

ЗМІШУВАННЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ В ПРЯМОКУТНОМУ МІКРОКАНАЛІ

Розглядається квазітривимірна течія Стокса у прямокутному мікроканалі. Задача зводиться до двовимірних гармонічної та бігармонічної задач. Метод суперпозиції виявляється ефективним для розв'язування задач прикладної механіки, що стосуються повільної течії в'язкої рідини у прямокутній порожнині під дією дотичних швидкостей, прикладених на її стінках. Метод ілюструється декількома прикладами.

Метод є необхідним для відшукування істини. <...> Під методом же я розумію точні і прості правила, строге дотримання яких завжди перешкоджає прийняттю хибного за істинне і, без зайвих затрат розумових сил, але поступово і неперервно збільшуючи знання, сприяє тому, що розум досягає істинного пізнання всього, що йому доступне.

Р. Декарт [2, с. 60] (пер. з рос.)

1. Вступ. Дослідження у галузі мікрорідин за останні десять років стали частиною великої науки та великого бізнесу [10, 15, 19, 26, 27]. Мікрорідинні системи, які мають справу із малими (від 10^{-9} до 10^{-18} л) кількостями рідини і течії відбуваються в мікроканалах, поперечні розміри яких варіюються від десятків до сотень мікронів (10^{-6} м), а довжина не перевищує декількох сантиметрів (10^{-6} м), широко вживаються у біотехнології (аналіз молекул DNA та протеїнів, сортування клітин) [7, 26], аналітичній хімії (регулювання хімічних реакцій, сепарація розчинів) [8] та навіть при виявленні наркотиків [16]. Виникли спеціальні терміни *microfluidics*, *lab-on-a-chip* та *micro total analysis systems* (μ TAS) для позначення цих розділів науки та технологій. Створення своєрідної «лабораторії на мікросхемі» є довготерміновою метою досліджень у галузі мікрорідини при побудові портативних клінічних діагностичних систем та вилучення довгих і дорогих лабораторних аналізів. Окрім того, застосування мікрорідинних технологій в клінічній медичній діагностиці дає суттєве збереження коштів. На сьогодні вже існує книга [24] і ряд впливових оглядових статей [5, 6, 14, 17, 18, 20, 25], які містять широку панораму досліджень у галузі мікрорідин. Слід відзначити, що кількість публікацій у цьому напрямку навіть за останні п'ять років перевищує кілька тисяч.

Важливим є те, що завдяки малим розмірам і швидкостям течії рідини є ламінарними з типовим числом Рейнольдса $Re = O(1)$ і з великою точністю можуть описуватися лінійними рівняннями Стокса

$$0 = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

(тут p – тиск; \mathbf{u} – швидкість; ∇ , $\nabla \cdot$ і ∇^2 – відповідно оператори градієнта, дивергенції та Лапласа відповідно), коли рух є настільки повільним, що інерційними силами, які містять квадрати швидкостей, можна знехтувати порівняно з в'язкими силами. Недавня робота [9], у якій використано повні рівняння Нав'є – Стокса та за допомогою чисельного методу проведено детальні розрахунки, свідчить про високу надійність наближення Стокса для цього класу задач.

Основним при цьому стає інтерес щодо отримання можливості вимірювання і контролю процесів переносу та змішування домішок у рідині [15, 18, 20]. Використання мікроканалу як міксеру є привабливим, оскільки такий канал легко інтегрується з іншими мікропроцесорними пристроями. Але змішування на мікрорівні є досить важким процесом; тут не можна застосо-

увати активні пристрої, а процес дифузії є повільним порівняно із часом переносу речовини по каналу, оскільки коефіцієнт дифузії більшості біологічних речовин за величиною є на два порядки нижчим ніж для типових звичайних рідин. У роботі [21] (ця робота є дійсно піонерською, про що свідчить і 453 посилання на неї згідно з даними *ISI Web of Knowledge* на грудень 2007 р.) запропоновано новий тип мікроканалу (рис. 1) з двома окремими вхідними каналами на вході та з повним змішуванням на виході. Аналітична теорія для моделювання процесу змішування у такому міксері, який отримав назву «шаховий скелет риби» (*staggered herringbone mixer, SHM*), була впроваджена у недавній публікації [23]. При цьому було використано аналітичний метод суперпозиції, розвинутий [3, 4, 11–13] для класу двовимірних течій Стокса у прямокутнику одним із авторів цієї статті. Ряд ключових питань при застосуванні цього методу залишився нез'ясованим. Детальне дослідження граничної задачі про (квазі)течію Пуазейля у такому прямокутному мікроканалі є предметом цієї роботи.

2. Постановка задачі та побудова розв'язку. Розглянемо стаціонарну тривимірну течію Стокса в'язкої нестисливої рідини в прямолинійному каналі завдовжки L з прямокутним поперечним перерізом $2a \times 2b$ під дією постійного уздовж осі каналу градієнта тиску.

Нехай поздовжній розмір каналу значно перевищує його поперечні розміри: $L \gg a$, $L \gg b$. Постійний уздовж каналу градієнт тиску приводить у рух рідину в поздовжньому напрямі, при цьому на осі каналу швидкість рідини досягає значення $U_{z,max}$.

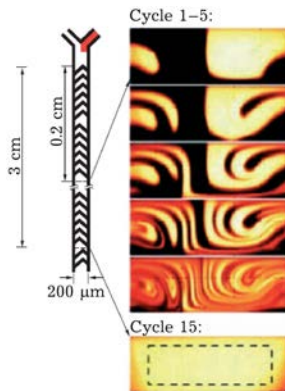


Рис. 1. Експериментальна візуалізація змішування у мікроканалі двох рідин (From [21]. Reprinted with permission from AAAS)

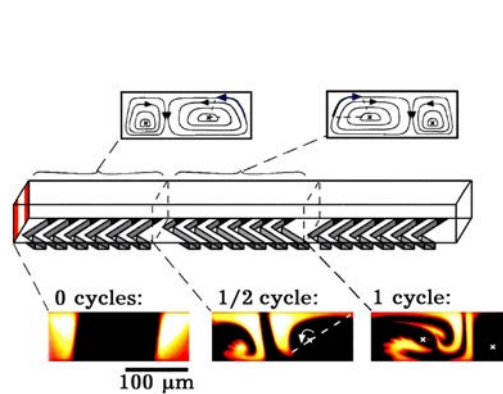


Рис. 2. Схематична діаграма SHM мікроканалу (From [21]. Reprinted with permission from AAAS)

На нижній стінці каналу розміщена періодична система тонких канавок під фіксованим кутом до осі каналу. Поздовжній рух рідини приводить до поперечного руху рідини, що знаходиться біля нижньої межі порожнини. При цьому частина рідини біля нижньої межі ($-a < x < c$) рухається з постійною швидкістю у від'ємному напрямі осі Ox , а частина рідини ($c < x < a$) переміщується з аналогічною швидкістю, але в протилежному напрямі (див. рис. 2).

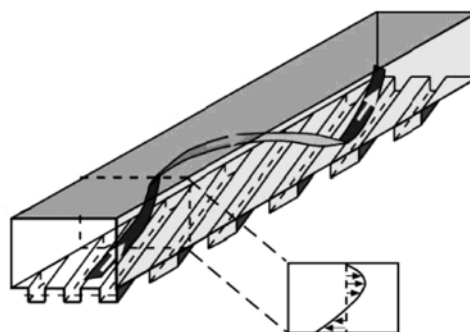


Рис. 3. Структура тривимірної течії в мікроканалі

Нехай система тонких канавок із загальною довжиною 2ℓ розміщується періодично уздовж каналу. При цьому на інтервалі $2n\ell < z < (2n+1)\ell$, де $n = 1, \dots, N$, точка розриву швидкостей руху рідини біля нижньої поверхні має координату $x_1 = c$ ($c > 0$), а на інтервалі $(2n+1)\ell < z < (2n+2)\ell$ точка розриву розміщена в $x_1 = -c$. Загальна довжина каналу складає $L = 2N\ell$, де N – кількість періодичних систем канавок уздовж каналу.

Для проведення подальшого дослідження вважатимемо, що течія рідини є стаціонарною. У ті моменти, коли рідина переміщується з однієї системи канавок в іншу, поле швидкості миттєво міняється з одного стаціонарного режиму на інший.

Оскільки довжина каналу набагато перевищує розміри його поперечно-го перерізу, можна припустити, що поле швидкості течії не залежить від поздовжньої координати:

$$\mathbf{U}(x, y) = \mathbf{i}U(x, y) + \mathbf{j}V(x, y) + \mathbf{k}W(x, y), \quad (2)$$

де $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – система одиничних векторів у вибраній системі координат. У цьому випадку течію можна подати у вигляді суперпозиції двовимірної течії в'язкої нестисливої рідини в поперечному перерізі каналу і течії рідини уздовж осі прямолінійного каналу з прямокутним поперечним перерізом (див. рис. 3).

Розглянемо спочатку течію в'язкої нестисливої рідини в поперечному перерізі прямокутної порожнини (див. рис. 4). Розв'язання задачі в термінах функції течії $\Psi(x, y)$ зводиться до розв'язання бігармонічного рівняння

$$\nabla^2 \nabla^2 \Psi = 0, \quad (3)$$

де $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ є оператором Лапласа

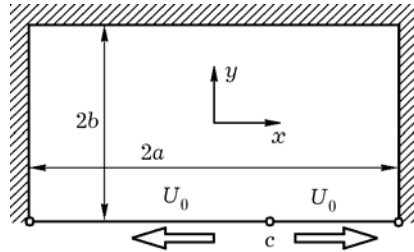


Рис. 4. Поперечний переріз каналу

в прямокутній системі координат. Граничними умовами є умови прилипання рідини на обмежуючих течію поверхнях (рис. 4)

$$\Psi(\pm a, y) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right|_{x=\pm a} = 0,$$

$$\Psi(x, \pm b) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{y=\pm b} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right|_{y=-b} = \begin{cases} -U_0, & -a \leq x \leq c, \\ U_0, & c < x \leq a. \end{cases} \quad (4)$$

Функцію течії у цьому двовимірному випадку можна подати у вигляді суперпозиції чотирьох функцій

$$\Psi(x, y) = \Psi_1(x, y) + \Psi_2(x, y) + \Psi_3(x, y) + \Psi_4(x, y), \quad (5)$$

які відповідають окремим задачам, наведеним на рис. 5. У приведеному виразі $\Psi_1(x, y)$ зображає функцію течії, поле швидкості якої є парним за координатою Ox і непарним за координатою Oy , а $\Psi_2(x, y)$ – функцію течії, поле швидкості якої є парним за обома координатами. Функція $\Psi_3(x, y)$ зображає течію, поле швидкості якої є непарним за координатою Ox і парним за іншою координатою. Нарешті $\Psi_4(x, y)$ зображає функцію течії рідини, поле швидкості якої є непарним за обома координатами.

Детальний опис аналітичних розв'язків цих задач наведено у попередній роботі авторів [3].

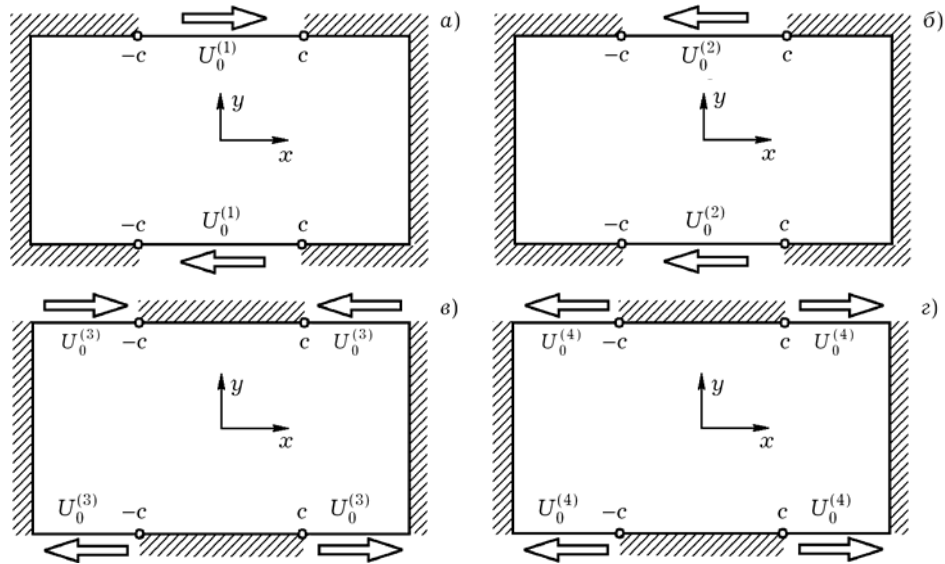


Рис. 5. Граничні умови для різних задач течії рідини в прямокутній порожнині з урахуванням парності й непарності розподілу поля швидкості

Вираз для функції течії (4) в'язкої рідини в поперечному перерізі каналу визначений. Беручи до уваги співвідношення між функцією течії і полем швидкості течії рідини

$$U(x, y) = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V(x, y) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (6)$$

знаходимо вирази для компонент поля швидкості в цій течії.

Розглянемо випадок руху рідини в поперечному перерізі прямокутного каналу з розмірами $a = 2.0$, $b = 1.0$. Нехай права частина ($c = 1.0$) нижньої поверхні рухається в додатному напрямі осі Ox зі швидкістю $U_0 = 1.0$, а ліва її частина з такою ж за модулем швидкістю переміщується у протилежному напрямі.

Для визначення розподілу поля швидкості течії необхідно розв'язати чотири задачі (див. рівняння (5)) з наступними значеннями швидкостей руху меж: $U_0^{(1)} = 0.5$, $U_0^{(2)} = 0.5$, $U_0^{(3)} = 0.5$ і $U_0^{(4)} = 0.5$. При проведенні обчислень у виразах для функції течії кожної із задач використовувалися тільки п'ять доданків в сумах.

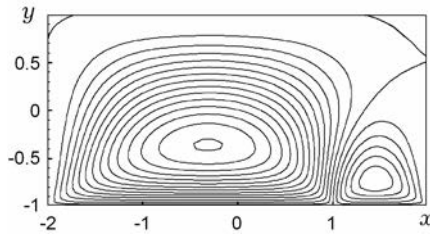


Рис. 6. Розподіл функції течії в поперечному перерізі каналу

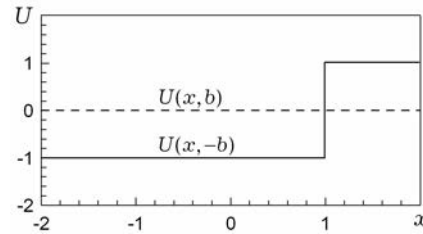


Рис. 7. Значення швидкостей течії рідини біля верхньої $U(x, b)$ і нижньої $U(x, -b)$ границь

Результати розрахунків наведено на рис. 6, на якому зображено лінії рівня функції течії через однакові інтервали, $\Delta \Psi = 0.02$. Видно, що функція течії на межах має однакове значення, $\Psi_S = 0.0$. Вся область течії ділиться на дві великі області, в яких рідина циркулює по замкнутим траєкторіям. Цікаво зазначити, що в лівому верхньому і правому верхньому кутах течії є ще дві замкнуті області, в яких формуються так звані вихори Моффата.

Точність виконання граничних умов для швидкості показана на рис. 7. Суцільною лінією на малюнку показане значення швидкості $U(x, -b)$ рідини на нижній поверхні, а пунктирною лінією нанесено значення швидкості $U(x, b)$ рідини на верхній границі. Чисельні значення швидкості рідини в деяких точках біля обох поверхонь можна знайти в табл. 1. Аналіз показує, що задача про течію в'язкої нестисливої рідини в поперечному перерізі розв'язана точно. Граничні умови виконані з точністю до чотирьох знаків після коми.

Таблиця 1. Виконання граничних умов на верхній і нижній поверхнях каналу

$x \backslash$	0.98	0.99	1.01	1.02	1.98	1.99	2.00
$U(x, b)$	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
$U(x, -b)$	-1.0009	-1.0007	1.0002	1.0002	1.0008	1.0002	1.0035

Розподіл осьової швидкості $W(x, y)$ в поперечному перерізі каналу для течії в'язкої нестисливої рідини (течія Пуазейля) задовольняє рівняння Пуассона

$$\nabla^2 W = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} = -p_0 = \text{const} \quad (7)$$

з граничними умовами

$$\begin{aligned} W(\pm a, y) &= 0, & |y| &\leq b, \\ W(x, b) &= 0, & |x| &\leq a, \\ W(x, -b) &= W_0, & |x| &\leq a. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут W_0 – швидкість руху нижньої границі каналу.

Розв'язком граничної задачі (7), (8) є

$$\begin{aligned} W(x, y) &= p_0 \frac{b^2 - y^2}{2} + \frac{W_0}{2} \left(1 - \frac{y}{b}\right) + \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell-1} A_{\ell} \frac{\cosh \beta_{\ell} x}{\cosh \beta_{\ell} a} \cos \beta_{\ell} y + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} B_m \frac{\cosh \alpha_m x}{\cosh \alpha_m a} \sin \alpha_m y, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$A_{\ell} = (-1)^{\ell+1} \left(-\frac{2p_0}{b\beta_{\ell}^3} - \frac{W_0}{b\beta_{\ell}} \right), \quad B_m = (-1)^{m+1} \frac{W_0}{\alpha_m}, \quad \beta_{\ell} = \frac{(2\ell-1)\pi}{2b}, \quad \alpha_m = \frac{m\pi}{b}.$$

Рис. 8 ілюструє приклад розподілу осьової швидкості $W(x, y)$ течії в'язкої нестисливої рідини в прямокутному каналі з розмірами $a = 2.0$, $b = 1.0$ для $p_0 = 1.0$ і швидкості руху нижньої границі $W_0 = 0.4$. Лінії рівня осьової швидкості нанесено через рівні інтервали, $\Delta W = 0.05$. Видно, що швидкості руху рідини на верхній і бічній поверхнях дорівнюють нулеві. На нижній поверхні швидкість течії співпадає із швидкістю руху границі. Аналіз чисельних значень показує, що граничні умови виконуються на всіх поверхнях з точністю, як мінімум, до трьох знаків після коми.

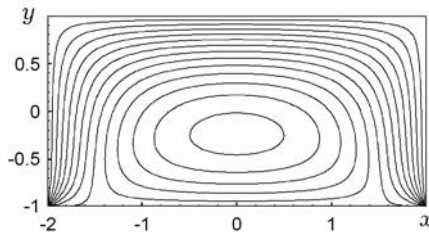


Рис. 8. Розподіл осьової швидкості в поперечному перерізі каналу

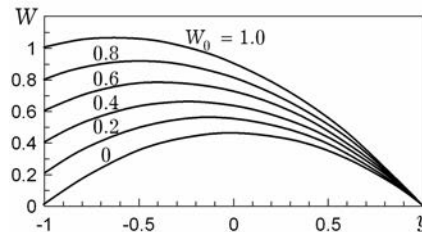


Рис. 9. Залежність осьової швидкості течії каналу від швидкості руху нижньої границі

На рис. 9 показано профілі осьової швидкості течії рідини в прямокутному каналі для різних значень швидкості руху нижньої границі при незмінному $p_0 = 1.0$. Видно, що зі збільшенням швидкості руху границі максимум осьової швидкості поступово зміщується у бік рухомої границі.

3. Адвекція пасивної домішки в каналі. Траєкторія руху пасивної рідкої частинки визначається швидкістю течії рідини в точці, в якій знаходиться частинка. Якщо система складається з N частинок, то траєкторії руху кожної частинки визначаються системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку (задача Коші)

$$\frac{dX_i}{dt} = U(X_i, Y_i), \quad \frac{dY_i}{dt} = V(X_i, Y_i), \quad \frac{dZ_i}{dt} = W(X_i, Y_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (10)$$

з відповідними початковими умовами: $X_i(0) = X_i^0$, $Y_i(0) = Y_i^0$, $Z_i(0) = Z_i^0$. У наведених рівняннях $U(x, y)$ і $V(x, y)$ – компоненти поля швидкості течії рідини в поперечному перерізі каналу, які отримуємо після диференціювання рівнянь для функції течії (6) за відповідною координатою. Компонента $W(x, y)$ визначає осьову швидкість течії.

Для визначення положення частинок після проходження періоду системи канавок (див. рис. 1) необхідно інтегрувати рівняння руху кожної частинки протягом певного інтервалу часу. Зазначимо, що цей інтервал часу є індивідуальним для кожної частинки течії, оскільки швидкість осьового зсуву частинки визначається положенням частинки в поперечному перерізі каналу. Після проходження частинки через фіксований переріз необхідно проводити процедуру уточнення координат частинок. Таким чином, чисельне розв'язання рівнянь руху (10) пов'язане з рядом певних труднощів.

Процес обчислень можна істотно спростити, якщо скористатися методом Хенона для розв'язування систем диференціальних рівнянь. Оскільки вирази для поля швидкості течії рідини не залежать від осьового положення частинок, інтегрування рівнянь руху зручно проводити не за часом, а за осьовою координатою.

Розділимо перше і друге рівняння (39) руху частинки на третє рівняння цієї системи. Внаслідок цього одержуємо таку систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dX_i}{dZ_i} = \frac{U(X_i, Y_i)}{W(X_i, Y_i)}, \quad \frac{dY_i}{dZ_i} = \frac{V(X_i, Y_i)}{W(X_i, Y_i)}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (11)$$

з аналогічними початковими умовами. Проте при цьому інтегрування задачі необхідно проводити від одного перерізу каналу до наступного перерізу і ніяких процедур уточнення координат частинок проводити не треба. Зазначимо, що в цьому випадку загальна кількість рівнянь зменшується на N порівняно з системою (10).

Точність розв'язку задачі про адвекцію пасивної домішки можна оцінити при порівнянні чисельних результатів з експериментальними даними [23]. Експерименти проводилися в тонкому каналі ширини $a = 100$ мкм, висоти $b = 42.5$ мкм і довжини $L = 20$ мм. На одній з поверхонь каналу виконана система канавок (див. рис. 1) з періодом $\ell = 4$ мм і зломом, зміщеним щодо центру каналу на відстань $c = 33$ мкм. Канавки нанесені під кутом $\Theta = 45^\circ$ щодо осі каналу. Вимірювання показують, що швидкість, наведена системою канавок в поперечному напрямі, залежить від форми, глибини і кількості канавок, що припадають на одиницю довжини. У досліді, що розглядається нижче, $U_0 = 0.07W_{\max}$, де W_{\max} – максимальна осьова швидкість течії у поперечному перерізі каналу.

Результати експериментальних досліджень [21] наведено на рис. 10.

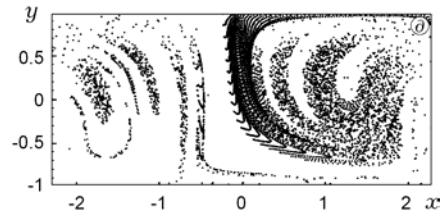
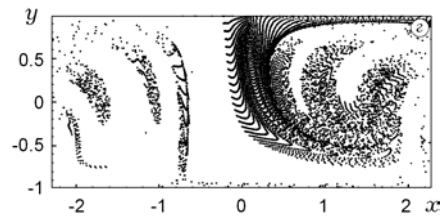
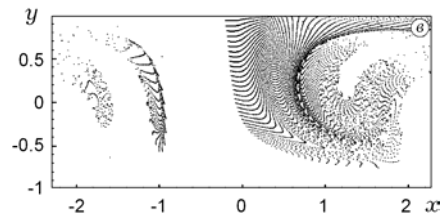
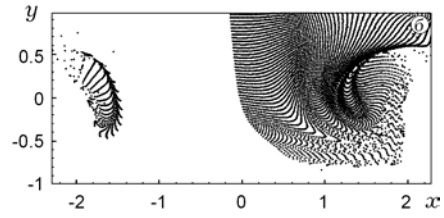
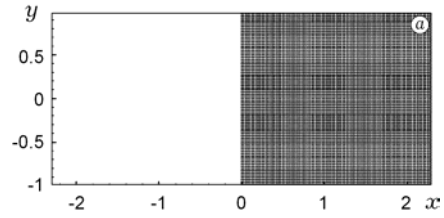
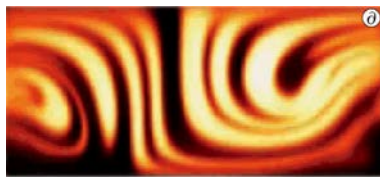
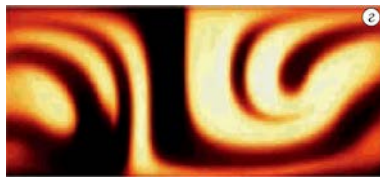
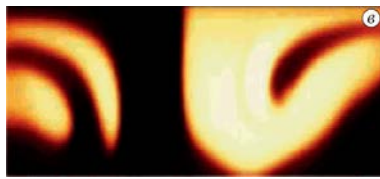
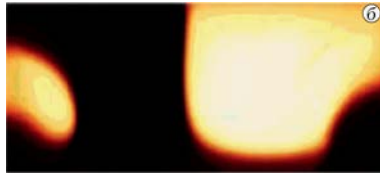
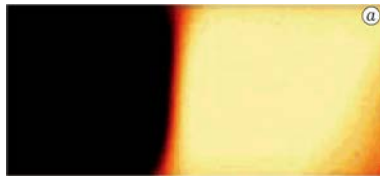


Рис. 10. Змішування пасивної рідини в експерименті (From [21]. Reprinted with permission from AAAS)

Рис. 11. Моделювання процесу змішування пасивної рідини в прямокутному каналі

У початковий момент (рис. 10а) в канал поступає частина забарвленої рідини, яка заповнює праву половину каналу. При русі рідини уздовж каналу частина прилеглої до нижньої границі рідини починає переміщуватися в поперечному напрямі. Такий рух призводить до перемішування забарвленої і незабарвленої рідин. Структуру течії, що виходить після першого періоду руху рідини, показано на рис. 10б. Видно, що частина незабарвленої рідини потрапляє в область, що прилягає до правої стінки каналу, тоді як мала частина забарвленої рідини перемістилася до лівої межі. Після другого періоду дії канавок (рис. 10в) на нижній поверхні в лівій частині каналу появляється додаткова частина забарвленої області. На рис. 10г, який одержаний в перерізі каналу після третього періоду, видно, що процес перемі-

шування рідини протікає достатньо інтенсивно. У поперечному перерізі каналу виразно видно шарову структуру течії, що складається із забарвленої і незабарвленої частин рідини. Після четвертого періоду дії системи каналок (рис. 10δ) видно, що структура течії істотно ускладнилася і процес перемішування можна вважати завершеним.

Чисельне моделювання процесу перемішування показано на рис. 11 з відповідними індексами. У початковий момент праву частину каналу було заповнено 7000 маркерами. Задачу розв'язували чисельним методом Рунге – Кутта – Фельберга четвертого-п'ятого порядку з адаптованим вибором кроку інтегрування. Видно, що після першого періоду дії каналок на нижній поверхні в поперечному перерізі сформувалися дві області, які мають структуру, аналогічну до тієї, що спостерігалася в експерименті. Форми шарових структур течії після другого і третього періодів добре збігаються з експериментальними даними.

1. Бернинг Р., Мелешко В. В. Течение Стокса в прямоугольном канале с шероховатым дном // Прикл. гидромеханика. – 2007. – **9(81)**, № 4. – С. 3–8.
2. Декарт Р. Правила для руководства ума. – Москва–Ленинград: Соцэкгиз, 1936. – 176 с.
3. Мелешко В. В., Гуржій О. А., Безим'янна Е. М. Електро-осмотичні течії в'язкої рідини у прямокутній порожнині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 1. – С. 107–116.
4. Мелешко В. В., ван Хейст Г. Я. Ф. Змішування в'язкої рідини у прямокутній порожнині // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 1. – С. 43–52.
5. Auroux P.-A., Iossifidis D., Reyes D. R., Manz A. Micro total analysis systems. 2. Analytical standard operations and applications // *Analyt. Chem.* – 2002. – **74**. – P. 2637–2652.
6. Beebe D. J., Mensing G. A., Walker G. M. Physics and applications of microfluidics in biology // *Annu. Rev. Biomed. Eng.* – 2002. – **4**. – P. 261–286.
7. El-Ali J., Sorger P. K., Jensen K. F. Cells on chips // *Nature*. – 2006. – **442**. – P. 403–411.
8. Janasek D., Franzke J., Manz A. Scaling and the design of miniaturized chemical-analysis systems // *Nature*. – 2006. – **442**. – P. 374–380.
9. Kang K., Chevray R. Visualization of fluid mixing in microchannels // *IEEE Comput. Graphics Appl.* – 2005. – **25**, No. 6. – P. 16–20.
10. Knight J. Honey, I shrunk the lab // *Nature*. – 2002. – **408**. – P. 474–475.
11. Meleshko V. V. Steady Stokes flow in a rectangular cavity // *Proc. R. Soc. London.* – 1996. – **A452**. – P. 1999–2022.
12. Meleshko V. V. Biharmonic problem in a rectangle // *Appl. Sci. Res.* – 1998. – **58**. – P. 217–249.
13. Meleshko V. V., Gomilko A. M. Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle // *Proc. R. Soc. London.* – 1997. – **A453**. – P. 2139–2160.
14. Nguyen N.-T., Wu Z. Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip // *J. Micromech. Microeng.* – 2005. – **15**. – P. R1–R16.
15. Ottino J. D., Wiggins S. Designing optimal micromixers // *Science*. – 2004. – **305**. – P. 485–486.
16. Phil J., Karlsson M., Chiu D. T. Microfluidic technologies in drug discovery // *Drug Discov. Today*. – 2005. – **10**. – P. 1377–1383.
17. Reyes D. R., Iossifidis D., Auroux P.-A., Manz A. Micro total analysis systems. 1. Introduction, theory, and technology // *Analyt. Chem.* – 2002. – **74**. – P. 2623–2636.
18. Squires T. M., Quake S. R. Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale // *Rev. Mod. Phys.* – 2005. – **77**. – P. 977–1026.
19. Stone H. A., Kim S. Microfluidics: Basic issues, applications, and challenges // *AIChE J.* – 2001. – **47**. – P. 1250–1254.
20. Stone H. A., Stroock A. D., Ajdari A. Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 2004. – **36**. – P. 381–411.
21. Stroock A. D., Dertinger S. K. W., Ajdari A., Mezić I., Stone H. A., Whitesides G. M. Chaotic mixer for microchannels // *Science*. – 2002. – **295**. – P. 647–651.
22. Stroock A. D., Dertinger S. K., Whitesides G. M., Ajdari A. Patterning flows using grooved surfaces // *Analyt. Chem.* – 2002. – **74**. – P. 5306–5312.

23. *Stroock A. D., McGraw G. J.* Investigation of the staggered herringbone mixer with a simple analytical model // *Phil. Trans. R. Soc. London.* – 2004. – **A362.** – P. 971–986.
24. *Tabeling P.* Introduction to microfluidics. – Oxford: Oxford Univ. Press, 2005. – 312 p.
25. *Vilkner T., Janasek D., Manz A.* Micro total analysis systems. Recent developments // *Analyt. Chem.* – 2004. – **76.** – P. 3373–3385.
26. *Whitesides G. M.* The origins and the future of microfluidics // *Nature.* – 2006. – **442.** – P. 368–373.
27. *Whitesides G. M., Stroock A. D.* Flexible methods for microfluidics // *Phys. Today.* – 2001. – **54.** – P. 42–48.

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ МИКРОКАНАЛЕ

Рассматривается квазитрехмерное течение Стокса в прямоугольном микроканале. Задача сводится к классической двумерной бигармонической задаче. Метод суперпозиции оказывается эффективным для решения задач механики микрожидкостей в полости под действием касательных скоростей, приложенным на ее стенках. Метод проиллюстрирован несколькими примерами.

MIXING OF VISCOUS FLUID IN RECTANGULAR MICROCHANNEL

The three-dimensional time-independent Stokes flow driven by a uniform pressure gradient in a rectangular microchannel is studied by the method of superposition. This method proved to be effective for solving mechanical problems concerning the creeping flow of viscous fluid in a rectangular cavity under the action of tangential velocities applied along its walls. The method is illustrated by several examples.

¹ Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ,

² Ін-т гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано

02.12.07