

МЕТОД СУПЕРПОЗИЦІЇ СТОСОВНО ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ХВИЛЕВОДІВ

Метод суперпозиції розвинуто для розв'язування граничних задач динамічної теорії пружності, в яких поля напружень мають локальні сингулярності степеневого вигляду. Показник степеня таких сингулярностей визначається априорно на основі загальних властивостей полів напружень у пружних тілах при наявності кутових точок на границі. На прикладі побудови розв'язку граничної задачі для неоднорідного хвилеводу показано зв'язок між асимптотичними властивостями невідомих алгебраїчної системи, до якої зводиться гранична задача, та локальною особливістю в кутовій точці. Наявність такого зв'язку використано з метою побудови ефективного алгоритму одержання кількісних оцінок характеристик хвильових полів. Запропонований метод може бути використано при розв'язуванні широкого кола граничних задач математичної фізики.

1. Вступ. Проблема розв'язання граничних задач теорії пружності є складною і багатогранною. Виникаючі при цьому труднощі стимулюють розвиток нових як чисельних, так і чисельно-аналітичних методів розв'язування. Ефективність кожного із запропонованих методів визначається, насамперед, конкретним змістом задачі. У багатьох випадках методи є взаємодоповнючими і їх спільне використання дає можливість контролювати точність отриманих результатів. Поряд із прямими чисельними схемами розвиваються чисельно-аналітичні методи розв'язування граничних задач. При цьому знаходження аналітичного розв'язку дозволяє встановити умови існування та однозначності [7, 8], розробити ефективні алгоритми для отримання кількісних даних з урахуванням особливостей поставленої граничної задачі [9], а також дати фізичне трактування розв'язку.

Розвитку одного з таких методів – методу суперпозиції – стосовно аналізу поширення хвиль у фізично неоднорідних пружних хвилеводах присвячена ця робота. Характерною рисою геометрії розглянутого хвилеводу є наявність кутових точок. На сьогодні відомі строгі розв'язки ряду граничних задач теорії пружності для областей з кутовими точками. Це, насамперед, гранична задача для плоского клина з різними типами граничних умов на гранях при різних кутах розкриття [26]. З аналізу розв'язків таких задач випливає, що напружений стан в околах кутових точок є складним і для нього характерна швидка змінюваність при наявності локальних інтегровних особливостей.

При наявності локальних особливостей в характеристиках хвильових полів, як правило, виникає неоднозначність у розв'язку граничної задачі. При цьому можна побудувати декілька розв'язків, які задовольняють основні рівняння задачі і відрізняються тільки швидкістю прямування до нескінченності тієї або іншої характеристики поля. Тоді для побудови єдиного розв'язку необхідно визначити фізично обґрунтований характер сингулярності на ребрі. Слід зазначити, що питання про особливості при гармонічних процесах у пружних тілах може бути вирішено на основі аналізу відповідної статичної граничної задачі [20]. Розв'язок таких задач у полярних координатах можна отримати або з використанням перетворення Мелліна, або на основі загального подання функції напружень.

Слід зазначити, що дослідження особливостей, які виконано за допомогою перетворення Мелліна, відносяться до прямих методів, у той час як локальні дослідження шляхом побудови місцевого розв'язку відносяться до напівобернених методів. Це випливає з того, що в першому випадку особливість виявляється з оберненого перетворення Мелліна для напружень,

а в другому – функції напруження задаються у вигляді деякого степеневого ряду, показники степенів якого знаходяться з умови існування нетривіального розв'язку однорідної задачі та вимоги обмеженості енергії деформації, накопиченої в околі точок сингулярності. Відмінність між цими двома методами проявилася при знаходженні логарифмічної особливості. Її існування вперше було доведено прямим методом [5], незважаючи на те, що напівобернений метод був розвинений раніше. Аналіз результатів досліджень особливостей у статичних задачах теорії пружності наведено в роботах [6, 27].

Крім того, важливим є висновок про те, що ці особливості можна визначити шляхом аналізу поля в околі сингулярних точок незалежно від розв'язку загальної граничної задачі для області з кутами, тобто їх можна вважати заздалегідь відомими [4].

Визначення характеру особливості виявляється істотним при побудові ефективних алгоритмів розв'язування граничних задач для областей з кутами точками.

Ця обставина використовується в методі суперпозиції для розв'язування конкретних граничних задач з особливостями.

2. Загальна характеристика методу суперпозиції. Метод суперпозиції ґрунтується на ідеї Ляме, яка полягає в тому, що загальний розв'язок задачі для обмеженого тіла будується у вигляді суперпозиції декількох часткових розв'язків, кожний з яких має достатній ступінь функціональної достовірності для задоволення граничних умов на частинах поверхні тіла, що належать до координатних поверхонь однієї сім'ї. Ляме спробував знайти точний розв'язок задачі про рівновагу паралелепіпеда, використовуючи три набори розв'язків для шару. Такий підхід привів до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, методи дослідження і розв'язування якої на той час ще не були розроблені, що стримувало широке застосування методу. Теорія нескінченних систем була розвинута лише в 30-х роках двадцятого століття Б. М. Кояловичем [24, 25].

Великий внесок у розвиток методу суперпозиції внесли Б. Л. Абрамян та його учні [1–3]. Відмітимо роботу [1], у якій вперше доведено регулярність нескінченних систем, які породжувались граничними умовами.

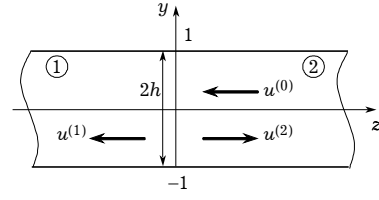
Подальший розвиток і математичне обґрунтування цей метод одержав у роботах В. Т. Грінченка та А. Ф. Улітка [17–22]. У них дослідження Б. М. Кояловича було розвинуто для систем, які породжуються граничними задачами теорії пружності в рамках методу суперпозиції. На прикладі задачі про прямокутник було знайдено зв'язок між характером поведінки компонент тензора напружень в околі кутових точок і асимптотичними властивостями невідомих у нескінченній системі.

Значний внесок у розвиток методу суперпозиції внесли також О. А. Головін [10, 11], А. М. Гомілко, В. В. Мелешко [12–14] та ін.

У цій роботі метод суперпозиції розвинуто для динамічних граничних задач, пов'язаних з дослідженням хвильових процесів в неоднорідних хвилеводах. У полях напружень в таких хвилеводах можуть існувати локальні особливості. При цьому наявність особливості в кутовій точці і її характер вважаються априорно відомими. Модельною задачею для дослідження характеру особливостей напружено-деформованого стану неоднорідних тіл у залежності від механічних властивостей середовищ, що контактують, кутів та граничних умов є плоска задача про клин [5, 6, 23].

Таким чином, розглядається дифракція пружних хвиль на границі розділу в нерегулярному хвилеводі. Під нерегулярним хвилеводом розуміємо хвилевід, властивості якого можуть змінюватися вздовж напрямку поширення хвиль. Зокрема, розглядається нерегулярний хвилевід, утворений за рахунок жорсткого контакту двох півшарів з різними механічними характеристиками.

2.1. Постановка граничної задачі та побудова загального розв'язку для жорсткого контакту двох півшарів однакової висоти. Розглядається стаціонарне хвильове поле в пружному хвилеводі, утвореному жорстким з'єднанням двох пружних півшарів однакової висоти $2h$, але з різними механічними характеристиками (рис. 1) [15].



Хвильове поле збуджується першою нормальною хвилею, що надходить з нескінченності в правому півшарі. Падаючій хвилі відповідає індекс «0». Індекси «1» і «2» відносяться до лівого та правого півшару відповідно. Властивості ізотропних середовищ характеризуються модулями зсуву μ_1, μ_2 , коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 і густинами ρ_1, ρ_2 . Поверхні $Y = \pm h$ вільні від напружень. Надалі математичну постановку та розв'язок задачі наведено в безрозмірних координатах $y = Y/h, z = Z/h$.

Граничні умови мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{(1)}(\pm 1, z) = 0, \quad z \leq 0, \quad \sigma_{yy}^{(2)}(\pm 1, z) = 0, \quad z \geq 0, \\ \tau_{yz}^{(1)}(\pm 1, z) = 0, \quad z \leq 0, \quad \tau_{yz}^{(2)}(\pm 1, z) = 0, \quad z \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

У зоні контакту умови спряження записуються у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(1)}(y, 0) = \sigma_{zz}^{(2)}(y, 0) + \sigma_{zz}^{(0)}(y, 0), \quad \tau_{zy}^{(1)}(y, 0) = \tau_{zy}^{(2)}(y, 0) + \tau_{zy}^{(0)}(y, 0), \\ u_z^{(1)}(y, 0) = u_z^{(2)}(y, 0) + u_z^{(0)}(y, 0), \quad u_y^{(1)}(y, 0) = u_y^{(2)}(y, 0) + u_y^{(0)}(y, 0). \end{aligned} \quad (2)$$

Необхідно знайти вектор переміщень $\mathbf{u}(y, z) = \{u_y(y, z), u_z(y, z)\}$, що задовольняє векторне рівняння Ляме

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (3)$$

задані граничні умови (1) та умови спряження (2).

Додатково до умов спряження (2) мають виконуватися умови випромінювання на нескінченності, які полягають у тому, що кожна нормальна хвиля, що поширюється, у пройденому і відбитому полях переносить енергію від границі розділу на нескінченність.

У методі суперпозиції вираз для вектора переміщень у кожному з півшарів має дві складові. Перша має достатню довільність щодо виконання граничних умов на поверхнях $y = \pm 1$. Ці вимоги задовольняє загальний розв'язок граничної задачі для нескінченного шару. Для симетричних коливань шукані розв'язки для $z \geq 0$ мають вигляд

$$\begin{aligned} u_{z1}^{(2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (ix_1(\tau) \tau \text{ch } p_1 y - x_2(\tau) p_2 \text{ch } p_2 y) e^{i\tau z} d\tau, \\ u_{y1}^{(2)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1(\tau) p_1 \text{sh } p_1 y + i x_2(\tau) \tau \text{sh } p_1 y) e^{i\tau z} d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Другу складову приймають у вигляді відомого розв'язку граничної задачі для періодично деформованої півплощини:

$$\begin{aligned} u_{z2}^{(2)} &= i A_0 \Omega_1 e^{i\Omega_1 z} - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k q_1 e^{-q_1 z} + B_k \beta_k e^{-q_2 z}) \cos \beta_k y, \\ u_{y2}^{(2)} &= - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \beta_k e^{-q_1 z} + B_k q_2 e^{-q_2 z}) \sin \beta_k y. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут

$$q_j = \begin{cases} \sqrt{\beta_k^2 - \Omega_j^2}, & |\beta_k| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \beta_k^2}, & |\beta_k| \leq \Omega_j, \end{cases} \quad p_j = \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - \Omega_j^2}, & |\tau| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \tau^2}, & |\tau| \leq \Omega_j, \end{cases}$$

$\beta_k = k\pi$, $\Omega_j = \frac{\omega h}{c_j}$, $j = 1, 2$; c_1 – швидкість поздовжніх хвиль; c_2 – швидкість поперечних хвиль.

Друга складова переміщень – це сума по k , яка є рядом Фур'є за повними тригонометричними функціями. Вона забезпечує виконання двох довільних граничних умов при $z = 0$, а інтеграл Фур'є (перша складова переміщення) – виконання умов при $y = \pm 1$.

Виконання умови відсутності дотичних напружень на поверхнях $y = \pm 1$ приводить до зв'язку між $x_1(\tau)$ і $x_2(\tau)$ у вигляді

$$x_1(\tau) = -i x_2(\tau) \frac{\tau^2 + p_2^2}{2\tau p_1} \frac{\text{sh } p_2}{\text{sh } p_1}.$$

Тоді, вводячи нову функцію $x(\tau) = i x_2(\tau) / (\tau p_1^2)$, одержимо вираз для вектора переміщень у вигляді

$$\begin{aligned} u_y &= -\sum_{k=1}^{\infty} (A_k \beta_k e^{-q_1 z} + B_k q_2 e^{-q_2 z}) \sin \beta_k y + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U_y(\tau, y) e^{i\tau z} dy, \\ u_z &= i A_0 \Omega_1 e^{i\Omega_1 z} - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k q_1 e^{-q_1 z} + B_k \beta_k e^{-q_2 z}) \cos \beta_k y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U_z(\tau, y) e^{i\tau z} dy, \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned} U_y(\tau, y) &= \tau \left(p_1^2 p_2 \frac{\text{ch } p_2 y}{\text{sh } p_2} - \frac{\xi^2 + p_2^2}{2} p_1 \frac{\text{ch } p_1 y}{\text{sh } p_1} \right), \\ U_z(\tau, y) &= p_1^2 \left(\tau^2 \frac{\text{sh } p_2 y}{\text{sh } p_2} - \frac{\xi^2 + p_2^2}{2} \frac{\text{sh } p_1 y}{\text{sh } p_1} \right), \end{aligned}$$

з невідомими сталими A_0, A_k, B_k , $k = 1, 2, \dots$, і функцією $x(\tau)$.

Розв'язок для пройденого поля ($z < 0$) записується аналогічно з урахуванням зміни напрямку поширення і механічних характеристик середовища відносно невідомих C_0, C_k, D_k , $k = 1, 2, \dots$, і функції $\tilde{x}(\tau)$.

Виконання умови відсутності нормальних напружень на поверхнях $y = \pm 1$ та умов спряження (2) приводить до системи інтегро-алгебраїчних рівнянь відносно сталих невідомих $A_0, A_k, B_k, C_0, C_k, D_k$, $k = 1, 2, \dots$, і функцій $x(\tau)$, $\tilde{x}(\tau)$, яка має такий вигляд:

$$\begin{aligned} x(\tau)\Delta(\tau) + A_0 \frac{2i \Omega_0^{(2)2} \Omega_1^2}{\tau^2 - \Omega_1^{(2)2}} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k e_k^{(2)}(\tau) + B_k c_k^{(2)}(\tau) &= 0, \\ \tilde{x}(\tau)\Delta(\tau) + C_0 \frac{2i \Omega_0^{(1)2} \Omega_1^2}{\tau^2 - \Omega_1^{(1)2}} - \sum_{k=1}^{\infty} C_k e_k^{(1)}(\tau) - D_k c_k^{(2)}(\tau) &= 0, \\ i C_0 \Omega_1^{(1)} + i A_0 \Omega_1^{(2)} &= -\xi \Omega_0^{(2)2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu_1 \left(-C_k q_1^{(1)} + D_k \frac{\beta_k^2 + q_2^{(1)2}}{2\beta_k} \right) - \mu_2 \left(A_k q_1^{(1)} + B_k \frac{\beta_k^2 + q_2^{(2)2}}{2\beta_k} \right) = \\
& = -(-1)^k \frac{\mu_2 \xi p_1^{(2)2} (2\xi^2 - \Omega_2^{(2)2})}{(p_2^{(2)2} + \beta_k^2)(p_1^{(2)2} + \beta_k^2)} (p_2^{(2)2} - p_1^{(1)2}), \\
& C_k q_1^{(1)} - D_k \beta_k + A_k q_1^{(1)} + D_k \beta_k = (-1)^k \xi p_1^{(2)2} \left(\frac{2p_2^{(2)2}}{p_2^{(2)2} + \beta_k^2} - \frac{\xi^2 + p_2^{(2)2}}{p_1^{(2)2} + \beta_k^2} \right), \\
& (-C_k \beta_k + D_k q_1^{(1)}) - (-1)^k \frac{\beta_k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\tau) u_k^{(1)}(\tau) d\tau + (A_k \beta_k + B_k q_1^{(2)}) - \\
& - (-1)^k \frac{\beta_k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u_k^{(2)}(\tau) d\tau = -u_k^{(2)}(\xi), \\
& \mu_1 \left(C_0 \frac{\Omega_2^{(1)2}}{2} + \frac{\Omega_2^{(1)2} \Omega_0^{(1)2}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\tau) d\tau \right) - \mu_2 \left(A_0 \frac{\Omega_2^{(2)2}}{2} + \frac{\Omega_2^{(2)2} \Omega_0^{(2)2}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) d\tau \right) = \\
& = \mu_2 i \frac{\Omega_2^{(2)2} \Omega_0^{(2)2}}{2}, \\
& \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(C_k \frac{\beta_k^2 + q_2^{(1)2}}{2} - D_k \beta_k q_2^{(1)} - (-1)^k \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\tau) b_k^{(1)} d\tau \right) - \left(A_k \frac{\beta_k^2 + q_2^{(2)2}}{2} + \right. \\
& \left. + B_k \beta_k q_2^{(2)} - (-1)^k \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) b_k^{(2)} d\tau \right) = -i b_k^{(2)}(\xi). \quad (7)
\end{aligned}$$

Тут ξ – хвильове число падаючої хвилі,

$$\Delta(\tau) = (2\tau^2 - \Omega_2^2)^2 p_1 \operatorname{ch} p_1 - 4\tau^2 p_1^2 p_2 \operatorname{ch} p_2 = 0,$$

$$u_k^{(i)}(\tau) = p_1^{(i)2} \left(\frac{2\tau^2}{\beta_k^2 + p_2^{(i)2}} - \frac{\tau^2 + p_2^{(i)2}}{\beta_k^2 + p_1^{(i)2}} \right),$$

$$b_k^{(i)}(\tau) = p_1^{(i)2} \left(\frac{2\tau^2 p_2^{(i)2}}{\tau^2 + q_2^{(i)2}} - \frac{(\tau^2 + p_2^{(i)2})(\tau^2 + \Omega_0^2)}{\tau^2 + q_1^{(i)2}} \right),$$

$$\Omega_0^2 = \frac{\Omega_2^2}{2} - \Omega_1^2, \quad e_k^{(i)}(\tau) = \frac{2q_1^{(i)}(\beta_k^2 + \Omega_0^2)}{\tau^2 + q_1^{(i)2}}, \quad c_k^{(i)} = \frac{2q_2^{(i)}\beta_k^2}{\tau^2 + q_2^{(i)2}}.$$

Структура системи (7) вказує на важливу особливість алгебраїчних співвідношень, що впливають з умов спряження. Отримана система (7) є системою другого роду, у якій природним чином виділяються головні елементи, які відповідають за виконання конкретних граничних умов. Саме формування алгебраїчної системи проводиться з використанням основних властивостей розвинення у ряди Фур'є. Це забезпечує збіжність використаних розвинень навіть у випадку наявності інтегровних особливостей у функцій, які розвиваємо у ряди, як це має місце в досліджуваній фізичній задачі. Характер сингулярності в полі напружень може бути визначений до розв'язання граничної задачі в цілому.

Для повного опису хвильового поля на границі розділу двох підшарів прості методи редукції інтегро-алгебраїчних рівнянь непридатні. Це зумовлено наявністю в кутовій точці особливості за напруженнями при певних співвідношеннях параметрів контактуючих середовищ [6].

Існування в кутовій точці особливості за напруженнями призводить до того, що в рамках методу суперпозиції інтеграл та ряди для напружень на лінії контакту сходяться повільно.

Для одержання розв'язку, що адекватно описує хвильове поле на границі розділу, необхідно використати асимптотичні властивості невідомих. Аналіз асимптотики невідомих у сумах базується на властивостях збіжності рядів для напружень поблизу кутових точок на лінії контакту двох середовищ: $y = \pm 1, z = +0$. Зважаючи на характер особливості в околі кута, нормальне $\sigma_{zz}(y = \pm 1, 0)$ і дотичне $\tau_{zy}(\pm 1, 0)$ напруження можуть бути подані у вигляді [16]

$$\frac{\sigma_{zz}(\pm 1, z)}{2\mu} = \frac{\sigma^{(+)}}{(1-y^2)^{1-\varepsilon}} + \psi(y), \quad \frac{\tau_{zy}(\pm 1, z)}{2\mu} = \frac{\tau^{(+)}}{(1-y^2)^{1-\varepsilon}} + \psi_1(y). \quad (8)$$

Тут $\sigma^{(+)}, \tau^{(+)}$ – сталі величини, а $\psi(y), \psi_1(y)$ – деякі гладкі функції.

Запишемо доданки з особливістю у виразах (8) нескінченим рядом за системами функцій $\cos \beta_k y$ і $\sin \beta_k y$.

При обчисленні коефіцієнтів цих рядів використовувалися значення інтегралів

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-y^2)^{1-\varepsilon} \cos \beta_k y dy &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2}{\beta_k} \right)^{\varepsilon-0.5} \Gamma(\varepsilon) J_{\varepsilon-0.5}(\beta_k), \\ \int_0^1 (1-y^2)^{1-\varepsilon} \sin \beta_k y dy &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2}{\beta_k} \right)^{\varepsilon-0.5} \Gamma(\varepsilon) J_{\varepsilon+0.5}(\beta_k). \end{aligned} \quad (9)$$

Виходячи з виразів для нормальних і дотичних напружень у рамках методу суперпозиції з урахуванням (8), для великих значень k можна записати систему рівнянь для визначення асимптотичних значень невідомих A_k, B_k у вигляді

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2a_0}{\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2}} \frac{J_{\varepsilon-0.5}}{\beta_k^{\varepsilon-0.5}}, & B_k &= \frac{-2b_0}{\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2}} \frac{J_{\varepsilon-0.5}}{\beta_k^{\varepsilon-0.5}}, \\ a_0 &= d_0 \left(1 - \frac{\Omega_1^4 + \Omega_2^4}{4\beta_k (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} \right), & d_0 &= \sigma^{(+)} + \tan\left(\frac{\pi\varepsilon}{2}\right) \tau^{(+)}, \\ b_0 &= d_0 \left(1 - \frac{\Omega_1^4 + \Omega_2^4}{4\beta_k (\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} \right) - \frac{\sigma^{(+)}(\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2})}{2\beta_k}. \end{aligned} \quad (10)$$

Установивши характер поведінки невідомих у системі (7), вважаємо, що

$$A_k = \frac{A_K \beta_K}{\beta_k^\varepsilon}, \quad B_k = \frac{B_K \beta_K}{\beta_k^\varepsilon}, \quad k > K.$$

Аналогічно для лівого півшару ($z < 0$) знаходимо асимптотику невідомих C_k, D_k . Ці співвідношення дозволяють замінити всі невідомі з високими номерами в нескінченній системі (7) їх асимптотичним значенням і провести коректну редукцію системи. Асимптотика для функцій $x(\tau), \tilde{x}(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ впливає з першого й другого рівнянь системи (7) відповідно:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= -\frac{4}{\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\tau^{\varepsilon+3}} \left(\coth\left(\frac{\varepsilon\pi}{2}\right) \sigma^{(+)}(\varepsilon-1)\tau^{(+)\varepsilon} \right), \\ \tilde{x}(\tau) &= -\frac{4}{\Omega_1^{(1)2} - \Omega_2^{(1)2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\tau^{\varepsilon+3}} \left(\coth\left(\frac{\varepsilon\pi}{2}\right) \sigma^{(-)}(\varepsilon-1)\tau^{(-)\varepsilon} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Для знаходження показника особливості $1-\varepsilon$ у виразах (8) збережемо тільки головні члени в системі (7). Одержимо таку систему однорідних рівнянь відносно $\sigma^{(+)}, \tau^{(+)}, \sigma^{(-)}, \tau^{(-)}$:

$$\begin{aligned}
& \mu_2 \tau^{(+)} + \mu_1 \tau^{(-)} = 0, \\
& 2(1 - v_2) \sigma^{(+)} + (1 - 2v_2) \operatorname{tg} \frac{\varepsilon \pi}{2} \tau^{(+)} + \sigma^{(+)} 2(1 - v_1) \sigma^{(-)} + (1 - 2v_1) \operatorname{tg} \frac{\varepsilon \pi}{2} \tau^{(-)} = 0, \\
& \mu_2 \left(\sigma^{(+)} - \frac{\varepsilon^2 \sigma^{(+)}}{\sin^2 \frac{\pi \varepsilon}{2}} - \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\varepsilon \pi}{2} \tau^{(+)}}{\sin^2 \frac{\pi \varepsilon}{2}} \right) - \\
& \quad - \mu_1 \left(\sigma^{(-)} - \frac{\varepsilon^2 \sigma^{(-)}}{\sin^2 \frac{\pi \varepsilon}{2}} - \frac{\varepsilon(1 + \varepsilon) \operatorname{tg} \frac{\varepsilon \pi}{2} \tau^{(-)}}{\sin^2 \frac{\pi \varepsilon}{2}} \right) = 0, \\
& \sigma^{(+)} \left(1 - 2v_2 + \frac{\varepsilon - 2(1 - v_2)}{\sin^2 \frac{\pi \varepsilon}{2}} \varepsilon \right) - \operatorname{tg} \frac{\varepsilon \pi}{2} \left(2(1 - v_2) - \frac{\varepsilon - 2(1 - v_2)}{\sin^2 \frac{\pi \varepsilon}{2}} \varepsilon \right) - \\
& \quad - \sigma^{(-)} \left(1 - 2v_1 + \frac{\varepsilon - 2(1 - v_1)}{\sin^2 \frac{\pi \varepsilon}{2}} \varepsilon \right) - \operatorname{tg} \frac{\varepsilon \pi}{2} \left(2(1 - v_1) - \frac{\varepsilon - 2(1 - v_1)}{\sin^2 \frac{\pi \varepsilon}{2}} \varepsilon \right) = 0.
\end{aligned}$$

Визначник отриманої системи збігається з рівнянням Дандерса для статичних задач [6]:

$$\left(\beta \sin^2 \frac{\varepsilon \pi}{2} + (\alpha - \beta) \varepsilon^2 \right)^2 - 0.25 \sin^2 \varepsilon \pi - \varepsilon^2 \alpha^2 = 0. \quad (12)$$

Тут

$$\alpha = \frac{\mu_2(1 - v_1) - \mu_1(1 - v_2)}{\mu_2(1 - v_1) + \mu_1(1 - v_2)}, \quad \beta = \frac{1}{2} \frac{\mu_2(1 - 2v_1) - \mu_1(1 - 2v_2)}{\mu_2(1 - v_1) + \mu_1(1 - v_2)}.$$

Аналіз рівняння (12) для різних комбінацій пружних сталей наведено в [6].

Подальша побудова алгоритму розв'язку пов'язана зі способом замикання системи. У роботі використовується традиційний підхід, в якому задаються асимптотичні вирази для всіх чотирьох коефіцієнтів. У цьому випадку $\sigma^{(+)}$, $\tau^{(+)}$ для відбитого поля і $\sigma^{(-)}$, $\tau^{(-)}$ для пройденого поля також стають невідомими, а коефіцієнти A_k, B_k, C_k, D_k для усіх $k > K$ задаються у вигляді (11).

Закінчуючи розгляд методу суперпозиції стосовно задачі дифракції нормальних хвиль на вертикальній границі в складеному хвилеводі, підкреслимо ще раз, що основна перевага цього методу полягає в можливості врахування локальних особливостей за напруженнями на границі розділу. Це дозволяє побудувати ефективний алгоритм для обчислення характеристик відбитого та пройденого полів при врахуванні обмеженого числа доданків у рядах системи (7).

При визначенні порядку лінійної системи, що відповідає системі (7), необхідно оцінити якість наближеного розв'язку, що описує хвильовий процес у нерегулярному хвилеводі. Для цього існує ряд критеріїв. Насамперед, оцінювалася стійкість отриманих результатів. При проведенні обчислень було встановлено, що при збереженні більш ніж десяти членів у рядах значення невідомих $A_k, B_k, C_k, D_k, k = 1, 2$, практично не змінюється (зберігаються чотири значущі цифри), а для невідомих $A_k, B_k, C_k, D_k, k = 3, 4$, зберігаються дві значущі цифри. Цим забезпечується висока точність оцінок інтегральних характеристик хвильових полів.

При виконанні розрахунків кількість невідомих у сумах системи (7) $K = 15$. Для великих значень k використовувалися асимптотичні значення невідомих. Інтегрування на інтервалі $(-\infty, +\infty)$ з урахуванням парності підінтегральних функцій зводилося до інтегрування на інтервалі $(0, T)$ з

додаванням значення інтеграла на інтервалі $(T, +\infty)$, отриманого при використанні асимптотичних розвинень за τ підінтегральних функцій. При цьому T приймали рівним 200.

Одним із критеріїв правильності розв'язків був контроль за точністю виконання закону збереження енергії. Середній за період потік потужності через поперечний переріз, що переносить падаюча хвиля, дорівнює сумі потужностей, що переносять відбиті та пройдені хвилі, що поширюються. Середній за період потік потужності у відбитому та пройденому полях дорівнює сумі потоків, які відповідають кожній хвилі, що поширюється, на даній частоті. Він визначається співвідношенням

$$E = \sum_{j=1}^J E_j, \quad E_j = \mu_i \omega |K_j^{(i)}|^2 \Omega_2^{(i)2} (\xi_j^{(i)2} - \Omega_1^{(i)2}) \frac{\Delta'_{(i)}(\xi_j^{(i)})}{2}, \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

Нагадаємо, що індекс $i = 1$ відповідає пройденому полю, а індекс $i = 2$ – відбитому; J – кількість хвиль, що поширюються у відповідному півшарі; K_j – амплітуда j -ї нормальної хвилі. Амплітуду K_j у відбитому та пройденому полях визначали зі співвідношень

$$K_j^{(2)} = \operatorname{Res}_{\tau=\xi_j} x(\tau), \quad K_j^{(1)} = \operatorname{Res}_{\tau=\xi_j} \tilde{x}(\tau),$$

де $\operatorname{Res}_{\tau=\xi_j} x(\tau)$ є лишком функції $x(\tau)$ при $\tau = \xi_j$.

Для широкого діапазону зміни параметрів середовища при прийнятій кількості невідомих у кінцевій системі закон збереження енергії виконувався з точністю до 0.2% енергії падаючої хвилі.

Слід зазначити, що врахування особливості за напруженнями практично не позначалося на точності виконання закону збереження енергії. Це зумовлено тим, що амплітуди хвиль, що поширюються, визначаються, в основному, першими коефіцієнтами системи (7). Тому аналіз енергетичних особливостей процесу відбиття – проходження нормальної хвилі на границі складеного хвилеводу – може бути проведений при використанні методу простої редукції системи (7). Розподіл енергії падаючої хвилі між відбитим і пройденим полями для конкретних параметрів контактуючих середовищ буде наведено нижче.

Головним критерієм адекватності вибраної розрахункової схеми є контроль за точністю виконання умов спряження. Аналіз точності виконання умов спряження дозволив установити такі закономірності. Заміна нескінченної системи (7) скінченною призводить до виникнення похибки у виконанні умов спряження. При використанні описаного вище алгоритму зрізання системи величина похибки виконання умов спряження для переміщень u_z, u_y для всіх розглянутих випадків не перевищувала 4% від $u_z^{(0)}(0, 0)$ (переміщення падаючої хвилі). Похибка за дотичними напруженнями не перевищувала 0.02% від $\sigma_{zz}^{(0)}(0, 0)$ (нормального напруження падаючої хвилі) для усіх $|y| < 1$, крім малого околу кутової точки, і практично не залежала від показника особливості в кутовій точці. Для нормального напруження $\sigma_{zz}^{(1,2)}(y, 0)$ ситуація інша. Точність виконання умов спряження значно спадає поблизу малого околу кутової точки ($y = \pm 1, z = +0$).

Нагадаємо, що поблизу малого околу кутової точки нормальне напруження відбитого ($i = 2$) поля і пройденого поля ($i = 1$) визначаються як

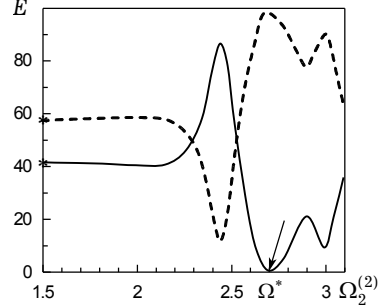
$$\frac{\sigma_{zz}^{(2)}(\pm 1, z)}{2\mu} = \frac{\sigma^{(+)}}{(1 - y^2)^{1-\varepsilon}} + \psi(y), \quad \frac{\sigma_{zz}^{(1)}(\pm 1, z)}{2\mu} = \frac{\sigma^{(-)}}{(1 - y^2)^{1-\varepsilon}} + \tilde{\psi}(y).$$

Навіть найменша величина різниці $\delta = \sigma^{(+)} - \sigma^{(-)}$ поблизу кута призводить до нескінченної похибки $\tilde{\delta} = \delta/(1 - y^2)^{1-\varepsilon}$. Тому навіть з урахуванням асимптотики невідомих, яка відображає поведінку хвильових полів поблизу кутових точок, не можна задовольнити з заданою точністю умови спряження за напруженнями поблизу кута. У той же час при розрахунках для всіх $|y| < 0.98$ умови спряження за нормальними напруженнями виконувалися з похибкою до 5.0% від $\sigma_{zz}^{(0)}(0, 0)$.

3. Чисельний приклад. Розглянемо особливості процесу відбиття – проходження першої нормальної хвилі від границі розділу в складеному хвилеводі у випадку, коли у відбитому полі хвилі вищих порядків, що поширюються, появляються раніше, ніж у пройденому. Така ситуація можлива за умови $\mu_1(1 - v_1)/(\rho_1(1 - 2v_1)) > \mu_2(1 - v_2)/(\rho_2(1 - 2v_2))$. Аналіз проведемо для частот, менших від частоти $\Omega_2^{(2)2} \leq \pi$.

Конкретні обчислення виконаємо для хвилеводу з такими характеристиками: $\mu_2/\mu_1 = 6.54$, $\rho_2/\rho_1 = 8.5$, $v_2 = 0.29$, $v_1 = 0.3$. У цьому випадку виникає особливість за напруженнями у кутовій точці з показником $1 - \varepsilon = 0.089$. Хвиля падає з більш твердого середовища в більш м'яке середовище.

На рис. 2 наведено частотну залежність E трансформації енергії падаючої хвилі у відбиті та пройдені хвилі, що поширюються, для складеного хвилеводу. Суцільна крива характеризує енергію пройденого поля, а штрихова – відбитого. Крапками на осі E позначено енергії відбитих і пройдених полів, знайдені за одновимірним наближенням; через Ω^* позначено частоту, на якій у відбитому полі появляються хвилі вищих порядків, що поширюються. У розглянутому діапазоні частот у пройденому полі хвилі вищих порядків, що поширюються, ще не з'являються.



Для частот аж до $\Omega_2^{(2)} < 2.0$ трансформація енергії падаючої хвилі у відбиті та пройдені хвилі досить добре описується в рамках стрижневої моделі і визначається тільки співвідношенням імпедансів контактуючих середовищ. Для частот, вищих від $\Omega_2^{(2)} = 2$, ситуація змінюється, хоча у відбитому та пройденому полях, як і раніше, існує тільки одна хвиля, що поширюється. Енергія пройденого поля починає збільшуватися, і на частоті $\Omega_2^{(2)} = 2.45$ спостерігається максимум проходження. На цій частоті енергія пройденого поля збільшилася у 2.1 разів відносно енергії пройденого поля в низькочастотному діапазоні. З ростом частоти спостерігається наступна характерна риса в трансформації енергії падаючої хвилі. Енергія пройденого поля зменшується, і в цьому випадку на частоті Ω^* , коли у відбитому полі з'являються хвилі вищих порядків, що поширюються, спостерігається максимум відбиття. Для розглянутої пари матеріалів на частоті Ω^* енергія в друге середовище практично не проходить. В області частот, коли у відбитому полі появляються хвилі вищих порядків, що поширюються, енергія відбитого поля визначається енергоємністю усіх хвиль, що поширюються на даній частоті. При цьому спостерігається істотна залежність енергетичної ваги кожної з них від частоти.

4. Висновки. Врахування локальної особливості по напруженням в кутовій точці в неоднорідному хвилеводі, утвореному жорстким контактом двох півшарів з різними механічними характеристиками дозволив виявити

ряд нових особливостей ближнього до границі розділу поля, які не можуть бути знайдені в рамках одновимірних моделей. Зокрема, в діапазоні частот, у якому в відбитому та в пройденому полях поширюється лише одна хвиля, існують інтервали, в яких границя розділу зовсім по-різному пропускає енергію. На певних частотах границя максимально прозора, а на інших практично не пропускає енергію в другий півшар. Розвинута методика побудови та аналізу загальних розв'язків динамічних граничних задач, що базується на суттєвому використанні апріорних відомостей про локальні особливості полів напружень, може бути застосована для широкого кола задач математичної фізики.

1. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника // Прикл. математика и механика. – 1957. – **21**, № 1. – С. 89–101.
2. *Абрамян Б. Л.* Об одном случае плоской задачи теории упругости для прямоугольника // Докл. АН АрмССР. – 1958. – **26**, № 2. – С. 65–72.
3. *Абрамян Б. Л., Манукян М. М.* Решение плоской задачи теории упругости для прямоугольника в перемещениях // Докл. АН АрмССР. – 1957. – **25**, № 4. – С. 177–184.
4. *Аксентян О. К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // Прикл. математика и механика. – 1967. – **31**, № 1. – С. 178–186.
5. *Боджи Д.* Действие касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные упругие клинья, выполненные из различных материалов и соединенные по граням // Прикл. механика. Тр. Амер. общ. инженеров-механиков. – 1968. – **35**, № 3. – С. 29–37.
6. *Боджи Д.* Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы // Прикл. механика. Тр. Амер. общ. инженеров-механиков. – 1971. – **38**, № 2. – С. 87–96.
7. *Бурак Я. Й., Мороз Г. І.* Про два варіанти варіаційного формулювання крайових задач нелінійної механіки пружних систем // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 78–86.
8. *Бурак Я. Й., Рудавський Ю. К., Сухорольський М. А.* Узагальнені розв'язки Фур'є крайових задач теорії оболонок // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 57–62.
9. *Бурак Я. Й., Чернуха О. Ю., Мороз Г. І.* Про умови коректності одного класу крайових задач масопереносу домішкової речовини двома шляхами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 3. – С. 77–84.
10. *Головин О. А.* О вынужденных продольных колебаниях цилиндра при заданных на поверхности напряжениях // Изв. АН АрмССР. Механика. – 1971. – **24**, № 4. – С. 69–76.
11. *Головин О. А., Прокопов В. К.* О стационарных колебаниях упругого цилиндра конечной длины // Прикл. механика. – 1974. – **10**, № 7. – С. 28–35.
12. *Гомилко А. М., Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Асимптотика неизвестных при решении методом суперпозиции плоской задачи о продольной деформации упругой полосы // Прикл. механика. – 1988. – **24**, № 7. – С. 77–83.
13. *Гомилко А. М., Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Метод однородных решений в смешанной задаче для упругой // Прикл. механика. – 1990. – **26**, № 2. – С. 98–107.
14. *Гомилко А. М., Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* О возможностях метода однородных решений в смешанной задаче теории упругости для полуполосы // Теорет. и прикл. механика. – 1987. – Вып. 18. – С. 3–8.
15. *Городецкая Н. С.* Дифракция волн Рэлея–Лэмба на вертикальной границе в составном упругом волноводе // Акуст. вісн. – 2000. – **3**, № 1. – С. 23–35.
16. *Городецкая Н. С.* К задаче об отражении первой симметричной нормальной волны от заземленного торца полуполосы // Акуст. вісн. – 1999. – **2**, № 2. – С. 26–34.
17. *Гринченко В. Т.* Об особенностях динамического деформирования протяженных цилиндров и пластин в области высоких частот // Прикл. механика. – 1977. – **13**, № 10. – С. 43–49.
18. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.

19. *Гринченко В. Т.* Развитие метода решения задач излучения и рассеяния звука в неканонических областях // Гидромеханика. – 1996. – Вып. 70. – С. 27–40.
20. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* О резонансе в полубесконечной упругой полосе // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 2. – С. 58–63.
21. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* О точном решении осесимметричной задачи теории упругости для круглой жестко заземленной плиты // Изв. АН АрмССР Сер. физ.-мат. наук. – 1963. – **16**, № 5. – С. 125–132.
22. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Равновесие упругих тел канонической формы. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с. – (Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6 т. – Т. 3.)
23. *Дандерс Дж.* Действие касательных и нормальных нагрузок на прямоугольные упругие клинья, выполненные из различных материалов и соединенные по граням. Обсуждение // Прикл. механика. Тр. Амер. общ. инженеров-механиков. – 1969. – **36**, № 3. – С. 283–285.
24. *Коялович Б. М.* Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // Изв. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1930. – **3**. – С. 41–167.
25. *Коялович Б. М.* К теории бесконечных систем линейных уравнений (Ответ проф. Р. О. Кузьмину) // Тр. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1932. – **2**, № 4. – С. 1–16.
26. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1967. – 402 с.
27. *Vogy D. B.* The plane solution for joined dissimilar elastic semistrrips under tension // Trans. ASME. Ser. E. – 1975. – **45**, No 1. – P. 93–98.

МЕТОД СУПЕРПОЗИЦИИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ГРАНИЧНЫМ ЗАДАЧАМ В НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНОВОДАХ

Метод суперпозиции развит для решения граничных задач динамической теории упругости в полях напряжения которых существует локальная особенность степенного вида. Показатель степени таких сингулярностей определяется априорно на основе общих свойств полей напряжений в упругих телах при наличии угловых точек границы. На примере решения граничной задачи для неоднородного волновода показана связь между асимптотическими свойствами неизвестных алгебраической системы, к которой сводится граничная задача, и локальной особенностью в угловой точке. Существование такой связи использовано для построения эффективного алгоритма получения количественных оценок характеристик волновых полей. Предложенный метод может быть использован для решения широкого класса задач математической физики.

METHOD OF SUPERPOSITION AS APPLIED TO BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN NON-REGULAR WAVEGUIDS

The method of superposition has been developed for solving the boundary problems of the dynamic elasticity theory. There are local power singularities of stress field. The exponent of such singularities is defined a priori on the basis of the general properties of stress fields in elastic bodies in the presence of angular points on the boundary. The connection between asymptotic properties of the unknown coefficients of algebraic system corresponding to the boundary problem and local singularity at angular point has been found. The boundary problem for non-regular waveguide has been considered. The existence of the connection is used for development of effective algorithm for obtaining the quantitative estimations of characteristics of the wave fields. The proposed method can be used for solving a wide class of problems of mathematical physics.

Ин-т гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано
23.01.06