадку однорідного матеріалу ($\beta = 0$).

На рис. 5 спостерігаємо значний вплив залежності коефіцієнта лінійного температурного видовження від радіальної координати на розподіл радіальних напружень, розрахованих при $\beta = 2$ для різних показників внутрішнього радіуса кільця.

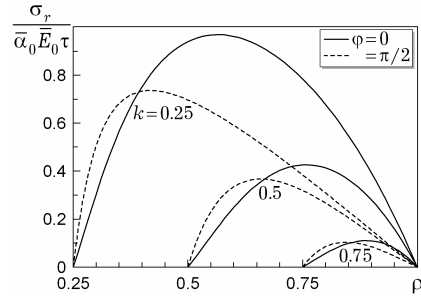


Рис. 5

Висновки. Розвинуто методику побудови розв’язків плоских квазістатичних неосесиметричних задач теорії пружності й термопружності для радіально-неоднорідної кільцевої області, яка ґрунтується на методі безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги, завдяки чому вдається суттєво спростити побудову розв’язку.

Розвинутий ітераційний алгоритм виявив швидку збіжність, що може бути ефективно використано як для теоретичних, так і для практичних інженерних досліджень.

Оскільки не було накладено жодних обмежень на характер функцій, якими задаються властивості матеріалу (окрім існування потрібного порядку похідних принаймні в узагальненому сенсі), методика може бути застосована для широко класу неоднорідних матеріалів.

Нарешті, отримані числові результати виявили значний вплив неоднорідності матеріалу на розподіл напружень в кільці, що потрібно враховувати при моделюванні та розв’язуванні такого класу задач.

Роботу виконано за часткового фінансування згідно з Грантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених (№ GP/F13/0094).

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – Москва: Мир, 1964. – 517 с.
2. Вігак В. М. Прямий метод інтегрування рівнянь плоских задач пружності і термопружності // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 62–67.
3. Вігак В. М. Розв’язування одновимірних задач пружності й термопружності в напруженнях для циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – 40, № 3. – С. 103–107.
4. Вігак В. М., Калиняк Б. М. Дослідження напружень у термочутливих циліндричних тілах // машинознавство. – 1999. – № 9. – С. 10–14.
5. Вігак В. М., Калиняк Б. М. Зведення одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних і термочутливих тіл до інтегральних рівнянь другого роду // Доп. НАН України. – 1998. – № 11. – С. 60–67.
6. Вігак В. М., Пушак Я. С. Інтегрування рівнянь суцільності для двовимірних неосесиметричних задач механіки в кругових областях // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 2000. – № 407. – С. 42–51.
7. Калиняк Б. М. Інтегрування рівнянь одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних циліндричних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 2. – С. 124–131.

8. Пушак Я., Бондарук А., Ричагівський А. Зведення розв'язків задач пружності й термопружності для неоднорідних тіл до інтегральних рівнянь Вольтерра // Мат. проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ, 2000. – Т. 1. – С. 315–318.
9. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
10. Толстов Г. П. Ряды Фурье. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
11. Токовий Ю. В. Побудова аналітичного розв'язку плоскої задачі термопружності для неоднорідної смуги // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2004. – Вип. 8, т. 2, № 6/2. – С. 219–226.
12. Токовий Ю. В., Теслюк А. Б. Розв'язування двовимірних неосесиметричних задач теорії пружності й термопружності для порожнистого циліндра методом безпосереднього інтегрування // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2006. – Вип. 4. – С. 123–132.
13. Alshits V. I., Kirchner H. O. K. Cylindrically anisotropic, radially inhomogeneous elastic materials // Proc. Roy. Soc. Lond. A. – 2001. – **457**. – P. 671–693.
14. Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M. R. General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to nonaxisymmetric steady-state loads // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2003. – **70**. – P. 111–118.
15. Liew K. M., Kitipornchai S., Zhang X. Z., Lim C. W. Analysis of the thermal stress behaviour of functionally graded hollow circular cylinders // Int. J. Solid Struct. – 2003. – **40**. – P. 2355–2380.
16. Michell J. H. On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates // Proc. London Math. Soc. – 1899. – **31**. – P. 100–121.
17. Noda N. Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties // Appl. Mech. Rev. – 1991. – **44**. – P. 383–397.
18. Noda N. Thermal stresses in functionally graded materials // J. Therm. Stresses. – 1999. – **22**. – P. 477–512.
19. Tarn J.-Q. Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads // Int. J. Sol. Struct. – 2001. – **38**. – P. 8189–8206.
20. Tarn J.-Q., Chang H.-H. Extension, torsion, bending, pressuring, and shearing of piezoelectric circular cylinders with radial inhomogeneity // J. Intel. Mater. Syst. Struct. – 2005. – **16**. – P. 631–641.
21. Tokovyy Yu. V., Rychahivskyy A. V. Reduction of plane thermoelasticity problem in inhomogeneous strip to integral Volterra type equation // Math. Model. and Anal. – 2005. – **10**, No 1. – P. 91–100.
22. Vasilenko A. T. Nonaxisymmetric thermal stressed state of nonhomogeneous anisotropic cylinders // Int. Appl. Mech. – 1995. – **31**, No 11. – P. 895–899.
23. Zhang X., Hasebe N. Elasticity solution for a radially nonhomogeneous hollow circular cylinder // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1999. – **66**. – P. 598–606.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОСКОГО НЕОСЕССИМЕТРИЧНОГО ТЕРМОНАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ РАДИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО КОЛЬЦА

Развита методика решения плоских неосесимметричных задач теории упругости и термоупругости в напряжениях для радиально-неоднородных полого цилиндра и диска. Методика основана на интегрировании уравнений равновесия, которые не зависят от свойств материала. Это даёт возможность использования соотношений между напряжениями, полученных для случая однородного материала, вследствие чего поставленные задачи сводятся к ключевым интегральным уравнениям Вольтерра второго рода.

DETERMINATION OF PLANE NON AXIALLY SYMMETRIC THERMAL STRESSES IN RADIALLY INHOMOGENEOUS RING

The technique for solving the plane non-axially symmetric problems of elasticity and thermoelasticity in terms of stresses for radially inhomogeneous hollow cylinder and disk is developed. The technique is based upon integration of the equilibrium equations, which are independent of material properties. The former fact opens the possibility to employ the relations between the stresses, obtained in the case of homogeneous material. As a result, the original problems can be reduced to the governing integral Volterra type equations of second kind.

Ин-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
01.05.07