

НЕОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ДИСКООБРАЗНЫХ ТРЕЩИН НОРМАЛЬНОГО ОТРЫВА В ТЕЛЕ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Исследовано предельное равновесие предварительно напряженного бесконечно-го материала, содержащего периодическую систему параллельных соосных круговых трещин, находящихся под действием произвольной нормальной нагрузки. В рамках трехмерной линеаризованной механики деформируемого твердого тела выполнена постановка задачи, получены разрешающие интегральные уравнения Фредгольма второго рода и выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в окрестностях трещин. Для несжимаемого высокоэластического материала с упругим потенциалом Бартенева – Хазановича численно проанализирована зависимость коэффициентов интенсивности напряжений от начальных напряжений и геометрических параметров задачи.

1. Введение. Задачи о разрушении материалов с начальными (остаточными) напряжениями, действующими вдоль поверхностей трещин, относятся к неклассическим проблемам механики разрушения, поскольку их нельзя адекватно описать в рамках классической линейной механики трещин [5, 6]. Это связано с тем, что из решения соответствующих задач линейной теории упругости получаем, что составляющие нагрузки, направленные параллельно плоскостям трещин, не входят в выражения для коэффициентов интенсивности напряжений и величин раскрытия трещин и, следовательно, не учитываются в классических критериях разрушения типа Гриффитса – Ирвина или критического раскрытия трещин.

В работах [5, 6, 8, 9] для исследования указанных классов задач были предложены подходы в рамках трехмерной линеаризованной механики деформируемого твердого тела. При этом сформулированный в указанных работах критерий хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями является аналогом соответствующего критерия Гриффитса – Ирвина. К настоящему времени с использованием указанных подходов получены решения отдельных статических и динамических задач, которые обнаружили новые механические эффекты, связанные с влиянием напряжений, действующих вдоль трещин [2–6, 11].

Ниже с использованием линеаризованных соотношений рассмотрена неосесимметричная задача о периодической системе соосных круговых трещин нормального отрыва в бесконечном предварительно напряженном материале. Задача сведена отдельно для каждой гармоники по окружной координате к парным интегральным уравнениям, а затем к разрешающим интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Приведены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений и проанализирована их зависимость от начальных напряжений и геометрических параметров задачи.

2. Постановка задачи. Исследование задачи будем производить в лагранжевых координатах $x_j, j = 1, 2, 3$, которые в естественном (недеформированном) напряженно-деформированном состоянии совпадают с декартовыми. Кроме того, будем использовать такие обозначения: S_{ij}^0 – компоненты симметричного тензора напряжений, отнесенные к единице площади тела в недеформированном (естественном) состоянии; u_j^0 – компоненты вектора перемещений, соответствующие начальным напряжениям S_{ij}^0 ; t_{ij} – компоненты несимметричного тензора напряжений Пиолы – Кирхгофа, которые отнесены к единице площади тела в недеформированном состоянии.

Рассмотрим бесконечный ряд параллельных соосных трещин одинакового радиуса a , расположенных в параллельных плоскостях $x_3 = \text{const}$:

$$\{r < a, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad x_3 = 2hn, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (1)$$

где r, θ, x_3 – круговые цилиндрические координаты, получаемые из декартовых x_j .

Будем предполагать, что под действием одинаковых начальных напряжений вдоль осей Ox_1, Ox_2 в материале реализуется однородное начальное напряженно-деформированное состояние, которое характеризуется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} S_{33}^0 &= 0, & S_{11}^0 &= S_{22}^0 = \text{const} \neq 0, & u_j^0 &= \delta_{mj}(\lambda_j - 1)x_m, \\ \lambda_j &= \text{const}, & \lambda_1 &= \lambda_2 \neq \lambda_3, \end{aligned} \quad (2)$$

здесь λ_j – коэффициенты удлинения (укорочения) вдоль координатных осей x_j .

Как и в линейной механике разрушения материалов без начальных напряжений [10], под трещинами нормального отрыва понимаем трещины, к поверхностям которых симметрично относительно плоскостей трещин приложены нормальные нагрузки. Предполагаем, что на берегах трещин имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} t_{33} &= -\sigma(r, \theta), & t_{3r} &= 0, & t_{3\theta} &= 0, & x_3 &= (2hn)_{\pm}, \\ & & & & & & r &< a, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \end{aligned} \quad (3)$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а нижними индексами «+» и «-» обозначены соответствующие берега трещин.

В рассматриваемом случае периодической системы соосных параллельных трещин при двухосном равномерном нагружении вдоль плоскостей этих трещин имеет место симметрия геометрической и силовой схем задачи относительно плоскости $x_3 = 0$. Кроме того, в силу периодичности геометрической и силовой схем задачи компоненты тензора напряжений и вектора перемещений будут периодическими (с периодом $2h$) функциями по переменной x_3 . Поэтому, используя указанные условия симметрии и периодичности, сводим исходную задачу к задаче для слоя $0 \leq x_3 \leq h$ со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} u_3 &= 0, & x_3 &= 0, & 0 \leq \theta < 2\pi, & r > a, \\ t_{33} &= -\sigma(r, \theta), & x_3 &= 0, & 0 \leq \theta < 2\pi, & r < a, \\ t_{3r} &= 0, \quad t_{3\theta} = 0, & x_3 &= 0, & 0 \leq \theta < 2\pi, & 0 \leq r < \infty, \\ u_3 &= 0, \quad t_{3r} = 0, \quad t_{3\theta} = 0, & x_3 &= h, & 0 \leq \theta < 2\pi, & 0 \leq r < \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

В [5, 6] для случая однородного начального состояния (2) построены представления общих решений линеаризованных уравнений равновесия через гармонические потенциальные функции; при этом вид этих представлений зависит от корней характеристического уравнения. Так, в случае *неравных корней* характеристического уравнения указанные представления в круговой цилиндрической системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta}, & u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}, \\ u_3 &= \frac{m_1^0}{\sqrt{n_1^0}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + \frac{m_2^0}{\sqrt{n_2^0}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}, & t_{33} &= C_{44}^0 \left(d_1^0 \ell_1^0 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + d_2^0 \ell_2^0 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t_{3r} &= C_{44}^0 \left(\frac{d_1^0}{\sqrt{n_1^0}} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z_1} + \frac{d_2^0}{\sqrt{n_2^0}} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z_2} - \frac{d_3^0}{\sqrt{n_3^0}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \theta \partial z_3} \right), \\
t_{3\theta} &= C_{44}^0 \left(\frac{d_1^0}{\sqrt{n_1^0}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta \partial z_1} + \frac{d_2^0}{\sqrt{n_2^0}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta \partial z_2} + \frac{d_3^0}{\sqrt{n_3^0}} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z_3} \right), \\
z_i &= \frac{1}{\sqrt{n_i}} x_3, \quad i = 1, 2,
\end{aligned} \tag{5}$$

где φ_j , $j = 1, 2, 3$, – гармонические функции, удовлетворяющие уравнениям Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} \right) \varphi_j(r, \theta, z_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

а величины C_{44}^0 , n_i^0 , m_i^0 , ℓ_i^0 , d_i^0 , $i = 1, 2$, определяются выбором модели материала и зависят от величин начальных деформаций [5, 6].

Для случая *равных корней* характеристического уравнения имеем следующие представления:

$$\begin{aligned}
u_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - z_1 \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta}, & u_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - z_1 \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}, \\
u_3 &= \frac{m_1^0 - m_2^0 + 1}{\sqrt{n_1^0}} F - \frac{m_1^0}{\sqrt{n_1^0}} \Phi - \frac{m_1^0}{\sqrt{n_1^0}} z_1 \frac{\partial F}{\partial z_1}, \\
t_{33} &= C_{44}^0 \left[(d_1^0 \ell_1^0 - d_2^0 \ell_2^0) \frac{\partial F}{\partial z_1} - d_1^0 \ell_1^0 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - d_1^0 \ell_1^0 z_1 \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} \right], \\
t_{3r} &= C_{44}^0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_1^0}} \frac{\partial}{\partial r} [(d_1^0 - d_2^0) F - d_1^0 \Phi] - \frac{d_1^0}{\sqrt{n_1^0}} z_1 \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z_1} - \frac{d_3^0}{\sqrt{n_3^0}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \theta \partial z_3} \right\}, \\
t_{3\theta} &= C_{44}^0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_1^0}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [(d_1^0 - d_2^0) F - d_1^0 \Phi] - \frac{d_1^0}{\sqrt{n_1^0}} \frac{1}{r} z_1 \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial z_1} + \frac{d_3^0}{\sqrt{n_3^0}} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z_3} \right\}, \\
\Phi &\equiv \frac{\partial \varphi}{\partial z_1},
\end{aligned} \tag{6}$$

где φ , F , Φ , φ_3 – гармонические функции.

Подставив представления общих решений (5), (6) в условия (4), получим граничные условия для гармонических в слое $0 \leq x_3 \leq h$ потенциальных функций на гранях указанного слоя. Для случая *неравных корней* характеристического уравнения они имеют вид (для всех соотношений $0 \leq \theta < 2\pi$):

$$\begin{aligned}
\frac{m_1^0}{\sqrt{n_1^0}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + \frac{m_2^0}{\sqrt{n_2^0}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} &= 0, & z_1 = z_2 = 0, \quad r > a, \\
C_{44}^0 \left(d_1^0 \ell_1^0 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + d_2^0 \ell_2^0 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2^2} \right) &= -\sigma(r, \theta), & z_1 = z_2 = 0, \quad r < a, \\
C_{44}^0 \left(\frac{d_1^0}{\sqrt{n_1^0}} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z_1} + \frac{d_2^0}{\sqrt{n_2^0}} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z_2} - \frac{d_3^0}{\sqrt{n_3^0}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \theta \partial z_3} \right) &= 0, \\
z_1 = z_2 = z_3 = 0, & \quad 0 \leq r < \infty, \\
C_{44}^0 \left(\frac{d_1^0}{\sqrt{n_1^0}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta \partial z_1} + \frac{d_2^0}{\sqrt{n_2^0}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta \partial z_2} + \frac{d_3^0}{\sqrt{n_3^0}} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z_3} \right) &= 0, \\
z_1 = z_2 = z_3 = 0, & \quad 0 \leq r < \infty,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{m_1^0}{\sqrt{n_1^0}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + \frac{m_2^0}{\sqrt{n_2^0}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} &= 0, & z_1 = h_1, \quad z_2 = h_2, \quad 0 \leq r < \infty, \\
C_{44}^0 \left(\frac{d_1^0}{\sqrt{n_1^0}} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z_1} + \frac{d_2^0}{\sqrt{n_2^0}} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z_2} - \frac{d_3^0}{\sqrt{n_3^0}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \theta \partial z_3} \right) &= 0, \\
z_1 = h_1, \quad z_2 = h_2, \quad z_3 = h_3, \quad 0 \leq r < \infty, \\
C_{44}^0 \left(\frac{d_1^0}{\sqrt{n_1^0}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta \partial z_1} + \frac{d_2^0}{\sqrt{n_2^0}} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta \partial z_2} + \frac{d_3^0}{\sqrt{n_3^0}} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z_3} \right) &= 0, \\
z_1 = h_1, \quad z_2 = h_2, \quad z_3 = h_3, \quad 0 \leq r < \infty, \\
h_i = \frac{1}{\sqrt{n_i}} h, \quad i = 1, 2, 3. & \tag{7}
\end{aligned}$$

3. Получение парных интегральных уравнений для n -й гармоники.

Выразим гармонические потенциалы, фигурирующие в представлениях общих решений (5), (6), в виде рядов Фурье по окружной координате θ с коэффициентами в виде интегральных разложений Фурье – Ханкеля по координатам z_i , r соответствующего гармоники по θ порядка:

– для неравных корней

$$\begin{aligned}
\varphi_1(r, \theta, z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) \int_0^{\infty} \left[A_n^{(1)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h_1 - z_1) + \right. \\
&\quad \left. + A_n^{(2)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h_1 - z_1) \right] J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_1}, \\
\varphi_2(r, \theta, z_2) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) \int_0^{\infty} \left[B_n^{(1)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h_2 - z_2) + \right. \\
&\quad \left. + B_n^{(2)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h_2 - z_2) \right] J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_2}, \\
\varphi_3(r, \theta, z_3) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n\theta) \int_0^{\infty} \left[C_n^{(1)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h_3 - z_3) + \right. \\
&\quad \left. + C_n^{(2)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h_3 - z_3) \right] J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_3}; \tag{8}
\end{aligned}$$

– для равных корней

$$\begin{aligned}
\varphi(r, \theta, z_1) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) \int_0^{\infty} \left[B_n^{(1)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h_1 - z_1) + \right. \\
&\quad \left. + B_n^{(2)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h_1 - z_1) \right] J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_1}, \\
F(r, \theta, z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) \int_0^{\infty} \left[A_n^{(1)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h_2 - z_2) + \right. \\
&\quad \left. + A_n^{(2)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h_2 - z_2) \right] J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h_2}, \\
\Phi(r, \theta, z_1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) \int_0^{\infty} \left[B_n^{(1)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h_1 - z_1) + \right. \\
&\quad \left. + B_n^{(2)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h_1 - z_1) \right] J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\operatorname{sh} \lambda h_1},
\end{aligned}$$

$$\varphi_3(r, \theta, z_3) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin(n\theta) \int_0^{\infty} \left[C_n^{(1)}(\lambda) \operatorname{ch} \lambda(h_3 - z_3) + C_n^{(2)}(\lambda) \operatorname{sh} \lambda(h_3 - z_3) \right] J_n(\lambda r) \frac{d\lambda}{\lambda \operatorname{sh} \lambda h_3}. \quad (9)$$

Также представим в виде ряда Фурье по координате θ функцию $\sigma(r, \theta)$, фигурирующую в граничных условиях (4) как напряжения на берегах трещины:

$$\sigma(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta) \sigma_n(r). \quad (10)$$

Удовлетворяя граничным условиям, заданным на всей области $x_3 = \text{const}$ (условия (7₃)–(7₇)), получим пять линейных уравнений, связывающих неизвестные функции $A_n^{(i)}(\lambda)$, $B_n^{(i)}(\lambda)$, $C_n^{(i)}(\lambda)$, $i = 1, 2$, которые позволяют выразить пять из указанных функций через шестую:

– для *неравных корней*

$$C_n^{(1)}(\lambda) = 0, \quad C_n^{(2)}(\lambda) = 0, \quad A_n^{(2)}(\lambda) = 0, \quad B_n^{(2)}(\lambda) = 0, \\ B_n^{(1)}(\lambda) = -\frac{(n_1^0)^{-1/2} d_1^0}{(n_2^0)^{-1/2} d_2^0} A_n^{(1)}(\lambda); \quad (11)$$

– для *равных корней*

$$C_n^{(1)}(\lambda) = 0, \quad C_n^{(2)}(\lambda) = 0, \quad A_n^{(1)}(\lambda) = 0, \quad B_n^{(1)}(\lambda) = \mu_1 A_n^{(2)}(\lambda), \\ B_n^{(2)}(\lambda) = \left[\left(1 - \frac{d_2^0}{d_1^0} \right) - \mu_1 \operatorname{cth} \mu_1 \right] A_n^{(2)}(\lambda), \quad \mu_1 = \lambda h_1. \quad (12)$$

Из оставшихся двух граничных условий (первые два уравнения из (7)) получим для каждой n -й гармоники по окружной координате θ парные интегральные уравнения

$$\int_0^{\infty} \lambda A_n(\lambda) [1 - g(\lambda)] J_n(\lambda r) d\lambda = \Sigma_n(r), \quad r < a, \\ \int_0^{\infty} A_n(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda = 0, \quad r > a, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где

– для *неравных корней*

$$A_n(\lambda) = A_n^{(1)}(\lambda), \quad \Sigma_n(r) = -\frac{1}{C_{44}^0 d_1^0 \ell_1^0} \frac{k_1}{k} \sigma_n(r), \\ g(\lambda) = \frac{1}{k} \left[k_2 \frac{e^{-\mu_2}}{\operatorname{sh} \mu_2} - k_1 \frac{e^{-\mu_1}}{\operatorname{sh} \mu_1} \right], \quad k_1 \equiv \frac{\ell_1^0}{\sqrt{n_2^0}}, \quad k_2 \equiv \frac{\ell_2^0}{\sqrt{n_1^0}}, \quad k \equiv k_1 - k_2, \\ \mu_i = \frac{1}{\sqrt{n_i^0}} \lambda h, \quad i = 1, 2; \quad (14)$$

– для *равных корней*

$$A_n(\lambda) = A_n^{(2)}(\lambda), \quad \Sigma_n(r) = \frac{1}{C_{44}^0 d_1^0 \ell_1^0} \frac{1}{k} \sigma_n(r), \\ g(\lambda) = -\frac{e^{-\mu_1}}{\operatorname{sh} \mu_1} - \frac{\mu_1}{k} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \mu_1}, \quad k \equiv \frac{d_2^0 (\ell_1^0 - \ell_2^0)}{d_1^0 \ell_1^0}, \quad \mu_1 = \frac{1}{\sqrt{n_1^0}} \lambda h. \quad (15)$$

4. Построение интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Будем решать систему парных интегральных уравнений (13) методом подстановки [7]. В соответствии с ним будем выбирать решение в виде, который позволяет тождественно удовлетворить второе из уравнений (13):

$$A_n(\lambda) = \sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}} \int_0^a \sqrt{t} \omega_n(t) J_{n+1/2}(\lambda t) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

где $\omega_n(t)$ – неизвестные функции, непрерывные вместе со своими первыми производными на интервале $[0, a]$.

Подставив выражения (16) в первое из уравнений (13), получим соотношение

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left[\sqrt{\frac{\pi\lambda}{2}} \int_0^a \sqrt{t} \omega_n(t) J_{n+1/2}(\lambda t) dt \right] J_n(\lambda r) \lambda d\lambda = \\ & = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \lambda^{3/2} g(\lambda) \left[\int_0^a \sqrt{t} \omega_n(t) J_{n+1/2}(\lambda t) dt \right] J_n(\lambda r) \lambda d\lambda + \Sigma_n(r). \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая соотношение

$$-r^{-n-1/2} \frac{d}{dr} [r^{-n+1/2} J_{n-1/2}(\lambda r)] = \lambda J_{n+1/2}(\lambda r) \quad (18)$$

и значение разрывного интеграла Вебера – Шафхейтлина

$$\int_0^\infty \sqrt{\lambda} J_n(\lambda r) J_{n-1/2}(\lambda t) d\lambda = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < t, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{t^{n-1/2}}{r^n \sqrt{r^2 - t^2}}, & 0 \leq t < r, \end{cases} \quad (19)$$

интеграл в левой части (17) приводим к виду

$$r^{-n} \int_0^r \frac{\tilde{\omega}_n(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt, \quad \text{где} \quad \tilde{\omega}_n(t) \equiv \frac{d}{dt} [t^n \omega_n(t)]. \quad (20)$$

Умножая обе части уравнения (17) на r^n и делая в левой части этого уравнения подстановку $t = r \sin \theta$, получаем уравнения

$$\int_0^{\pi/2} \tilde{\omega}_n(r \sin \theta) d\theta = N(r), \quad r < a, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

где

$$N(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \left[\int_0^a \sqrt{t} \omega_n(t) J_{n+1/2}(\lambda t) dt \right] r^n \lambda^{3/2} g(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda + r^n \Sigma_n(r).$$

Учитывая, что уравнение Шлемильха вида $\int_0^{\pi/2} f(r \sin \theta) d\theta = N(r)$ имеет

решение $f(x) = \frac{2}{\pi} \left[N(0) + x \int_0^{\pi/2} N'(x \sin \theta) d\theta \right]$, и применяя интеграл Солина

$\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta J_{n-1}(\lambda x \sin \theta) d\theta = \sqrt{\frac{\pi}{2\lambda x}} J_{n-1/2}(\lambda x)$, из (17) получаем уравнения

Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_n(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^a \tilde{\omega}_n(t) \mathcal{K}_n(x, t) dt &= \frac{2}{\pi} x \int_0^{\pi/2} \tilde{\Sigma}'_n(x \sin \theta) d\theta, \\ & 0 \leq x \leq a, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (22)$$

с ядрами

$$\mathcal{K}_n(x, t) = -\frac{\pi}{2} x^{n+1/2} \int_0^\infty [a^{-n+1/2} J_{n-1/2}(\lambda a) J_{n-1/2}(\lambda x) - t^{-n+1/2} J_{n-1/2}(\lambda t) J_{n-1/2}(\lambda x)] \lambda g(\lambda) d\lambda, \quad (23)$$

где $\tilde{\Sigma}'_n(x) \equiv \frac{d}{dx} [x^n \Sigma_n(x)]$, а функции $\Sigma_n(x)$ и $g(\lambda)$ определяются согласно (14) для *неравных* и (15) – для *равных* корней характеристического уравнения.

5. Определение коэффициентов интенсивности напряжений. Рассмотрим значения компонент тензора напряжений $t_{33}, t_{3r}, t_{3\theta}$ в области $x_3 = 0, r > a$. Из (5) (для случая *неравных корней*) имеем:

$$t_{33}(r, \theta, 0) = C_{44}^0 d_1^0 \ell_1^0 \frac{k}{k_1} \sum_{n=0}^\infty \cos(n\theta) \left[\int_0^\infty \lambda A_n^{(1)}(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda - \int_0^\infty \lambda g(\lambda) A_n^{(1)}(\lambda) J_n(\lambda r) d\lambda \right],$$

$$t_{3r}(r, \theta, 0) = 0, \quad t_{3\theta}(r, \theta, 0) = 0. \quad (24)$$

Учитывая соотношения (18), (19) и применяя интегрирование по частям, из первого из соотношений (24) получаем

$$t_{33}(r, \theta, 0) = -\frac{a^n \omega_n(a)}{r^n \sqrt{r^2 - a^2}} + \int_0^a \frac{1}{r^n \sqrt{r^2 - t^2}} \frac{d}{dt} [t^n \omega_n(t)] dt -$$

$$- \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \omega_n(a) \int_0^\infty \sqrt{\lambda} g(\lambda) J_{n-1/2}(\lambda a) J_n(\lambda r) d\lambda +$$

$$+ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty \sqrt{\lambda} g(\lambda) \left\{ \int_0^a t^{-n+1/2} \frac{d}{dt} [t^n \omega_n(t)] J_{n-1/2}(\lambda t) dt \right\} J_n(\lambda r) d\lambda. \quad (25)$$

Аналогично тому, как принято в линейной механике разрушения материалов без начальных напряжений [10], определяем коэффициенты интенсивности напряжений следующим образом:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow +a} [2\pi(r-a)]^{1/2} t_{33}(r, \theta, 0),$$

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow +a} [2\pi(r-a)]^{1/2} t_{3r}(r, \theta, 0),$$

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow +a} [2\pi(r-a)]^{1/2} t_{3\theta}(r, \theta, 0). \quad (26)$$

Тогда из (24), (25) получаем

$$K_I = -\sqrt{\pi} C_{44}^0 d_1^0 \ell_1^0 \frac{k}{k_1} \sum_{n=0}^\infty \cos(n\theta) a^{-n-1/2} \int_0^a \tilde{\omega}_n(t) dt, \quad K_{II} = 0, \quad K_{III} = 0, \quad (27)$$

где функции $\tilde{\omega}_n(a), n = 0, 1, 2, \dots$, определяются как решения уравнений (22).

Аналогично для *равных корней* характеристического уравнения получаем

$$K_I = \sqrt{\pi} C_{44}^0 d_1^0 \ell_1^0 k \sum_{n=0}^\infty \cos(n\theta) a^{-n-1/2} \int_0^a \tilde{\omega}_n(t) dt, \quad K_{II} = 0, \quad K_{III} = 0. \quad (28)$$

Как видим, коэффициенты интенсивности напряжений K_I зависят как от величин начальных напряжений и деформаций (поскольку величины $C_{44}^0, d_1^0, \ell_1^0, k$, а также функции $\tilde{\omega}_n$ зависят от коэффициентов начального удлинения (укорочения) вдоль координатных осей $\lambda_j, j = 1, 2, 3$), так и от геометрических параметров задачи (радиуса трещин и расстояния между ними).

6. Предельный случай расположения трещин. Рассмотрим предельный случай расположения трещин, когда расстояние между ними стремится к бесконечности. Из выражений для ядер интегральных уравнений (23) следует, что при $h \rightarrow \infty$ ядра в пределе обращаются в нуль:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{K}_n(x, t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (29)$$

Тогда из уравнений (22), используя замену переменных $t = x \sin \theta$, получаем граничные значения функций ω_n :

$$\omega_n^\infty(x) \equiv \lim_{h \rightarrow \infty} \omega_n(x) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{C_{44}^0 d_1^0 \ell_1^0} \frac{k_1}{k} \int_0^x \frac{t^{n+1} \sigma_n(t)}{x^n \sqrt{x^2 - t^2}} dt. \quad (30)$$

Подставив соотношения (30) в представления (27), (28), получаем следующие значения коэффициентов интенсивности напряжений для предельного случая расположения трещин при $h \rightarrow \infty$ для *неравных и равных* корней характеристического уравнения:

$$K_I^\infty \equiv \lim_{h \rightarrow \infty} K_I = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{a^{n+1/2}} \int_0^a \frac{t^{n+1}}{\sqrt{a^2 - t^2}} \sigma_n(t) dt, \quad (31)$$

$$K_{II}^\infty = 0, \quad K_{III}^\infty = 0.$$

Из (31) видим, что в указанном предельном случае расположения трещин коэффициенты интенсивности напряжений не зависят от значений начальных напряжений и деформаций, а их значения полностью совпадают (с точностью до обозначений) со значениями коэффициентов интенсивности напряжений, полученными в задаче об изолированной трещине нормально-го отрыва в бесконечном материале в рамках линейной механики разрушения материалов без начальных напряжений (см. формулу (1.44) в [10]).

В частности, при $\sigma(r, \theta) = \sigma_0 \cos \theta$ из (31) получаем

$$K_I^\infty = \frac{\sqrt{\pi a}}{2} \sigma_0 \cos \theta, \quad K_{II}^\infty = 0, \quad K_{III}^\infty = 0. \quad (32)$$

7. Численные результаты. Рассмотрим частный случай нагрузки на берегах трещин, когда она определяется выражением

$$\sigma(r, \theta) = \sigma_1(r) \cos \theta. \quad (33)$$

В этом случае из (22) получим разрешающее интегральное уравнение Фредгольма второго рода в безразмерном виде:

$$f_1(\xi) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 f_1(\eta) \mathcal{K}_1(\xi, \eta) d\eta = \frac{2}{\pi} \xi \int_0^{\pi/2} P_1'(\xi \sin \theta) d\theta, \quad (34)$$

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1,$$

где

$$\xi \equiv a^{-1}x, \quad \eta \equiv a^{-1}t, \quad f_1(\xi) \equiv a^{-1}\tilde{\omega}_1(a\xi) = a^{-1}\tilde{\omega}_1(x).$$

Ядро в (34) имеет вид

$$\mathcal{K}_1(\xi, \eta) = \xi \{ \eta^{-1} [R(\xi - \eta) - R(\xi + \eta)] - [R(\xi - 1) - R(\xi + 1)] \}, \quad (35)$$

где

– для случая *неравных* корней

$$R(z) = \frac{1}{k} \left[\frac{k_1}{\beta_1} \operatorname{Re} \psi \left(1 + \frac{iz}{2\beta_1} \right) - \frac{k_2}{\beta_2} \operatorname{Re} \psi \left(1 + \frac{iz}{2\beta_2} \right) \right],$$

$$P_1(\xi) = -\frac{1}{C_{44}^0 d_1^0 \ell_1^0} \frac{k_1}{k} \xi \sigma_1(\xi), \quad \beta_i \equiv \frac{h}{a\sqrt{n_i^0}}, \quad i = 1, 2; \quad (36)$$

– для случая *равных* корней

$$R(z) = \frac{1}{k\beta_1} \left[(k+1) \operatorname{Re} \psi \left(1 + \frac{iz}{2\beta_1} \right) - \frac{z}{2\beta_1} \operatorname{Im} \psi_1 \left(1 + \frac{iz}{2\beta_1} \right) \right],$$

$$P_1(\xi) = \frac{1}{C_{44}^0 d_1^0 \ell_1^0 k} \xi \sigma_1(\xi), \quad \beta_1 \equiv \frac{h}{a \sqrt{n_1^0}}. \quad (37)$$

В формулах (36), (37) $\operatorname{Re} \psi \left(1 + \frac{iz}{2\beta_{1,2}}\right)$ и $\operatorname{Im} \psi_1 \left(1 + \frac{iz}{2\beta_1}\right)$ – соответственно действительная часть от пси-функции $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$ (где $\Gamma(z)$ – гамма-функция) и мнимая часть от ее производной $\psi_1(z) = \frac{d}{dz} \psi(z)$.

Коэффициенты интенсивности напряжений в окрестности краев трещин в случае нагрузки на их берегах в виде (33) выражаются соотношениями:

– для случая *неравных корней*

$$K_I = -\sqrt{\pi a} C_{44}^0 d_1^0 \ell_1^0 \frac{k}{k_1} \int_0^1 f_1(\eta) d\eta \cos \theta, \quad K_{II} = 0, \quad K_{III} = 0; \quad (38)$$

– для случая *равных корней*

$$K_I = \sqrt{\pi a} C_{44}^0 d_1^0 \ell_1^0 \int_0^1 f_1(\eta) d\eta \cos \theta, \quad K_{II} = 0, \quad K_{III} = 0, \quad (39)$$

где значения функции $f_1(\eta)$ определяются из решения уравнения (34).

Ниже приведены численные значения для высокоэластического несжимаемого материала, описываемого упругим потенциалом Бартенева – Хазановича [1]. Материал характеризуется одной постоянной μ . Для этого потенциала при двухосном равномерном нагружении (2) получаем

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= \lambda_1^{-2}, & n_1^0 &= n_2^0 = \lambda_1^3, & n_3^0 &= 2(1 + \lambda_3^{3/2})^{-1}, & m_1^0 &= 1, \\ m_2^0 &= 1, & \ell_1^0 &= 1, & \ell_2^0 &= \frac{1}{2} \lambda_1^{-3} (1 - \lambda_1^3), & d_1^0 &= \lambda_1 \lambda_3^{-1} + 1, \\ d_2^0 &= 2\lambda_1 \lambda_3^{-1}, & C_{44}^0 &= 2\mu \sqrt{\lambda_3} (1 + \lambda_3^{3/2})^{-1}, & S_{11}^0 &= 2\mu \lambda_1^{-2} (\lambda_1 - \lambda_3). \end{aligned}$$

Решение уравнения (34) осуществлялось методом Бубнова – Галеркина, численное интегрирование производилось по квадратурным формулам Гаусса. Предполагалось, что берега трещины загружены нагрузкой в виде (33), где $\sigma_1(r) = \sigma = \text{const}$.

Таблица 1

$\lambda_1 \backslash \beta$	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.5	5.0
0.125	0.112819	0.342407	0.386650	0.394523	0.389100	0.338828	0.142078
0.25	0.171449	0.488975	0.544122	0.551898	0.543282	0.474012	0.204634
0.5	0.249182	0.744965	0.773116	0.765767	0.747769	0.654097	0.289666
0.75	0.532572	0.902582	0.905024	0.891616	0.872362	0.776422	0.353443
1.0	0.784460	0.962815	0.960544	0.950890	0.937282	0.859371	0.406503
1.5	0.956145	0.992786	0.991539	0.988288	0.983361	0.945387	0.493677
2.0	0.988149	0.998014	0.997558	0.996435	0.994638	0.977637	0.564916
5.0	0.999862	0.999976	0.999968	0.999950	0.999919	0.999487	0.828189

В табл. 1 приведены значения соотношений коэффициентов интенсивности напряжений K_I/K_I^∞ (где K_I^∞ – коэффициент интенсивности напряжений для изолированной трещины в бесконечном материале, определяемый по формуле (32)) для различных значений коэффициента начального укорочения (удлинения) λ_1 вдоль координатной оси Ox_1 , обусловленного действием начальных напряжений сжатия-растяжения S_{11}^0 ($\lambda_1 < 1$ – начальное сжатие, $\lambda_1 > 1$ – начальное растяжение) и для различных значений безразмерного расстояния между трещинами $\beta = ha^{-1}$.

На рис. 1 приведены зависимости соотношений K_I/K_I^∞ от параметра λ_1 для значений $\beta = 0.25, 0.5, 1.0$. Как видим, начальные напряжения оказывают заметное влияние на коэффициенты интенсивности напряжений. Отметим также, что при стремлении параметра λ_1 к значениям, соответствующим критическим значениям коэффициента укорочения $\lambda_1^* = 0.6934$ для первой гармоники по угловой координате в неосесимметричной задаче о сжатии тела вдоль периодической системы соосных круговых трещин, значения K_I/K_I^∞ асимптотически стремятся к нулю.

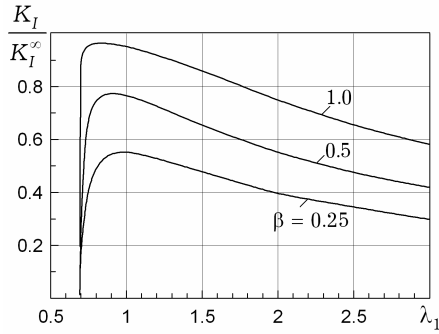


Рис. 1

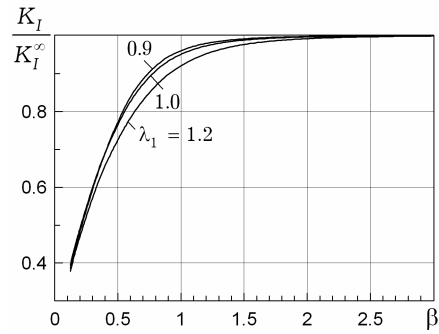


Рис. 2

Рис. 2 иллюстрирует зависимости соотношений коэффициентов интенсивности напряжений K_I/K_I^∞ от безразмерного расстояния между трещинами β . Результаты приведены для значений $\lambda_1 = 0.9, 1.0, 1.2$. На рисунке видим, что при возрастании расстояния между трещинами значения коэффициентов интенсивности напряжений для периодической системы соосных трещин нормального отрыва стремятся к значениям, полученным в задаче об изолированной трещине в бесконечном материале.

8. Выводы. В работе в рамках подходов трехмерной линеаризованной механики деформируемого твердого тела исследована неосесимметричная задача о периодической системе соосных дискообразных трещин нормального отрыва в бесконечном материале с начальными (остаточными) напряжениями. Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

- порядок сингулярности в распределении напряжений возле кончиков трещин нормального отрыва в задаче о периодической системе трещин в теле с начальными напряжениями равен $1/2$;

- в рассмотренной задаче отличным от нуля является только коэффициент интенсивности напряжений K_I . При этом K_I зависит от значений начальных напряжений, а также от геометрических параметров задачи (расстояния между трещинами и радиуса трещин);

- в предельном случае расположения трещин, когда величина расстояния между ними стремится к бесконечности, коэффициенты интенсивности напряжений стремятся к соответствующим значениям, полученным для случая изолированной трещины в бесконечном материале в рамках линейной механики разрушения материалов без начальных напряжений.

Следует также отметить, что, полагая в полученных в настоящей работе соответствующих выражениях порядок гармоники по окружной координате θ равным нулю ($n = 0$), получим соотношения (в частности, разрешающие интегральные уравнения Фредгольма второго рода и значения коэффициентов интенсивности напряжений) для случая осесимметричного распределения в теле напряжений и деформаций, который является важным в практических приложениях.

1. Бартенев Г. М., Хазанович Т. Н. О законе высокоэластических деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. – 1960. – 2, № 1. – С. 21–28.
2. Богданов В. Л. Об исследовании осесимметричных задач линеаризованной механики разрушения для тела с двумя параллельными трещинами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 1. – С. 146–154.
3. Богданов В. Л. Про кругову тріщину зсуву в напівскінченному композиті з початковими напруженнями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – 43, № 3. – С. 27–34.
4. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: «А.С.К.», 2004. – 672 с.
5. Гузь А. Н. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1991. – 288 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т., 5-ти кн. – Т. 2.)
6. Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Назаренко В. М. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 456 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т., 5-ти кн. – Т. 4, кн. 1.)
7. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Ленинград: Наука, 1977. – 220 с.
8. Guz A. N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. – Berlin: Springer-Verlag, 1999. – 555 p.
9. Guz A. N. On the development of brittle-fracture mechanics of materials with initial stress // Int. Appl. Mech. – 1996. – 32, No 4. – P. 316–323.
10. Kassir M. K., Sih G. C. Mechanics of fracture. Three dimensional crack problems. – Leyden: Netherlands Noordhoff Int. Publ., 1975. – Vol. 2. – 452 p.
11. Nazarenko V. M., Bogdanov V. L., Altenbach H. Influence of initial stress on fracture of a halfspace containing a penny-shaped crack under radial shear // Int. J. Fract. – 2000. – 104. – P. 275–289.

НЕОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ПРО ПЕРІОДИЧНУ СИСТЕМУ ДИСКПОДІБНИХ ТРІЩИН НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ В ТІЛІ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Досліджено граничну рівновагу попередньо напруженого нескінченного матеріалу, що містить періодичну систему паралельних співвісних кругових тріщин, які знаходяться під дією довільного нормального навантаження. У рамках тривимірної линеаризованої механіки деформівного твердого тіла виконано постановку задачі, отримано розв'язувальні інтегральні рівняння Фредгольма другого роду та вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень в околах тріщин. Для нестисливого високоеластичного матеріалу з пружним потенціалом Бартенева – Хазановича отримано числові значення коефіцієнтів інтенсивності напружень і проаналізовано їх залежності від початкових напружень і геометричних параметрів задачі.

NONAXISYMMETRIC PROBLEM ON PERIODIC SYSTEM OF PENNY-SHAPED MODE-I CRACKS IN A SOLID WITH INITIAL STRESSES

In this paper the limit equilibrium of initially stressed infinite solid containing a periodic system of parallel circular cracks is investigated. It is supposed that the cracks are loaded by arbitrary normal loads. Within the framework of three-dimensional linearized mechanics of solids the statement of the problem is carried out and the Fredholm integral second kind equations are obtained. The representations of the stress intensity factors near the crack tips are given. The dependence of stress intensity factors on the initial stresses and geometric parameters of the problem is analyzed for an elastic solid with Bartenev – Khazanovich potential.

Ин-т механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Получено
25.08.07