УДК 539.3

С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян

К ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫМ ЗАДАЧАМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛ

В рамках известных допущений теории анизотропных пластин, путем осреднения уравнений теории упругости получены основные уравнения изгиба и устойчивости геометрически нелинейных трансверсально-изотропных пластин, находящихся под действием тангенциальных сил.

1. Рассматривается задача цилиндрического изгиба трансверсально-изотропной пластинки под действием тангенциальных сил $X^+(x)$, $X^-(x)$, $Y^+(x)$, $Y^-(x)$, приложенных соответственно к внешним основаниям пластинки $z = h/2$, $z = -h/2$, где h – постоянная толщина пластинки.

Предполагается, что [1]:

– нормальные к срединной плоскости пластинки перемещения u_z не зависят от координаты z;

– касательные напряжения τ_{x2} и τ_{y2} по толщине пластинки меняются по заданному закону;

– нормальное напряжение σ_2 пренебрежимо мало.

При этом принимается также, что по сравнению с единицей малы не только деформации, т. е. удлинения и сдвиги, но и углы поворота элементов пластинки [3].

2. На основании принятых предположений, выполняя известные процедуры [1] с использованием основных уравнений математической теории упругости [3], для перемещений получим

$$u_x = u - z\frac{\partial w}{\partial x} + z\frac{X_1}{G^0} + \frac{z^2}{2h}\frac{X_2}{G^0} + I_{(2)}\frac{\varphi_{(x)}}{G^0},$$

$$u_y = v + z\frac{Y_1}{G^0} + \frac{z^2}{zh}\frac{Y_2}{G^0} + I_{(z)}\frac{\psi_{(x)}}{G^0},$$

$$u_z = w(x), \tag{1}$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ – искомые перемещения срединной поверхности пластинки; $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$ – искомые функции, характеризующие поперечные сдвиги [1] ; G^0 – модуль поперечного сдвига;

$$I(z) = \int_0^z \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)dz = \frac{z}{2}\left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3}\right).$$

В предположении, что [1]

$$\tau_{xz} = X_1 + \frac{2}{h}X_2 + f(z)\varphi(x), \qquad \tau_{yz} = Y_1 + \frac{2}{h}Y_2 + f(z)\psi(x), \tag{2}$$

где

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right), \tag{3}$$

$$X_1 = \frac{X^+ - X^-}{2}, \quad Y_1 = \frac{Y^+ - Y^-}{2}, \quad X_2 = X^+ + X^-, \quad Y_2 = Y^+ + Y^-, \tag{4}$$

для остальных напряжений найдем

$$\sigma_x = B\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right] + I\frac{B}{G^0}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + z\frac{B}{G^0}\frac{\partial X_1}{\partial x} + z^2\frac{B}{2hG^0}\frac{\partial X_2}{\partial x},$$

$$\sigma_y = \nu \sigma_x, \qquad \sigma_z = 0,$$

$$\tau_{xy} = G \frac{\partial v}{\partial x} + I \frac{G}{G^0} \frac{\partial \psi}{\partial x} + z \frac{G}{G^0} \frac{\partial Y_1}{\partial x} + z^2 \frac{G}{2hG^0} \frac{\partial Y_2}{\partial x}, \tag{5}$$

где $G = E/[2(1+\nu)]$ – модуль сдвига; E – модуль упругости; ν – коэффициент Пуассона в плоскости изотропии.

Напряжениям (2), (5) эквивалентны внутренние усилия и моменты, которые имеют вид

$$T_x = C\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{Bh^2}{24G^0} \frac{\partial X_2}{\partial x},$$

$$T_y = \nu T_x, \qquad S = C_{66} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{h^2 G}{24G^0} \frac{\partial Y_2}{\partial x}; \tag{6}$$

$$M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h^2}{10} \frac{D}{G^0} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{D}{G^0} \frac{\partial X_1}{\partial x},$$

$$M_y = \nu M_x, \qquad H = \frac{h^2 D_{66}}{10G^0} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{D_{66}}{G^0} \frac{\partial Y_1}{\partial x}; \tag{7}$$

$$N_x = X_1 h + \frac{h^3}{3} \varphi, \qquad N_y = Y_1 h + \frac{h^3}{12} \psi. \tag{8}$$

Здесь $C = hB = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}$, $\qquad C_{66} = Gh = \dfrac{Eh}{2(1+\nu)}$,

$$D = B \frac{h^3}{12} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \qquad D_{66} = G \frac{h^3}{12} = \frac{Eh^3}{24(1+\nu)}.$$

3. Уравнения равновесия в усилиях и моментах с учетом условий

при $z = \dfrac{h}{2}$: $\qquad \tau_{zx} = X^+, \quad \tau_{yz} = Y^+, \quad \sigma_2 = 0,$

при $z = -\dfrac{h}{2}$: $\qquad \tau_{xz} = -X^-, \quad \tau_{yz} = -Y^-, \quad \sigma_2 = 0,$

запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} = -X_2, \qquad \frac{\partial S}{\partial x} = -Y_2, \qquad \frac{\partial M_x}{\partial x} = N_x - hX_1,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = N_y - hY_1, \qquad \frac{\partial N_x}{\partial x} + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \tag{9}$$

Подставляя значения внутренних усилий и моментов из (6)–(8) в (9), для определения искомых величин получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{X_2}{C} - \frac{h}{24G^0} \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{h^2}{10G^0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{B} \varphi = \frac{1}{G^0} \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2}, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{h^3}{12C} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{h}{24G^0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial X_2}{\partial x} - \frac{h}{C} \frac{\partial X_1}{\partial x}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{Y_2}{C_{66}} - \frac{h}{24G^0} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{10G^0}{h^2 G} \psi = -\frac{10}{h^2} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2}. \tag{14}$$

Рассматривая систему уравнений (10)–(14) замечаем, что уравнения (13) и (14) являются линейными сепаратными уравнениями. В каждом частном случае, при определенных нагрузках и граничных условиях, соответствующие линейные задачи могут быть решены обычным путем [1].

4. Перепишем уравнения (10)–(12) следующим образом:

$$\left[u' + \frac{1}{2}(w')^2\right]' = \frac{X_2}{C} - \frac{h}{24G^0} X_2'', \qquad w''' - \frac{h^2}{10G^0}\varphi'' + \frac{1}{B}\varphi = \frac{1}{G^0} X_1'',$$

$$\left[u' + \frac{1}{2}(w')^2\right]' w'' + \frac{h^3}{12C}\varphi' = -\frac{h}{24G^0} X_2' w'' - \frac{h}{C} X_1'. \tag{15}$$

Интегрируя первое из уравнений системы (15), получим

$$u' + \frac{1}{2}(w')^2 = -\frac{1}{C}\int_0^x X_2 \partial\xi - \frac{h}{24G^0} X_2' + A_1, \tag{16}$$

где A_1 – постоянная интегрирования, которая определяется из граничного условия для усилия T_x или перемещения u. В частности, если $T_x = 0$ при $x = 0$, то $A_1 = 0$.

Исключая функцию $\varphi(x)$ из системы уравнений (15) с использованием (16), получим одно уравнение для искомой функции $w(x)$:

$$D\left[1 + \frac{6}{5hG^0}\left(A_1 C - \int_0^x X_2 d\xi\right)\right] w^{\mathrm{IV}} - \frac{Eh^2}{5(1-\nu^2)G^0} X_2 w''' -$$

$$-\left[\frac{Eh^2}{10(1-\nu^2)G^0} X_2' + A_1 C - \int_0^x X_2 d\xi\right] w'' = -\frac{D}{5G^0} X_1 + hX_1', \tag{17}$$

а для функции $\varphi(x)$ имеем

$$\frac{h^3}{12}\varphi' = \left(\int_0^x X_2 d\xi - A_1 C\right) w'' - hX_1'. \tag{18}$$

Таким образом, задача свелась к решению обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами.

В частном случае, когда $X^+ = -X^- = X(x)$, т. е., когда согласно (4)

$$X_2 = 0, \qquad X_1 = X(x), \tag{19}$$

уравнение (17) становится уравнением с постоянными коэффициентами. Если при этом граничные условия таковы, что $A_1 = 0$ $(T_x = 0$ при $x = 0)$, общее решение уравнения (17) примет вид

$$w = -\frac{1}{5G^0}\int_0^x X\,\partial\xi + \frac{h}{2D}\int_0^x (x-\xi)^2 X d\xi - \frac{CA_2}{GD}x^3 + \frac{A_3}{2}x^2 + A_4 x + A_5, \tag{20}$$

где A_i – постоянные интегрирования.

5. Пусть нагрузка такова, что имеют место равенства (19), а граничные условия следующие [2]:

$$\text{при } x = 0: \qquad T_x = 0, \qquad w = 0, \qquad M_x = 0,$$

$$\text{при } x = a: \qquad u = 0, \qquad w = 0, \qquad M_x = 0, \tag{21}$$

где a – ширина пластинки.

Тогда, удовлетворяя граничным условиям, согласно (16) и (20) для искомых перемещений получим

$$w = -\frac{1}{5G^0}\int_0^x X\,d\xi + \frac{ha}{6D}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{6D}{5a^2hG^0}\right)x\int_0^a X\,d\xi +$$

$$+\frac{h}{2D}\int_0^x (x-\xi)^2 X\,d\xi - \frac{h}{2aD}\,x\int_0^a (a-\xi)^2 X\,d\xi\,, \tag{22}$$

$$u = \frac{1}{2}\int_x^a (w')^2 d\,x\,. \tag{23}$$

В частном случае, когда $X = \tau_0 = \mathrm{const}$, получим

$$w = 0, \quad u = 0\,.$$

В случае же, когда X – линейная функция, т.е., когда

$$X = \tau_0\,\frac{x}{a}\,,$$

получим

$$w = \frac{(1-\nu^2)\tau_0 a^2}{2Eh^2}\,x\left(1 - \frac{x}{a}\right)\left[1 + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{Eh^2}{5\,(1-\nu^2)\,G^0 a^2}\right]. \tag{24}$$

Учет поперечных сдвигов делает задачу корректной, при этом увеличивается как прогиб пластинки, так и тангенциальное перемещение. В случае достаточно толстых пластин $\left(\dfrac{h}{a} = \dfrac{1}{3} \div \dfrac{1}{5}\right)$, изготовленных из материалов с малым сдвиговым сопротивлением $\left(\dfrac{E}{G^0} = 5 \div 10\right)$, это увеличение может быть значительным – от 4 до 24%.

6. Рассмотрим задачу устойчивости пластин под действием тангенциальных сил.

Пусть

$$X^+ = \tau_0 = \mathrm{const}, \qquad X^- = 0\,.$$

Тогда согласно (4) получим

$$X_1 = \frac{\tau_0}{2}\,, \qquad X_2 = \tau_0\,. \tag{25}$$

Перепишем систему уравнений (10)–(12) следующим образом:

$$\left[u' + \frac{1}{2}(w')^2\right]' = -\frac{\tau_0}{C}\,, \qquad w''' - \frac{h^2}{10G^0}\,\varphi'' + \frac{1}{B}\,\varphi = 0\,,$$

$$\left[u' + \frac{1}{2}(w')^2\right]w'' + \frac{h^3}{12C}\,\varphi' = 0\,. \tag{26}$$

Граничные условия остаются неизменными, т. е. имеем условия (21). Из первого из условий (21) и первого из уравнений системы (26) следует, что

$$u' + \frac{1}{2}(w')^2 = -\frac{\tau_0}{C}\,x\,. \tag{27}$$

С учетом (7), третьего из уравнений системы (26) и уравнения (27) граничные условия примут вид

$$\text{при } x = 0,\ x = a: \qquad w = 0, \qquad w'' = 0\,.$$

Система уравнений (26) с учетом (25) и (27), как и в случае предыдущей задачи, приводится к одному уравнению относительно w с переменными коэффициентами:

$$\left(1-\alpha\frac{x}{h}\right)w^{\mathrm{IV}}-\frac{2\alpha}{h}w'''+\frac{\tau_0}{D}x\,w''=0\,, \tag{28}$$

где $\alpha=\dfrac{6\tau_0}{5G^0}$.

Введем функцию $F(x)=w''(x)$. Тогда задача устойчивости пластинки приводится к задаче на собственные значения для уравнения второго порядка

$$\left(1-\alpha\frac{x}{h}\right)F''-\frac{2\alpha}{h}F'+\frac{\tau_0}{D}x\,F=0 \tag{29}$$

с граничными условиями

$$\text{при }\ x=a,\ \ x=0: \qquad F(x)=0\,. \tag{30}$$

Эта задача несамосопряженная, поэтому применение прямых методов [4] может привести к ошибочным результатам. Однако, если применить метод Ритца, выбирая в качестве пробной функции

$$F=x\left(1-\frac{x}{2}\right),$$

удовлетворяющей граничным условиям (30), и проведя обычную процедуру [2], для касательной критической нагрузки получим

$$\tau_*=\frac{20D}{a^3}\left(1+\frac{Eh^2}{G^0(1-\nu^2)a^2}\right)^{-1}. \tag{31}$$

7. Полученные здесь результаты совместно с соответствующими результатами из [1] крайне важны и при рассмотрении контактных задач для пластинок.

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. – Москва: Наука, 1987. – 360 с.
2. *Амбарцумян С. А., Белубекян М. В.* Тонкая пластинка при действии поверхностной касательной нагрузки // Изв. НАН и ГИУ Армении. Сер. ТН. – 1999. – **52**, № 3. – С. 278–283.
3. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. – Москва: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
4 *Протусевич Я. А.* Вариационные методы в строительной механике. – Москва: Гостехиздат, 1948. – 400 с.

ДО ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН ПІД ДІЄЮ ТАНГЕНЦІАЛЬНИХ СИЛ

У рамках відомих припущень теорії анізотропних пластин шляхом осереднення рівнянь теорії пружності отримано основні рівняння згину та стійкості геометрично нелінійних трансверсально-ізотропних пластин, які перебувають під дією тангенціальних сил.

ON GEOMETRICALLY NON-LINEAR PROBLEMS OF TRANSVERSALLY ISOTROPIC PLATES UNDER TANGENTIAL FORCES

Based on assumptions of the theory of anisotropic plates, averaging the equations of elasticity theory, the governing stability and bending equations are obtained for geometrically non-linear transversally isotropic plates under action of tangential forces.

Ин-т механики НАН Армении, Ереван

Получено
25.11.05