

## ПРОКОВЗУВАННЯ ТІЛ В ОКОЛІ РОЗШАРУВАННЯ ЗА ДІЇ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ СИЛИ

Розглянуто взаємодію двох пружних півплощин з однакових матеріалів, що контактують під дією рівномірно розподілених на нескінченності навантажень і зосередженої сили, прикладеної у внутрішній точці верхньої півплощини перпендикулярно до лінії їх спряження. При певній величині сили виникає розшарування границь півплощин і між ними виникає зазор. В його околі появляются ділянки проковзування, де діє кулонівське тертя. Розшарування і проковзування змодельовано стрибками нормальних і дотичних переміщень, через які з використанням методу комплексних потенціалів визначено напружено-деформований стан півплощин. Для визначення стрибків отримано сингулярні інтегральні рівняння, які розв'язано аналітично. Розміри ділянки розшарування знайдено з умови обмеженості нормальних контактних напружень, а ділянок проковзування – з умови неперервності дотичних переміщень у їх вершинах.

**Вступ.** Для машинобудування, геомеханіки, біомеханіки та трибології важливим є дослідження контактної взаємодії тіл з урахуванням зчеплення та проковзування, яке може істотно впливати на контактну міцність і жорсткість вузлів і з'єднань [2]. Вплив зчеплення і проковзування на взаємодію тіл здебільшого вивчався для тіл з узгодженими границями [1, 10, 11, 14]. Останнім часом досліджено механічний контакт півплощин з узгодженими поверхнями, коли ділянки фрикційного проковзування виникають в околі міжповерхневих зазорів [4–6], зумовлених плитками поверхневими виїмками. Такі контактні ефекти можуть спостерігатися і під час взаємодії тіл з узгодженими межами за дії підповерхневих сил. Розшарування тіл зосередженими силами з узгодженими границями за безфрикційного контакту вивчено у працях [7, 9]. Розглянуто локальне проковзування на контактній поверхні шару і півпростору з однакових матеріалів, зумовлене прикладеною до границі шару зосередженою силою [12, 13]. У праці [3] досліджено умови, за яких зосереджені силові чинники приводять до появи ділянок локального проковзування під час контакту тіл з різних матеріалів.

У цій статті досліджено контактну взаємодію двох пружних півплощин з однакових матеріалів за одночасного виникнення і розшарування, і ділянок проковзування в його околі під час навантаження зосередженою силою.

**1. Формулювання задачі.** Розглянемо дві пружні півплощини  $D_1$  (нижня) і  $D_2$  (верхня), що мають однакові модулі зсуву ( $G_1 = G_2 = G$ ) та коефіцієнти Пуассона ( $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ) і контактують за умов плоскої деформації. На безмежності півплощини піддані дії рівномірно розподілених нормальних стискальних зусиль  $P$ . У точці  $z_0(0, y_0)$  верхньої півплощини перпендикулярно до лінії спряження прикладено зосереджену силу  $Q(0, Q)$ , що призводить до появи міжконтактного розшарування висоти  $h(x)$  та завдовжки  $2a$ , які заздалегідь невідомі. В околі розшарування виникають дві ділянки проковзування  $(-c, -a)$ ,  $(a, c)$  на яких діють сили тертя  $\tau(x)$ , що зв'язані з контактним

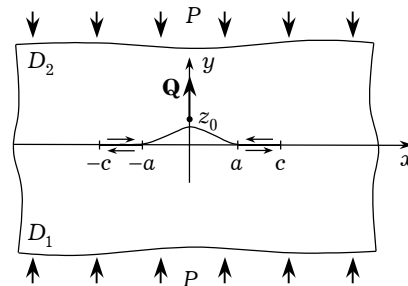


Рис. 1

тиском  $P(x)$  законом Кулона – Амонтона  $\tau(x) = f \cdot P(x)$ , де  $f$  – коефіцієнт тертя. Зовні ділянок проковзування, де  $\tau(x) < f \cdot P(x)$ , зчеплення півплощин не порушується, тобто виконуються умови ідеального механічного контакту. Потрібно визначити розміри розшарування та ділянок проковзування, а також їх вплив на напружено-деформований стан півплощин.

Граничні умови сформульованої задачі матимуть вигляд

– на ділянці розшарування ( $y = 0$ ,  $|x| < a$ ):

$$\sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y^+(x, 0), \quad \sigma_y^-(x, 0) = 0, \quad (1)$$

$$\tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = 0; \quad (2)$$

– на ділянках проковзування ( $y = 0$ ,  $a \leq |x| \leq c$ ):

$$\sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y^+(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0), \quad (3)$$

$$v^-(x, 0) - v^+(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = f \operatorname{sgn}(x) \sigma_y^-(x, 0); \quad (4)$$

– на ділянках контакту ( $y = 0$ ,  $|x| > c$ ):

$$\sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y^+(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0), \quad (5)$$

$$u^-(x, 0) = u^+(x, 0), \quad v^-(x, 0) = v^+(x, 0); \quad (6)$$

– на нескінченності в кожній з півплощин  $D_k$ ,  $k = 1, 2$ :

$$\sigma_y(x, \pm\infty) = -P, \quad \tau_{xy}(x, \pm\infty) = \tau_{xy}(\pm\infty, y) = 0, \quad \sigma_x(\pm\infty, y) = 0. \quad (7)$$

Тут  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$  – компоненти тензора напружень;  $u$ ,  $v$  – компоненти вектора переміщення; індексами «–», «+» позначено граничні значення функцій на лінії спряження у півплощинах  $D_1$ ,  $D_2$ .

**2. Зведення задачі до сингулярних інтегральних рівнянь.** Подамо напруження і похідні від переміщень через комплексні потенціали Колосова – Мусхелішвілі у вигляді [8], що враховує задані умови на безмежності (7) та особливості напружено-деформованого стану в околі точки прикладання сили:

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi_k(z) - \Phi_k(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} + A(z) - P,$$

$$2G(u' + iv') = \alpha \Phi_k(z) + \Phi_k(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} + B_k(z), \quad z \in D_k, \quad k=1, 2, \quad (8)$$

де  $\Phi_k(z)$  – кусково-аналітичні функції, що зникають на нескінченності ( $\Phi_k(\infty) = 0$ ,  $k = 1, 2$ );  $z = x + iy$ ;  $\alpha = 3 - 4\nu$ ;

$$A(z) = S(z) + \bar{S}(z) + z\bar{S}'(z) + \bar{R}(z), \quad B(z) = (1 + \alpha)S(z) - A(z),$$

$$S(z) = -\frac{\alpha^* iQ}{z - z_0}, \quad R(z) = \alpha^* \left( \frac{\alpha i\bar{Q}}{z - z_0} - \frac{\bar{z}_0 iQ}{(z - z_0)^2} \right). \quad (9)$$

Тут  $\alpha^* = \frac{1}{8\pi(1 - \nu)}$ ,  $z_0 = iy_0$ .

Розглянемо допоміжну задачу про напружено-деформований стан півплощин під дією заданої зосередженої сили та навантажень на нескінченності, коли на лінії спряження виконуються такі умови:

$$\sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y^+(x, 0), \quad \tau_{xy}^-(x, 0) = \tau_{xy}^+(x, 0),$$

$$u^-(x, 0) - u^+(x, 0) = U(x), \quad v^-(x, 0) - v^+(x, 0) = V(x), \quad |x| < \infty, \quad (10)$$

де  $U(x) = 0$  при  $|x| \geq c$ ,  $V(x) = \begin{cases} -h(x), & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$

Функція  $U(x)$  описує стрибок дотичних переміщень на зазорі та ділянках проковзування, а  $V(x)$  – стрибок нормальних переміщень меж півплощин на ділянці зазору. Щоб забезпечити неперервність переміщень при русі вздовж лінії контакту, введені функції повинні задовольняти умови

$$U(-c) = 0, \quad U(c) = 0, \quad V(\pm a) = -h(\pm a) = 0.$$

Задовольнивши умови (10) за допомогою виразів (8) і (9), одержимо низку задач лінійного спряження, розв'язавши які знайдемо комплексні потенціали  $\Phi_k(z)$ ,  $k = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= \frac{G}{\pi i(1+x)} \left\{ \int_{-c}^c \frac{U'(t) dt}{t-z} + i \int_{-a}^a \frac{V'(t) dt}{t-z} \right\}, & z \in D_2, \\ \Phi_1(z) &= -\frac{G}{\pi i(1+x)} \left\{ \int_{-c}^c \frac{U'(t) dt}{t-z} + i \int_{-a}^a \frac{V'(t) dt}{t-z} \right\}, & z \in D_1, \\ \Phi_2(z) &= -\Phi_1(z), & z \in D_1 \cup D_2. \end{aligned} \quad (11)$$

Порівнявши гранично-контактні умови (10) з умовами (1)–(6), можемо зробити висновок, що подання (9), (11) задовольняють усі вихідні умови основної задачі, за винятком трьох – (1<sub>2</sub>), (2<sub>2</sub>) і (4<sub>2</sub>). Саме їх використаємо для визначення невідомих функцій  $V(x) = -h(x)$  і  $U(x)$ .

Для цього з (8) та (11) знайдемо граничні значення контактних нормальних і дотичних напружень на лінії розмежування півплощин:

$$\sigma_y^-(x, 0) = \frac{2G}{\pi(1+x)} \int_{-a}^a \frac{h'(t) dt}{t-x} + \frac{x^* Q y_0}{x^2 + y_0^2} \left( x - 1 + \frac{4y_0^2}{x^2 + y_0^2} \right) - P, \quad (12)$$

$$\tau_{xy}^-(x, 0) = -\frac{2G}{\pi(1+x)} \int_{-c}^c \frac{U'(t) dt}{t-x} + \frac{x^* Q x}{x^2 + y_0^2} \left( 1 - x - \frac{4y_0^2}{x^2 + y_0^2} \right). \quad (13)$$

Задовольнивши спочатку невраховану в (10) умову (1<sub>2</sub>), використавши подання (12), одержимо сингулярне інтегральне рівняння (СІР) відносно похідної від висоти розшарування  $h'(x)$ :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t) dt}{t-x} = \frac{1+x}{2G} \left( P - \frac{x^* Q y_0}{x^2 + y_0^2} \left( x - 1 + \frac{4y_0^2}{x^2 + y_0^2} \right) \right), \quad |x| \leq a. \quad (14)$$

Визначатимемо обмежений розв'язок цього рівняння, тобто такий, що  $h'(\pm a) = 0$ , оскільки згідно з формулою (12) він гарантуватиме обмеженість контактних нормальних напружень.

За виконання умови

$$\int_{-a}^a \frac{F(t) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = 0 \quad (15)$$

обмежений розв'язок рівняння (14) має вигляд

$$h'(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\pi} \int_{-a}^a \frac{F(t) dt}{(t-x)\sqrt{a^2 - t^2}}, \quad |x| \leq a, \quad (16)$$

де  $F(x) = \frac{1+x}{2G} \left( P - \frac{x^* Q y_0}{x^2 + y_0^2} \left( x - 1 + \frac{4y_0^2}{x^2 + y_0^2} \right) \right)$  – права частина СІР (14).

Обчисливши аналітично інтеграли в (15) і (16), визначимо висоту розшарування

$$h(x) = -\frac{Q}{4\pi G\sqrt{a^2 + y_0^2}} \left\{ -\frac{2y_0^2(a^2 - x^2)^{3/2}}{(a^2 + y_0^2)(x^2 + y_0^2)} + (1 + x) \left( \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{\sqrt{a^2 + y_0^2}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 + y_0^2}}{\sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 + y_0^2}} \right| \right) \right\}, \quad |x| \leq a, \quad (17)$$

та півдовжину розшарування  $a$  :

$$a = \sqrt{\left( \sqrt[3]{S+T} + \sqrt[3]{S-T} + \frac{Q}{6\pi P} \right)^2 - y_0^2}, \quad (18)$$

$$\text{де } S = \frac{Q}{P} \left( \frac{Q^2}{(6\pi)^3 P^2} + y_0^2 x^* \right), \quad T = \frac{Q}{P} \sqrt{\frac{2y_0^2 x^* Q^2}{(6\pi)^3 P^2} + y_0^4 (x^*)^2}.$$

При отриманні формули (17) враховано умову  $V(\pm a) = -h(\pm a) = 0$ .

Використовуючи (17) і (12), запишемо нормальні контактні напруження зовні розшарування:

$$\sigma_y^\pm(x, 0) = -\frac{Qx^* |x| \sqrt{x^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 + y_0^2} (x^2 + y_0^2)} \left( 1 + x + \frac{2y_0^2}{a^2 + y_0^2} + \frac{4y_0^2}{x^2 + y_0^2} \right), \quad |x| \geq a. \quad (19)$$

Формули (17)–(19) засвідчують, що ні геометричні розміри розшарування, ні нормальні контактні напруження не залежать від появи ділянок проковзування, а визначаються величиною і локалізацією зосередженої сили та тиском на нескінченності.

Задовольнивши невраховані в (10) умови (2<sub>2</sub>) і (4<sub>2</sub>) і використавши подання (13), одержимо СІР відносно похідної стрибка дотичних переміщень границь півплощин  $U'(x)$  на розшаруванні та ділянках проковзування:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{U'(t) dt}{t - x} = \frac{Qx}{4\pi G(x^2 + y_0^2)} \left( 1 - x - \frac{4y_0^2}{x^2 + y_0^2} \right) + L(x), \quad |x| \leq c, \quad (20)$$

$$\text{де } L(x) = -\frac{1+x}{2G} f \operatorname{sgn}(x) \sigma_y^\pm(x, 0).$$

Оскільки права частина рівняння (20) є непарною функцією, умова існування його обмеженого розв'язку задовольняється тотожно. Тому такий розв'язок завжди існує і має вигляд

$$U'(x) = -\frac{\sqrt{c^2 - x^2}}{\pi} \left[ \int_{-c}^c \frac{Qt[(1-x)(t^2 + y_0^2) - 4y_0^2] dt}{4\pi G(t^2 + y_0^2)^2 \sqrt{c^2 - t^2} (t-x)} + \left( \int_{-c}^{-a} + \int_a^c \right) \frac{L(t) dt}{\sqrt{c^2 - t^2} (t-x)} \right], \quad |x| \leq c. \quad (21)$$

Перший інтеграл у правій частині СІР (21) обчислюється аналітично, а наступні два інтеграли знаходимо за допомогою числової процедури. Для цього проміжок інтегрування  $[-c, -a] \cup [a, c]$  розбиваємо на  $N$  однакових відрізків, на кожному з яких функцію  $L(x)$  апроксимуємо кусково-лінійною:

$$\tilde{L}(x) = A_i x + B_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad x_i = -c + \frac{2c}{N} i, \\ A_i = \frac{\tilde{L}(x_{i+1}) - \tilde{L}(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad B_i = \tilde{L}(x_i) - A_i x_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Врахувавши цю апроксимацію та обчисливши інтеграли в правій частині СІР (21), отримаємо

$$U'(x) = -\frac{Qy_0\sqrt{c^2-x^2}}{4\pi G\sqrt{c^2+y_0^2}(x^2+y_0^2)}\left(1-x+\frac{2c^2}{c^2+y_0^2}-\frac{4y_0^2}{x^2+y_0^2}\right)-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^N\left[A_i\sqrt{c^2-x^2}\left(\arcsin\frac{x_{i+1}}{c}-\arcsin\frac{x_i}{c}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{A_ix+B_i}{2}[\Gamma(c,x,x_{i+1})-\Gamma(c,x,x_i)]\right],$$

$$\text{де } \Gamma(c,t,x) = \ln \frac{c^2-tx+\sqrt{(c^2-x^2)(c^2-t^2)}}{c^2-tx-\sqrt{(c^2-x^2)(c^2-t^2)}}.$$

Проінтегрувавши останню рівність та врахувавши умову  $U(-c) = 0$ , отримуємо стрибок дотичних зміщень границь тіл:

$$U(x) = \frac{Q}{2\pi G}\left[\frac{y_0(2\nu(c^2+y_0^2)-y_0^2)}{(c^2+y_0^2)^{3/2}}\left(\arcsin\frac{x}{c}+\frac{\pi}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+(1-2\nu)\left(\arctan\frac{x\sqrt{c^2+y_0^2}}{y_0\sqrt{c^2-x^2}}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{y_0x\sqrt{c^2-x^2}}{(x^2+y_0^2)\sqrt{c^2+y_0^2}}\right]-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{i=0}^N\left\{\frac{A_ic^2}{2}\left(\arcsin\frac{x_{i+1}}{c}-\arcsin\frac{x_i}{c}\right)\left(\arcsin\frac{x}{c}+\frac{\pi}{2}+\frac{x}{c}\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}\right)-\right.$$

$$-\frac{A_i}{2}\left[\frac{x^2-x_{i+1}^2}{2}\Gamma(c,x,x_{i+1})+\left(x_{i+1}\sqrt{c^2-x_{i+1}^2}-\right.\right.$$

$$\left.-x_i\sqrt{c^2-x_i^2}\right)\left(\arcsin\frac{x}{c}+\frac{\pi}{2}\right)-\sqrt{(c^2-x_{i+1}^2)(c^2-x^2)}-$$

$$\left.-\frac{x^2-x_i^2}{2}\Gamma(c,x,x_i)+\sqrt{(c^2-x_i^2)(c^2-x^2)}\right]-$$

$$-\frac{B_i}{2}\left[(x-x_{i+1})\Gamma(c,x,x_{i+1})-(x-x_i)\Gamma(c,x,x_i)+\right.$$

$$\left.+2\left(\arcsin\frac{x}{c}+\frac{\pi}{2}\right)\left(\sqrt{c^2-x_{i+1}^2}-\sqrt{c^2-x_i^2}\right)\right]\}, \quad a < |x| < c. \quad (22)$$

Задовольнивши умову  $U(c) = 0$ , отримаємо рівняння для визначення ділянки проковзування:

$$\frac{Q}{2G}\left(1-2\nu+\frac{y_0(2\nu(c^2+y_0^2)-y_0^2)}{(c^2+y_0^2)^{3/2}}\right)-\sum_{i=0}^N\left[\frac{A_i}{2}\left(c^2\left(\arcsin\frac{x_{i+1}}{c}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.-\arcsin\frac{x_i}{c}\right)-x_{i+1}\sqrt{c^2-x_{i+1}^2}+x_i\sqrt{c^2-x_i^2}\right)-$$

$$\left.-B_i\left(\sqrt{c^2-x_{i+1}^2}-\sqrt{c^2-x_i^2}\right)\right]=0. \quad (23)$$

Враховуючи подання (22) та (13), знайдемо дотичні контактні напруження на лінії спряження поза розшаруванням:

$$\tau_{xy}^{\pm}(x, 0) = \frac{2G}{\pi(1+x)} \sum_{i=0}^N \left\{ A_i \left( -x \left( \arcsin \frac{x_{i+1}}{c} - \arcsin \frac{x_i}{c} \right) - \sqrt{c^2 - x_{i+1}^2} + \sqrt{c^2 - x_i^2} \right) - \frac{A_i x + B_i}{2\pi} \left[ \Gamma(c, x, x_{i+1}) - \Gamma(c, x, x_i) \right] \ln \frac{c-x}{c+x} + \frac{2c}{M} \left( \frac{\Gamma(c, x, x_i) - \Gamma(c, x, x_{i+1})}{2(c-x)} + \frac{\Gamma(c, x, x_{i+1}) - \Gamma(c, x, x_i)}{2(c+x)} + \sum_{s=0}^{M-1} \frac{\Gamma(c, x_s, x_{i+1}) - \Gamma(c, x_s, x_i) - \Gamma(c, x, x_{i+1}) + \Gamma(c, x, x_i)}{x_s - x} \right) \right\},$$

$$a < |x| < c,$$

$$\tau_{xy}^{\pm}(x, 0) = \frac{Qy_0 \operatorname{sgn}(x) \sqrt{x^2 - c^2}}{2\pi(1+x)(x^2 + y_0^2) \sqrt{c^2 + y_0^2}} \left( 1 - x + \frac{2c^2}{c^2 + y_0^2} - \frac{4y_0^2}{x^2 + y_0^2} \right) + \frac{2G}{\pi(1+x)} \sum_{i=0}^N \left[ A_i \left( \left( \operatorname{sgn}(x) \sqrt{x^2 - c^2} - x \right) \left( \arcsin \frac{x_{i+1}}{c} - \arcsin \frac{x_i}{c} \right) - \sqrt{c^2 - x_{i+1}^2} + \sqrt{c^2 - x_i^2} \right) - \frac{A_i x + B_i}{\pi} \frac{c}{M} \sum_{s=0}^{M-1} \frac{\Gamma(c, x_s, x_{i+1}) - \Gamma(c, x_s, x_i)}{x_s - x} \right], \quad |x| \geq c. \quad (24)$$

**3. Аналіз результатів та висновки.** Числові розрахунки проведено для безрозмірних величин  $\bar{x} = x/a_0$ ,  $\bar{y}_0 = y_0/a_0$ ,  $\bar{a} = a/a_0$ ,  $\bar{c} = c/a_0$ ,  $\bar{h} = h/a_0$ ,  $\bar{U} = U/a_0$ ,  $\bar{P} = P/G$ ,  $\bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy}/G$ ,  $\bar{\sigma}_y = \sigma_y/G$ , де  $a_0 = Q/(2\pi P)$  – довжина розшарування, коли зосереджена сила прикладена до межі ( $y_0 = 0$ ).

На рис. 2 показано залежність півдовжини ділянки розшарування  $\bar{a}$  від точки прикладання зосередженої сили  $\bar{y}_0$  для значень коефіцієнтів Пуассона  $\nu = 0, 0.25, 0.5$ . Бачимо, що у разі нестисливих ( $\nu = 0.5$ ) або близьких до них матеріалів величина  $\bar{a}$  має локальний максимум при  $\bar{y}_0 > 0$ . Це означає, що для таких матеріалів довжина зазору буде максимальною, якщо сила прикладена на деякій відстані від границі, а не до неї.

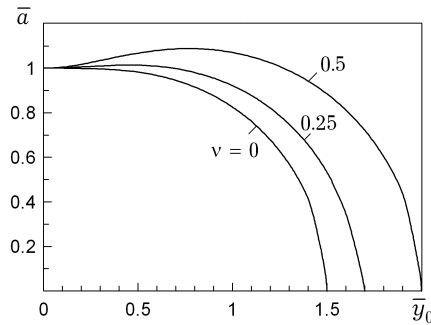


Рис. 2

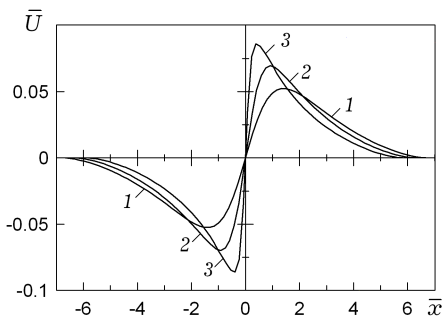


Рис. 3

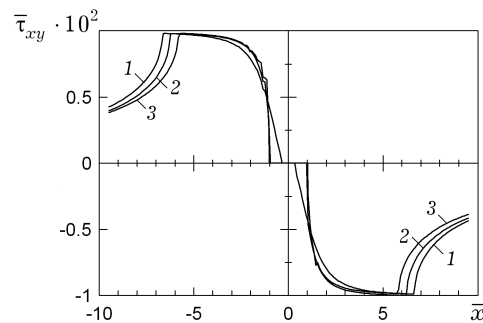


Рис. 4

На рис. 3 проілюстровано стрибок дотичних переміщень  $\bar{U}(x)$  при коефіцієнті Пуассона  $\nu = 0.25$  та зовнішньому тиску  $\bar{P} = 0.1$  для різних відстаней від точки прикладання зосередженої сили до поверхні  $\bar{y}_0 = 1.6, 0.9, 0.6$  (криві 1–3), яким відповідають такі півдовжини ділянок проковзування:  $\bar{c} = 6.66, 6.25, 5.81$ .

Бачимо, що максимальне значення стрибка дотичних переміщень зростає зі збільшенням зазору і досягається на ділянці проковзування поблизу країв зазору.

На рис. 4 показано розподіл контактних дотичних напружень  $\bar{\tau}_{xy}$  при коефіцієнті Пуассона  $\nu = 0.25$  та зовнішньому тиску  $\bar{P} = 0.1$  для тих самих значень півдовжини ділянок проковзування  $\bar{c} = 6.66, 6.25, 5.81$  (відповідно криві 1–3). З графіка видно, що для кожної кривої контактні дотичні напруження дорівнюють нулеві на ділянці розшарування, спадають на правій ділянці проковзування та зростають на лівій, залишаючись за абсолютною величиною рівними нормальним напруженням, помноженим на коефіцієнт тертя, і досягають свого локального максимуму та мінімуму на краях ділянок проковзування. При віддаленні від неї контактні дотичні напруження асимптотично прямують до нуля, залишаючись за абсолютною величиною меншими від нормальних напружень, помножених на коефіцієнт тертя.

1. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Роль истории нагружения в механике контактного взаимодействия при учете сил трения в зоне контакта // *Механика твердого тела.* – 2002. – № 4. – С. 16–25.
2. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
3. *Маланчук Н. І., Мартиняк Р. М.* Інтегральні рівняння задачі про локальне контактне проковзування тіл за дії зосереджених сил // *Прикл. проблеми механіки і математики.* – 2006. – Вип. 4. – С. 96–100.
4. *Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. Є.* Зсув притиснутих одна до одної півплощин з поверхневою виїмкою. Ч. 1. Повний контакт // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2005. – **41**, № 2. – С. 39–44.
5. *Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. Є.* Зсув притиснутих одна до одної півплощин з поверхневою виїмкою. Ч. 2. Неповний контакт // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2006. – **42**, № 4. – С. 114–120.
6. *Мартиняк Р. М., Маланчук Н. І., Монастирський Б. Є.* Пружна взаємодія двох півплощин за локального зсуву границь на ділянці міжконтактного просвіту // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2005. – **48**, № 3. – С. 101–109.
7. *Мартиняк Р. М.* Взаимодействие упругих полуплоскостей при неполном механическом контакте // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* – 1985. – Вып. 22. – С. 89–92.
8. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
9. *Швец Р. М., Мартиняк Р. М., Криштафович А. А.* Неповний механічний контакт двох пружних півплощин із ортотропних матеріалів // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 1990. – **26**, № 3. – С. 65–69.
10. *Barber J. R., Ciavarella M.* Contact mechanics // *Int. J. Solids Struct.* – 2000. – **37**, No. 1-2. – P. 29–43.
11. *Ciavarella M.* The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I–Theory; II–Examples // *Int. J. Solids Struct.* – 1998. – **35**. – P. 2349–2378.
12. *Comninou M., Barber J.* Frictional slip between a layer and a substrate due to a periodic tangential surface force // *Int. J. Solids Struct.* – 1983. – **19**, No. 6. – P. 533–539.
13. *Comninou M., Schmueser D.* Frictional slip between a layer and a substrate caused by a normal load // *Int. J. Engng. Sci.* – 1980. – **18**. – P. 131–137.
14. *Jager J.* Half-planes without coupling under contact loading // *Arch. Appl. Mech.* – 1997. – **67**. – P. 247–259.

## ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЕ ТЕЛ В ОКРЕСТНОСТИ РАССЛОЕНИЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ СИЛЫ

Рассмотрено взаимодействие двух упругих полуплоскостей из одинаковых материалов, которые контактируют под действием равномерно распределенных на бесконечности нагрузок и сосредоточенной силы, приложенной во внутренней точке верхней полуплоскости перпендикулярно к линии их сопряжения. При определенной величине силы границы полуплоскостей расслаиваются и между ними образуется зазор. В его окрестности возникают участки проскальзывания, на которых действует трение Кулона. Расслоение и проскальзывание смоделировано скачками нормальных и касательных перемещений, через которые с использованием метода комплексных потенциалов определено напряженно-деформированное состояние полуплоскостей. Для нахождения скачков получены сингулярные интегральные уравнения, которые решены аналитически. Размеры участка расслоения определены из условия ограниченности нормальных контактных напряжений, а размеры участков проскальзывания – из условия непрерывности касательных перемещений в их вершинах.

## SLIP OF BODIES IN VICINITY OF EXFOLIATION UNDER ACTION OF CONCENTRATED SURFACE FORCE

*The contact frictional interaction of two elastic half-planes having identical mechanical properties is studied. The half-planes are subjected to pressure at infinity and concentrated force applied at internal point of one of the solids directed perpendicularly to the surface of contact. For certain range of magnitude of the concentrated force the local separation can occur. In the vicinity of separation zone the partial sliding of mated surfaces, governed by Coulomb's friction law, is initiated. The separation and slip are modeled by both jumps of normal and tangential displacements, by means of which the stress and strain state of the mated bodies are represented. The singular integral equations for these jumps are derived. Their solutions are obtained analytically. The sizes of separation zone and the slip zones are determined from condition of boundedness of contact normal stresses and condition of continuity of tangential displacements.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
16.05.07