УДК 539.3

Професорові В. М. Вігаку
присвячується

А. В. Ричагівський, В. С. Попович

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ЗУСИЛЛЯМИ Й ПЕРЕМІЩЕННЯМИ НА ГРАНИЦІ ПІВПЛОЩИНИ ДЛЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ПРУЖНОСТІ Й ТЕРМОПРУЖНОСТІ

На підставі методу прямого інтегрування рівнянь термопружності в напруженнях знайдено неперервні й інтегровні розв'язки диференціальних рівнянь пружності й термопружності в півплощині, коли на границі задано зусилля, переміщення або змішані умови. Встановлено взаємно однозначні співвідношення між зусиллями й переміщеннями на границі. Виведено необхідні інтегральні умови рівноваги для зусиль, умови суцільності для переміщень та умову теплового балансу, які забезпечують коректність розв'язків задач пружності, термопружності й теплопровідності.

Лінійна теорія пружності ґрунтується на взаємно однозначній залежності між напруженнями (деформаціями) і переміщеннями всередині деформівного твердого тіла. Можна припустити, що існують співвідношення між зусиллями й переміщеннями на границі тіла, які мають місце для одновимірних задач пружності й термопружності в порожнистому циліндрі [6]. Якщо ж існують такі співвідношення, то зникає потреба розв'язування двох задач пружності − окремо із заданими зусиллями і окремо із заданими переміщеннями на границі. Також очевидно, що й задача зі змішаними граничними умовами повинна мати спосіб ефективнішого розв'язування.

У статті на підставі прямого інтегрування диференціальних рівнянь плоскої квазістатичної задачі термопружності в напруженнях для однорідної ізотропної півплощини [5] аналогічно, як у статті В. М. Вігака [3] для задачі пружності, знайдено взаємно однозначні співвідношення між зусиллями й переміщеннями на границі області. Послуговуючись розв'язком задачі термопружності в напруженнях, за допомогою цих співвідношень можна звести задачу із заданими переміщеннями або змішаними умовами на границі півплощини до відповідної задачі із заданими на границі зусиллями. При цьому задані зусилля повинні задовольняти отримані необхідні інтегральні умови рівноваги, переміщення − інтегральні умови суцільності, а джерела тепла й теплові потоки на границі − умову теплового балансу.

Плоский квазістатичний пружний і термопружний стан в однорідній ізотропній півплощині $D = \{x \in (-\infty, \infty),\ y \in [0, \infty)\}$ за відсутності масових сил описується [1, 11]:

− рівняннями рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0\,; \tag{1}$$

− визначальним рівнянням суцільності

$$\Delta\sigma = -\frac{\alpha E}{1-\nu}\Delta T, \qquad \left(\sigma = \sigma_x + \sigma_y, \qquad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right); \tag{2}$$

− фізичними співвідношеннями термопружності, наприклад, для плоскої деформації ($e_z = 0$)

$$2Ge_x = (1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y + \alpha ET, \qquad \sigma_z = \nu\sigma - \alpha ET\,,$$

$$2Ge_y = (1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x + \alpha ET, \qquad Ge_{xy} = \sigma_{xy}\,; \tag{3}$$

− співвідношеннями Коші

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,; \tag{4}$$

− заданими зусиллями на границі

$$\sigma_y(x,0) = -p(x), \qquad \sigma_{xy}(x,0) = q(x)\,. \tag{5}$$

Тут x, y − безрозмірні координати; σ_i, $i = x, y, z$, σ_{xy}, та e_i, $i = x, y, z$, e_{xy} − компоненти тензора напружень і деформацій; E, G, ν, α − відповідно модулі пружності та зсуву, коефіцієнти Пуассона та лінійного температурного розширення; $u = u_*/\ell$, $v = v_*/\ell$; u_*, v_* − компоненти вектора переміщень; ℓ − деякий характерний розмір; $T = T(x, y, \tau)$ − температурне поле в півплощині, яке описується крайовою задачею теплопровідності [4, 9]

$$\Delta T + W = \frac{\partial T}{\partial \tau}, \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = q, \qquad T\Big|_{\tau=0} = f, \tag{6}$$

де τ − безрозмірний час; q і W − тепловий потік і густина потужності внутрішніх джерел тепла (розмірностей температури).

Надалі вважатимемо, що напруження, деформації, переміщення, зусилля, температурне поле, теплові потоки і потужність джерел тепла заникають при $|x| \to \infty$, $y \to \infty$.

Поставимо завдання знайти коректні, тобто неперервні та обмежені, розв'язки задач термопружності (1)−(5) й теплопровідності (6) з метою визначення компонент тензора напружень і вектора переміщень та температурного поля в півплощині за умови інтегровності шуканих функцій в області визначення. Такі вимоги зумовлені, зокрема, обмеженою енергією термопружної деформації і тепловою енергією в реальному тілі. Окрім цього, розв'язок задачі (1)−(5) не повинен виходити за межі відповідної математичної моделі деформівного твердого тіла, тобто мусять задовольнятися виведені нижче інтегральні умови рівноваги для напружень та інтегральні умови суцільності для переміщень і деформацій.

У просторі зображень Фур'є [12], використовуючи метод прямого інтегрування диференціальних рівнянь (1), (2) і враховуючи граничні умови (5), розв'язок задачі (1)−(3), (5) можна подати у вигляді [5]

$$\begin{aligned}
\bar\sigma_x &= \bar\sigma - \bar\sigma_y, \qquad \bar\sigma = -2\left(\bar p + i\frac{|s|}{s}\bar q\right)\exp(-|s|y) - \frac{aE}{1-\nu}\Bigg(\bar T - \\
&\qquad - 2|s|\int_0^\infty \bar T \exp\left(-|s|(y+\xi)\right)d\xi\Bigg), \qquad i \equiv \sqrt{-1}, \\
\bar\sigma_y &= -\left[\bar p + \left(\bar p + i\frac{|s|}{s}\bar q\right)|s|\,y\right]\exp(-|s|y) + \\
&\qquad + \frac{aE|s|}{2(1-\nu)}\int_0^\infty \bar T\left[(1 + 2|s|y)\exp\left(-|s|(y+\xi)\right) - \exp\left(-|s||y-\xi|\right)\right]d\xi, \\
\bar\sigma_{xy} &= \left[\bar q - \left(\bar q - i\frac{|s|}{s}\bar p\right)|s|\,y\right]\exp(-|s|y) + \\
&\qquad + \frac{iaEs}{2(1-\nu)}\int_0^\infty \bar T\Big[(1 - 2|s|y)\exp\left(-|s|(y+\xi)\right) + \\
&\qquad + \exp\left(-|s||y-\xi|\right)\operatorname{sgn}(y-\xi)\Big]d\xi,
\end{aligned} \tag{7}$$

де рискою зверху позначено зображення Фур'є відповідної функції, s − параметр цього перетворення. Напруження (7) легко записати в оригіналах [12].

Інтегровність функцій та існування повторних інтегралів від компонент тензора напружень [13] вимагають приналежності цих функцій до класу $L(D)$, тобто класу абсолютно інтегровних функцій в області їх визначення D. На цій підставі за допомогою інтегрування рівнянь рівноваги (1) з урахуванням граничних умов (5) у праці [8] доведено, що компоненти тензора напружень повинні задовольняти необхідні інтегральні умови рівноваги

$$2\int_0^{\infty} \sigma_x \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} q \operatorname{sgn}(x-\eta)\, d\eta, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_y x \, dx = 0\,,$$

$$2\int_0^{\infty} \sigma_x y \, dy = -\int_{-\infty}^{\infty} p\, |x-\eta|\, d\eta, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xy} \, dx = 0\,,$$

$$2\int_0^{\infty} \sigma_{xy} \, dy = -\int_{-\infty}^{\infty} p \operatorname{sgn}(x-\eta)\, d\eta\,. \tag{8}$$

Із цих умов для напружень σ_y і σ_{xy} при $y = 0$ з використанням граничних умов (5) випливає, що зусилля повинні бути самозрівноваженими:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} xp \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} q \, dx = 0\,. \tag{9}$$

За допомогою фізичних співвідношень (3) знаходимо деформації та інтегруванням двох співвідношень (4) – переміщення. Найпростіше переміщення визначаються через поздовжні деформації e_i, $i = x, y$, з перших двох рівнянь (4) [7]:

$$2u = \int_{-\infty}^{\infty} e_x \operatorname{sgn}(x-\eta)\, d\eta, \quad 2v = v_1 + \int_0^{\infty} e_y \operatorname{sgn}(y-\xi)\, d\xi, \quad v_1 \equiv v(x,0)\,, \tag{10}$$

звідки відповідно при $x \to \pm\infty$ й $y = 0$ одержуємо дві інтегральні умови

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_x \, dx = 0, \qquad v_1 = -\int_0^{\infty} e_y \, dy\,. \tag{11}$$

Перша з цих умов виражає умову суцільності для деформацій e_x, а друга визначає переміщення v_1 границі півплощини через деформації e_y.

У зв'язку з вищенаведеними інтегральними умовами рівноваги й суцільності розглянемо питання щодо умов, які повинні задовольняти температурне поле та джерела тепла, що його спричиняють.

Зінтегрувавши перше рівняння (3) по області D з урахуванням першої з умов суцільності (11) та першої й другої умов рівноваги (8) при $p = q = 0$, одержимо необхідну умову

$$\iint_D T \, dx dy = 0, \qquad \tau \ge 0\,, \tag{12}$$

яку мусить задовольняти температурне поле.

Далі аналогічно до [8] виведемо умову теплового балансу. Спершу розглянемо стаціонарну задачу теплопровідності.

Запровадимо позначення

$$q_x = \frac{\partial T}{\partial x}\,, \qquad q_y = \frac{\partial T}{\partial y}$$

для теплових потоків розмірностей температури. З урахуванням цього рівняння теплопровідності (6) набуде вигляду

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = -W\,. \tag{13}$$

Припустимо, що теплові потоки заникають на безмежності:

$$\lim_{x \to \pm\infty} q_x = \lim_{y \to \infty} q_y = 0\,,$$

на відміну від їхніх окремих сумарних величин:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \int_0^{\infty} q_x \, dy \ne 0, \qquad \lim_{y \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} q_y \, dx \ne 0\,.$$

Зінтегрувавши рівняння (13) за x від $-\infty$ до ∞, одержимо рівність

$$\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{\infty} q_y\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} W\,dx\,,$$

звідки

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_y\,dx = -\frac{1}{2}\iint_D W\,\mathrm{sgn}\,(y-\xi)\,d\xi\,dx + A, \qquad A = \mathrm{const}. \tag{14}$$

Поклавши в (14) послідовно $y = 0$ та $y \to \infty$, знайдемо

$$2A = \int_{-\infty}^{\infty} q_y(0)\,dx + \lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q_y\,dx\,, \tag{15}$$

$$\iint_D W\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} q_y(0)\,dx + \lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q_y\,dx\,. \tag{16}$$

Оскільки сумарна по області D температура обмежена, то $\left|\iint_D q_y\,dx\,dy\right| < \infty$. З використанням цієї умови, зінтегрувавши рівність (14) за y від 0 до ∞, одержимо

$$2A = \iint_D W\,dx\,dy\,.$$

Тепер з урахуванням цього виразу для сталої A з формул (15), (16) маємо

$$\lim_{y\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} q_y\,dx = 0\,, \tag{17}$$

$$\iint_D W\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} q_y(0)\,dx\,. \tag{18}$$

Аналогічно, зінтегрувавши рівняння (13) за y від 0 до ∞, можна одержати цю ж умову (18) та умови

$$\lim_{x\to\pm\infty}\int_{0}^{\infty} q_x\,dy = 0\,. \tag{19}$$

Отже, з огляду на (17), (19) наше припущення хибне − сумарні теплові потоки в півплощині мусять заникати на безмежності. Формула (18) виражає умову сумарної теплової рівноваги для потужностей внутрішніх і зовнішніх джерел тепла, оскільки згідно з (6_2) $q_y(0) \equiv \partial T(0)/\partial y = q$ є не що інше, як тепловий потік на границі півплощини. Тоді умова (18) набирає вигляду

$$\iint_D W\,dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} q\,dx\,. \tag{20}$$

Таким чином, для статичної задачі термопружності в півплощині необхідними умовами, що випливають з умов обмеженості сумарної по області температури та диктуються умовами суцільності й рівноваги, є умови теплової рівноваги для температурного поля (12) і для потужностей джерел (20). Легко пересвідчитися в тому, що аналогічний висновок справедливий і для квазістатичної задачі термопружності.

Зауважимо, що умова (20) − природна для стаціонарних теплових процесів в обмежених тілах. Однак для нестаціонарних режимів вона нехарактерна й необов'язкова, оскільки за умови (20) можливий лише певний перерозподіл температури в тілі й немає можливості нагрівати його до певної середньої температури. Необхідність виконання умови (20) для півплощини та площини $(q = 0)$ зумовлена застосуванням механіки суцільного середовища до занадто спрощеної геометричної моделі тіла, що вимагає виконання першої умови (11). А вже для області у вигляді смуги $D = \{x \in (-\infty, \infty),$ $y \in [-1,1)\}$ згадана умова (11) відсутня, тому що тіло може переміщуватись при $|x| \to \infty$ і виконання умов (12), (20) для нестаціонарного теплового режиму необов'язкове.

Повернемося до визначення переміщень. Використовуючи фізичні співвідношення (3) для поздовжніх деформацій і розв'язок (7) для напружень та враховуючи умови (11), переміщення (10) виражаємо через зусилля на границі області в такий спосіб:

$$4Gu = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[\left(\bar{p} + i\frac{|s|}{s}\bar{q}\right)|s|\,y - (1-2\nu)\bar{p} - 2(1-\nu)i\frac{|s|}{s}\bar{q}\right]\exp(-|s|\,y) + \right.$$
$$+\frac{\alpha E|s|}{2(1-\nu)}\int_0^{\infty}\bar{T}\left[(3-4\nu-2|s|\,y)\exp(-|s|(y+\xi)) + \right.$$
$$\left.\left. + \exp(-|s||y-\xi|)\right]d\xi\right\}\exp(isx)\frac{ds}{is},$$

$$4Gv = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[\left(\bar{p} + i\frac{|s|}{s}\bar{q}\right)y + \frac{1}{|s|}\left(2(1-\nu)\bar{p} + (1-2\nu)i\frac{|s|}{s}\bar{q}\right)\right]\exp(-|s|\,y) - \right.$$
$$-\frac{\alpha E}{2(1-\nu)}\int_0^{\infty}\bar{T}\left[(3-4\nu+2|s|\,y)\exp(-|s|(y+\xi)) - \right.$$
$$\left.\left. - \exp(-|s||y-\xi|)\,\mathrm{sgn}(y-\xi)\right]d\xi\right\}\exp(isx)\,ds. \qquad (21)$$

Ці формули свідчать про те, що підінтегральні функції мають особливість першого порядку при $s = 0$. Тому для існування інтегралів (21) і водночас розв'язку задачі (1)–(5) із визначенням переміщень у вигляді неперервних і обмежених функцій слід усунути ці особливості. Це можливо лише за виконання рівностей $\bar{p}(0) = \bar{q}(0) = 0$, які еквівалентні рівності нулеві головного вектора зусиль (5), тобто першій і третій з умов (9), а також рівності $\int_0^{\infty}\bar{T}(0)\,dy = 0$ або умові (12) в оригіналі.

Отже, з рівнянь рівноваги (1) і суцільності матеріалу випливає, що для існування розв'язку плоскої задачі термопружності (1)–(5) у класі неперервних та інтегровних функцій зусилля на границі повинні задовольняти умови рівноваги (9), а температурне поле – умову (12), рівнозначну умові балансу тепла. Інакше компоненти тензора напружень і деформацій неінтегровні, і переміщень у класі обмежених функцій не існує.

Розглянемо тепер побудову розв'язку задачі термопружності (1)–(4) у півплощині з заданими на границі переміщеннями

$$u(x,0) = u_1(x), \qquad v(x,0) = v_1(x), \qquad (22)$$

де $u_1(x), v_1(x)$ неперервні разом зі своїми першими похідними та абсолютно інтегровні функції. Використавши формули (21), у просторі зображень виразимо переміщення на границі через зусилля і температуру:

$$-2Gis\bar{u}_1 = (1-2\nu)\bar{p} + 2(1-\nu)\,i\frac{|s|}{s}\bar{q} - 2\alpha E|s|\int_0^{\infty}\bar{T}\exp(-|s|\,y)\,dy,$$

$$2G|s|\,\bar{v}_1 = 2(1-\nu)\bar{p} + (1-2\nu)\,i\frac{|s|}{s}\bar{q} - 2\alpha E|s|\int_0^{\infty}\bar{T}\exp(-|s|\,y)\,dy. \qquad (23)$$

Звідси знаходимо зображення зусиль через зображення переміщень і температури:

$$\bar{p} = \frac{2G}{3-4\nu}\left[(1-2\nu)is\bar{u}_1 + 2(1-\nu)|s|\bar{v}_1 + \frac{\alpha E}{G}\int_0^\infty \bar{T}|s|\exp(-|s|y)\,dy\right],$$

$$\bar{q} = \frac{2G}{3-4\nu}\left[(1-2\nu)is\bar{v}_1 - 2(1-\nu)|s|\bar{u}_1 - \frac{\alpha E}{G}\int_0^\infty \bar{T}is\exp(-|s|y)\,dy\right]. \qquad (24)$$

Підставивши вирази (24) у формули (7), одержимо розв'язок задачі (1)–(4) з граничними умовами (22). Таким чином, задача (1)–(4), (22) внаслідок взаємно однозначних співвідношень (23), (24) зводиться до розв'язування задачі (1)–(5). Використовуючи інтегральне перетворення Фур'є узагальнених функцій [2], запишемо ці співвідношення в оригіналі:

$$2Gu_1 = -\frac{1-2\nu}{2}\int_{-\infty}^{\infty} p\,\mathrm{sgn}(x-\eta)\,d\eta + \frac{2(1-\nu)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q\ln|x-\eta|\,d\eta -$$

$$-\frac{2\alpha E}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} T\frac{x-\eta}{(x-\eta)^2+y^2}\,d\eta dy\,,$$

$$2Gv_1 = -\frac{1-2\nu}{2}\int_{-\infty}^{\infty} q\,\mathrm{sgn}(x-\eta)\,d\eta - \frac{2(1-\nu)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} p\ln|x-\eta|\,d\eta -$$

$$-\frac{2\alpha E}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} T\frac{y}{(x-\eta)^2+y^2}\,d\eta dy\,, \qquad (25)$$

$$p = \frac{2G}{3-4\nu}\left[(1-2\nu)\frac{du_1}{dx} - \frac{2}{\pi}(1-\nu)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v_1}{(x-\eta)^2}\,d\eta -\right.$$

$$\left.-\frac{\alpha E}{\pi G}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} T\frac{(x-\eta)^2-y^2}{((x-\eta)^2+y^2)^2}\,d\eta\,dy\right],$$

$$q = \frac{2G}{3-4\nu}\left[(1-2\nu)\frac{dv_1}{dx} + \frac{2}{\pi}(1-\nu)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_1}{(x-\eta)^2}\,d\eta -\right.$$

$$\left.-\frac{2\alpha E}{\pi G}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty} T\frac{(x-\eta)y}{((x-\eta)^2+y^2)^2}\,d\eta\,dy\right]. \qquad (26)$$

Зауважимо, що інтеграли других складових для переміщень (25) можна подати, інтегруючи за частинами, у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty}(p,q)\ln|x-\eta|\,d\eta = \lim_{\eta\to\infty}\ln|x-\eta|\int_{-\infty}^{\eta}(p,q)\,d\eta_1 + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{x-\eta}\int_{-\infty}^{\eta}(p,q)\,d\eta_1\,,$$

звідки випливає, що при підпорядкуванні функцій $\int_{-\infty}^{\eta}(p,q)\,d\eta_1$ умовам Гельдера інтеграли Коші існують у сенсі головного значення [10], а границі дорівнюють нулеві за виконання умов (9). Якщо ж зусилля несамозрівноважені, то ці границі дорівнюють нескінченності, що підтверджує раніше висловлене твердження щодо некоректності розв'язку задачі (1)–(5), якщо порушуються умови (9).

На основі співвідношень (24) переконуємося, що знайдені зусилля p і q задовольняють умови рівноваги (9) для головного вектора зусиль, оскільки в зображенні ці умови еквівалентні рівностям $\bar{p}(0) = \bar{q}(0) = 0$. Умова (9) для головного моменту від зусилля p еквівалентна в зображенні рівності $\bar{p}'(0) = 0$, де штрихом позначено похідну за параметром s. Тому, використавши перше зі співвідношень (24) і рівність (12), одержимо при $s \to 0$, що

$$\overline{p}'(0) = 0 = (1-2\nu)\, i\bar{u}_1(0) + 2(1-\nu)\lim_{s\to 0}\left(\operatorname{sgn} s\, \overline{v}_1(s)\right).$$

Оскільки $\lim\limits_{s\to\pm 0} \operatorname{sgn} s = \pm 1$, то з останньої рівності отримуємо необхідність виконання умов $\bar{u}_1(0) = \overline{v}_1(0) = 0$, які в оригіналі еквівалентні умовам суцільності

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} u_1\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_1\, dx = 0. \tag{27}$$

Перша з цих умов для переміщення u_1 очевидна, тому що при $x \to \pm\infty$ переміщення нульове.

Визначивши величину $\overline{q}'(0)$ на підставі другого зі співвідношень (24), з урахуванням рівностей (12) і (27) одержимо умову

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} xq\, dx = 0, \tag{28}$$

яка згідно із законом парності дотичних напружень виражає рівнодіючий момент від зусиль, що діють на площинках з нормалями, паралельними до осі x.

Отже, для існування розв'язку задачі термопружності (1)–(4), (22) у класі неперервних та інтегровних функцій задані переміщення на границі півплощини повинні задовольняти інтегральні умови суцільності (27). Це не означає, що розв'язок згаданих рівнянь не існує при порушенні умов (27). Однак таке порушення призводить до порушення умови суцільності і розв'язок стає некоректним з точки зору моделі механіки деформівного твердого тіла.

Розглянемо нарешті розв'язування задачі термопружності (1)–(4) в півплощині, коли на її границі задані змішані граничні умови у вигляді ($q \ne 0$)

$$\sigma_y(x,0) = -p(x), \quad u(x,0) = u_1(x) \qquad \text{або} \qquad v(x,0) = v_1(x), \tag{29}$$

чи у вигляді ($p \ne 0$)

$$\sigma_{xy}(x,0) = q(x), \quad u(x,0) = u_1(x) \qquad \text{або} \qquad v(x,0) = v_1(x). \tag{30}$$

Для чотирьох варіантів змішаних граничних умов (29), (30), виразивши, послуговуючись одним зі співвідношень (23), одне з невідомих зусиль (зусилля q – для варіантів (29) і зусилля p – для варіантів (30)) через задані функції на границі й температуру та підставивши його вираз у розв'язок (7), знайдемо розв'язок задачі термопружності (1)–(4) для цих змішаних умов. При цьому задані функції на границі півплощини повинні задовольняти інтегральні умови (9), (27).

Отже, за допомогою прямого інтегрування диференціальних рівнянь плоских задач пружності й термопружності в півплощині за умови заданих зусиль на границі знайдено неперервні й інтегровні розв'язки. При цьому отримано необхідні умови рівноваги для заданих зусиль на границі, умови суцільності для переміщень, а також умови теплового балансу для джерел тепла й теплових потоків. Доведено, що квазістатичні задачі пружності й термопружності з заданими на границі півплощини переміщеннями і зі змішаними граничними умовами внаслідок встановлених взаємно однозначних співвідношень між зусиллями й переміщеннями на границі області зводяться до розв'язування цих задач із заданими на границі зусиллями.

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – Москва: Мир, 1964. – 517 с.
2. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. – Москва: Наука, 1977. – 288 с.
3. *Вигак В. М.* Корректные решения плоских задач теории упругости для полуплоскости // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 3. – С. 55–62.

4. *Вигак В. М.* Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. – Киев: Наук. думка, 1979. – 360 с.
5. *Вігак В. М.* Прямий метод інтегрування рівнянь плоских задач пружності й термопружності // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 62–67.
6. *Вігак В. М.* Розв'язування одновимірних задач пружності й термопружності в напруженнях для циліндра // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 3. – С. 103–107.
7. *Вігак В. М., Ричагівський А. В.* Рівняння та інтегральні умови суцільності для плоскої задачі механіки деформівного твердого тіла // Машинознавство. – 2000. – № 9. – С. 8–11.
8. *Вігак В. М., Юзв'як М. Й.* Метод прямого інтегрування рівнянь плоских задач пружності та термопружності для необмежених областей // Крайові задачі для диференц. рівнянь. – 1999. – Вип. 4. – С. 9–33.
9. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1967. – 600 с.
10. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1954. – 648 с.
11. *Папкович П. Ф.* Теория упругости. – Ленинград–Москва: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
12. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 667 с.
13. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – Т. 2. – Москва: Наука, 1969. – 800 с.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ УСИЛИЯМИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ НА ГРАНИЦЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ УПРУГОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ

На основании метода прямого интегрирования уравнений термоупругости в напряжениях найдены непрерывные и интегрируемые решения дифференциальных уравнений упругости и термоупругости в полуплоскости при заданных на границе усилиях, перемещениях или смешанных условиях. Установлены взаимно однозначные соотношения между усилиями и перемещениями на границе. Выведены необходимые интегральные условия равновесия для усилий, условия сплошности для перемещений, а также условие теплового баланса, обеспечивающие корректность решений задач упругости, термоупругости и теплопроводности.

RELATION BETWEEN TRACTIONS AND DISPLACEMENTS ON THE BOUNDARY OF SEMI-PLANE FOR PLANE ELASTICITY AND THERMOELASTICITY PROBLEMS

Using the method of direct integration we found continuous and integrable solutions of the differential equations for plane elasticity and thermoelasticity in a semi-plane with traction, displacement, or mixed type boundary conditions. We obtained the single valued relations between tractions and displacements on the boundary and derived integral equilibrium conditions for tractions and compatibility conditions for displacements as well as the condition of thermal balance. These necessary conditions ensure the correctness of solutions for the problems of elasticity, thermoelasticity, and thermoconductivity.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
06.08.07