

ЗМІШУВАННЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ У ПРЯМОКУТНІЙ ПОРОЖНИНІ

Розглядається класична двовимірною бігармонічна задача для прямокутної області. Метод суперпозиції виявляється ефективним для розв'язування задач прикладної механіки, що стосуються повільної течії в'язкої рідини у прямокутній порожнині під дією дотичних швидкостей, прикладених на її стінках. Метод ілюструється декількома прикладами.

Людський розум рідко буває задоволеним і, звичайно, не виконує своєї найвищої функції, коли виконує роботу обчислювальної машини. Учений, математик він чи фізик, намагається скласти для себе і розвинути чітке уявлення про предмети, з якими він має справу. Для цього він згоден виконати довгі обчислення і стати на деякий час обчислювальною машиною, якщо тим самим він зробить свої ідеї в кінцевому підсумку більш чіткими.

Д. К. Максвелл [5, с. 13]

1. Вступ. Різноманітні задачі механіки суцільних середовищ можуть розглядатися як з математичної, так і з інженерної точки зору. Однак підхід до їх дослідження найчастіше буває різним: математика цікавить лише постановка граничної задачі та строгість методів розв'язування, найчастіше – без усякого практичного застосування, у той час як інженер цікавиться, насамперед, практичною стороною конкретної задачі й використовує математику лише як знаряддя. Про це дуже образно сказав у своєму виступі у Відділенні технічних наук АН СРСР ще у 1938 році видатний академік-кораблебудівник О. М. Крилов [4, с. 312]: «Для геометра математика сама по собі є **кінцевою метою**, для інженера – це є **засіб**, це є **інструмент** такий самий, як штангель, зубило, ручник, напильник для слюсаря або півсажень, сокира та пила для теслі. <...> Так ось, геометра, який створює нові математичні твердження, можна уподібнити до деякого уявного універсального інструментальника, який готує на склад інструмент на усяку потребу: він робить усе, починаючи від кувалди і закінчуючи найтоншим мікроскопом і найточнішим хронометром. Геометр створює **методи** розв'язування питань, які виникають не тільки внаслідок сучасних потреб, але й для майбутніх, які виникнуть, можливо, завтра, можливо, через тисячу років. Уявіть тепер інженера, який увійшов у цей склад і хоче в ньому знайти потрібний йому інструмент. Він, перш за все, буде вражений величезною, приголомшливою різноманітністю. При більш уважному розгляданні він зауважить серед маси інших речей, які здаються простими, і деякі найскладніші апарати незрозумілого йому призначення, але чудовими щодо викінчення їх численних деталей, щодо докладного їх припасування, до того ж оправлені в срібло та золото. <...> Приглянувшись ще ближче, він серед цього незліченного різноманіття зауважить ряд, мабуть, здавна систематично підібраних асортиментів, які залишаються майже незмінними впродовж 150 років, до того ж комірник йому підкаже, що їх так часто потребують, що й не старчили, а за іншими приходять лише знавці – майстри та аматори.» Як також влучно відзначив відомий англійський інженер-механік К. Е. Інґліс [20]: «На відміну від справжніх математиків, інженери більше зацікавлені, що міститься у банці консервів, ніж в елегантності консервного ножа для її відкривання.»

Співпраця між прикладними математиками, з однієї сторони, та механіками й інженерами – з іншої, є особливо важливою сьогодні, оскільки механіки й інженери-дослідники постійно зацікавлені в якомога точнішому розв'язанні широкого кола задач про напружено-деформований стан різних

елементів конструкцій. У той час як механіки й інженери можуть внести багато істотного в математичне формулювання практичних задач при виборі моделі, вони, у свою чергу, одержують значну допомогу при розв'язуванні задач від прикладних математиків, які зацікавлені в застосуванні своїх методів, формул і теорем у механіці. До цих важливих питань традиційно зверталися видатні вчені – механіки, прикладні математики та інженери [4, 6, 7, 19, 21].

Задачі прикладної гідромеханіки, які пов'язані зі стоксовими течіями в'язкої рідини у двовимірній прямокутній області $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ під дією дотичних швидкостей на границі, зводяться до однорідного бігармонічного рівняння відносно скалярної функції течії при відомих значеннях цієї функції та її першої нормальної похідної на границі прямокутника. Така класична бігармонічна гранична задача й досі становить чималий інтерес у математичній фізиці [37], плоскій задачі теорії пружності [9] та теорії згину тонких пружних пластин [10]. Ще у першій третині ХХ-го століття типові приклади підходів з позицій механіки та математики до бігармонічної проблеми у прямокутнику були наведені відповідно у пленарній доповіді К. Б. Бізено [15] на I-му Міжнародному Конгресі з прикладної механіки та президентських зверненнях А. Лява [25] і А. К. Діксона [18] до Лондонського математичного товариства. Основні математичні питання торкалися можливості розв'язування деяких функціональних рівнянь у комплексній площині, збіжності рядів за неортогональними власними функціями та єдиності розв'язку для розривних значень заданої функції та її нормальної похідної у кутових точках прямокутника. Головними інженерними питаннями були: наскільки товстою має бути пружна пластинка, щоб витримати прикладене навантаження, і де знаходяться місця максимальних напружень та їхні значення.

Видатний український вчений-механік член-кореспондент НАН України Ярослав Йосипович Бурак успішно поєднує обидва підходи до розв'язування численних проблем у галузі механіки суцільних середовищ. У багатьох своїх працях [1] він віртуозно користується різними створеними ним і його численними учнями новими моделями механіки суцільних середовищ, які тісно пов'язані із запитамі практики. Він чітко розуміє фізичну суть кожної моделі та практичну цінність результатів, отриманих при розв'язуванні відповідних крайових задач. Він також пам'ятає, що будь-яка модель, якою досконалою вона не була б, завжди має свою фізичну похибку, і вчить здібну молодь, що незначні поправки не мають принципового значення при розгляді задач механіки.

У цій статті з нагоди 75-річчя від дня народження Я. Й. Бурака модель Стокса для течії в'язкої рідини застосовується при вивченні процесу ламінарного змішування в'язкої рідини при її повільних рухах у двовимірній прямокутній порожнині.

2. Змішування рідини. Поняття змішування знайоме будь-кому, але питання, як перевести це явище на кількісну основу, залишається і понині важливою задачею механіки. Загальні ідеї розтягу та згину (*stretching and folding*) елементів підфарбованої частинки рідини були введені ще О. Рейнольдсом [36] і блискуче інтерпретовані П. Веландером [39]. Цікавий огляд зв'язків поміж цими ідеями гідромеханіки та сучасними ідеями хаотичної динаміки (так зване відображення *підкови Смейла*) наведено в [35, 40].

У сучасній гідромеханіці значний інтерес викликає задача про рух індивідуальних частинок рідини (підхід Лагранжа) у відомому полі швидкості (підхід Ейлера). Для пасивних безінерційних частинок така задача у двовимірному випадку описується системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1)$$

з початковими умовами $x = x_0$, $y = y_0$ для $t = 0$.

Кінематичні рівняння (1) можна тлумачити як гамільтонову динамічну систему з одним ступенем вільності, де x та y відіграють роль канонічних змінних, а функція течії ψ – роль гамільтоніана. Хоча ідея зв'язку цих двох підходів була чітко викладена ще Дж. Максвеллом [27], до недавнього часу основна увага приділялась лише рухам з функцією течії вигляду $\psi(x, y)$. Це призводило до широковідомих результатів, що потік є інтегровним і траєкторії будь-якої частинки утворюють більш-менш гладкі криві (*КАМ-тори* – на мові гамільтонових динамічних систем або *лінії течії* на мові механіки рідини).

У піонерській роботі Х. Арефа [12] було встановлено, що для періодичної функції течії вигляду $\psi(x, y, t + T) = \psi(x, y, t)$ (так звані гамільтонові системи з $1\frac{1}{2}$ ступенями вільності), з достатньо простим аналітичним виразом, рівняння (1) є взагалі неінтегровними і рух індивідуальної частинки здебільшого є хаотичним, тобто вкрай чутливим до зміни початкових умов. Це явище отримало назву *хаотичної адвекції* (інколи його не дуже слушно називають *лагранжевою турбулентністю*) і впродовж останніх двадцяти років було предметом інтенсивних досліджень [11, 13]. Експерименти [16, 23] для простих течій Стокса при зовнішньому періодичному збуренні виявили дуже складні картини адвекції частинок, які нагадують картини турбулентного змішування (хоча, звісно, вести мову про турбулентність тут недоречно).

Важливим для вивчення процесу змішування є поняття відображення Пуанкаре – положень вихідної точки у порожнині після кожного періоду $t_n = nT$, $n = 1, 2, \dots$, та знання *періодичних* точок процесу порядку p , тобто таких початкових умов у рівнянні адвекції (1), коли точка за p періодів точно повертається в своє початкове положення (тобто нерухомих точок у відображенні Пуанкаре). Принциповим елементом аналізу процесу змішування є класифікація періодичних точок на *еліптичні* та *гіперболічні*.

Через кожну гіперболічну точку H проходять дві лінії *стійких* W_H^s та *нестійких* W_H^u *многовидів*. Це поняття було введено А. Пуанкаре [8, с. 325] під назвою *двоасимптотичних розв'язків*. Згідно з означенням будь-яка точка, що належить до стійкого многовиду W_H^s , при послідовних відображеннях Пуанкаре *вперед*, тобто у моменти часу $t_n = nT$, $n = 1, 2, \dots$, буде залишатися на лінії W_H^s та прямувати до точки H , коли $n \rightarrow \infty$. Таким же чином, будь яка точка, що належить до нестійкого многовиду W_H^u , при послідовних відображеннях Пуанкаре *назад*, тобто у моменти часу $t_n = nT$, $n = -1, -2, \dots$, буде залишатися на лінії W_H^u та прямувати до точки H , коли $n \rightarrow -\infty$. Якщо многовиди W_H^s та W_H^u не співпадають тотожно (як у випадку сепаратрис для інтегровних динамічних систем) і перетинаються в одній *гомоклінічній* точці, то існує нескінченна множина таких перетинів і всі такі точки прямують до точки H . Цю обставину Пуанкаре не передбачив у своєму знаменитому мемуарі, який у січні 1889 року отримав премію шведського короля Оскара II вартістю 2500 шведських крон і золоту медаль. (Пізніше це коштувало йому 3585 крон за знешкодження та передрук цілого тому журналу *Acta Mathematica*, 1890, Vol. 13, що містив цей мемуар на 270 сторінках. Для порівняння, річна заробітна плата провідного шведського математика М. Г. Міттаг-Леффлера становила 7000 крон; див. [14] для дуже цікавого викладення усіх обставин.) Щоб забезпечити такі перетини, многовиди W_H^s та W_H^u повинні все більш видовжуватися, щоб зберегти сталою площу довільної області, обмеженої відрізками цих кривих. Згідно з

А. Пуанкаре [8, с. 329]: «ці перетини утворюють щось на зразок решітки, тканини, сітки з нескінченно тісними петлями; жодна з двох кривих ніколи не повинна перетнути саму себе, але вона повинна називатись на саму себе дуже складним способом, щоб перетнути нескінченно багато разів усі петлі сітки.» Виникає так званий детермінований хаос (див. чудову методичну статтю [24] видатного механіка 20-го століття, почесного доктора Київського університету сера Джеймса Лайтхілла, в якій дається огляд цього принципового питання). Цю обставину відчував вже Г. Гельмгольц, який в лекції у 1875 році в Гамбурзі відмітив [3, с. 129]: «Взагалі необхідно зауважити, що ми можемо заздалегідь розрахувати і зрозуміти в усіх спостережуваних нами деталях тільки такі процеси в природі, в яких зроблені нами при обчисленнях у вихідних положеннях маленькі помилки призводять до також маленьких помилок і в кінцевих результатах. Як тільки до справи долучається нестійка рівновага, – ця умова не виконується. Таким чином, у нашому полі зору залишається ще випадковість; у дійсності ж ця випадковість є проявом недостатності наших знань і негнучкості наших здатностей мислити. Розум, який мав би точні знання фактичної сторони справи і в якого процеси мислення відбувались би достатньо швидко й точно, для того щоб випереджати події, побачив би в диких капризах погоди не в меншій мірі, ніж у русі світил, гармонійну дію вічних законів, про які ми тільки здогадуємось і які передчуваємо.»

2. Течія Стокса у прямокутній порожнині. Двовимірною повільною стоксова течія нестисливої в'язкої рідини може бути описана у термінах бігармонічної задачі. Якщо такий рух є настільки повільним, що інерційними силами, які містять квадрати швидкостей, можна знехтувати порівняно з в'язкими силами, то функція течії ψ задовольняє бігармонічне рівняння

$$\Delta\Delta\psi = 0. \quad (2)$$

У прямокутних координатах ейлерові компоненти вектора швидкості u та v визначаються як

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (3)$$

Якщо течія у прямокутній порожнині $|x| < a, |y| < b$ викликається заданими дотичними швидкостями U_+ та U_- відповідно на верхній ($y = b$) та нижній ($y = -b$) стінках, а бічні стінки $x = \pm a$ нерухомі, то граничні умови для рівняння (2) мають вигляд

$$\begin{aligned} \psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad x = \pm a, \quad |y| \leq b, \\ \psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = U_{\pm}, \quad y = \pm b, \quad |x| \leq a. \end{aligned} \quad (4)$$

Швидкості U_+, U_- можуть залежати як від координати x , так і від часу t . Особливий інтерес становить періодична з деяким періодом T їх залежність від часу. У цьому випадку функція течії ψ як розв'язок квазі-стаціонарної граничної задачі буде також періодичною з тим самим періодом T .

З огляду на лінійність граничної задачі (2), (4) функцію течії ψ у прямокутній порожнині можна подати як суму двох функцій ψ_1 та ψ_2 , які описують симетричне та антисиметричне поле швидкостей. Ці поля збуджуються дотичними швидкостями $U_+^{(1)} = -U_-^{(1)} = U_1$ та $U_+^{(2)} = U_-^{(2)} = U_2$, які прикладені на верхній і нижній стінках порожнини. Очевидно, що у такому вигляді завжди можна подати довільне швидкісне навантаження з парними

за x функціями $U_+(x)$ та $U_-(x)$, де

$$U_1(x) = \frac{U_+(x) - U_-(x)}{2}, \quad U_2(x) = \frac{U_+(x) + U_-(x)}{2}. \quad (5)$$

Наприклад, функції ψ_1 та ψ_2 мають вигляд [28–30]

$$\begin{aligned} \psi_1 = & b \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{X_m^{(1)}}{\alpha_m} \left(b \tanh \alpha_m b \frac{\cosh \alpha_m y}{\cosh \alpha_m b} - y \frac{\sinh \alpha_m y}{\cosh \alpha_m b} \right) \cos \alpha_m x - \\ & - a \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^\ell \frac{Y_\ell^{(1)}}{\beta_\ell} \left(a \tanh \beta_\ell a \frac{\cosh \beta_\ell x}{\cosh \beta_\ell a} - x \frac{\sinh \beta_\ell x}{\cosh \beta_\ell a} \right) \cos \beta_\ell y, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = & b \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{X_m^{(2)}}{\alpha_m} \left(b \coth \alpha_m b \frac{\sinh \alpha_m y}{\sinh \alpha_m b} - y \frac{\cosh \alpha_m y}{\sinh \alpha_m b} \right) \cos \alpha_m x - \\ & - a \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{Y_k^{(2)}}{\gamma_k} \left(a \tanh \gamma_k a \frac{\cosh \gamma_k x}{\cosh \gamma_k a} - x \frac{\sinh \gamma_k x}{\sinh \gamma_k a} \right) \cos \gamma_k y, \end{aligned} \quad (7)$$

де $\alpha_m = \frac{(2m-1)\pi}{2a}$, $\beta_\ell = \frac{(2\ell-1)\pi}{2b}$, $\gamma_k = \frac{k\pi}{b}$.

Коефіцієнти рядів Фур'є $X_m^{(1)}$, $Y_\ell^{(1)}$ та $X_m^{(2)}$, $Y_k^{(2)}$ визначаються із нескінченних систем

$$\begin{aligned} X_m^{(1)} b \Delta_1(\alpha_m b) - \sum_{\ell=1}^{\infty} Y_\ell^{(1)} \frac{4\alpha_m^2 \beta_\ell}{(\beta_\ell^2 + \alpha_m^2)^2} &= (-1)^{m-1} \alpha_m U_m^{(1)}, \quad 1 \leq m \leq \infty, \\ Y_\ell^{(1)} a \Delta_1(\beta_\ell a) - \sum_{m=1}^{\infty} X_m^{(1)} \frac{4\beta_\ell^2 \alpha_m}{(\alpha_m^2 + \beta_\ell^2)^2} &= 0, \quad 1 \leq \ell \leq \infty, \end{aligned} \quad (8)$$

та

$$\begin{aligned} X_m^{(2)} b \Delta_2(\alpha_m b) - \sum_{k=1}^{\infty} Y_k^{(2)} \frac{4\alpha_m^2 \gamma_k}{(\gamma_k^2 + \alpha_m^2)^2} &= (-1)^{m-1} \alpha_m U_m^{(2)}, \quad 1 \leq m \leq \infty, \\ Y_k^{(2)} a \Delta_2(\gamma_k a) - \sum_{m=1}^{\infty} X_m^{(2)} \frac{4\gamma_k^2 \alpha_m}{(\alpha_m^2 + \gamma_k^2)^2} &= 0, \quad 1 \leq k \leq \infty, \end{aligned} \quad (9)$$

де

$$\Delta_1(\xi) = \tanh \xi + \frac{\xi}{\cosh^2 \xi}, \quad \Delta_2(\xi) = \coth \xi - \frac{\xi}{\sinh^2 \xi}, \quad (10)$$

а множини $U_m^{(1)}$ та $U_m^{(2)}$ – коефіцієнти Фур'є парних функцій $U_1(x)$ та $U_2(x)$:

$$U_1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(1)} \cos \alpha_m x, \quad U_m^{(1)} = \frac{1}{a} \int_{-a}^a U_1(x) \cos \alpha_m x dx, \quad (11)$$

$$U_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} U_m^{(2)} \cos \alpha_m x, \quad U_m^{(2)} = \frac{1}{a} \int_{-a}^a U_2(x) \cos \alpha_m x dx. \quad (12)$$

Асимптотика коефіцієнтів $X_m^{(1)}$, $Y_\ell^{(1)}$ та $X_m^{(2)}$, $Y_k^{(2)}$ на нескінченності має вигляд [30]

$$\begin{aligned}
X_m^{(1)} &= \frac{2\pi^2 U_1(a)}{ab(\pi^2 - 4)} - \frac{\pi U_1'(a)}{2ab\alpha_m} + \operatorname{Re}(E_\lambda^{(1)} \alpha_m^{-\lambda_1}) + o(m^{-3}), \quad m \rightarrow \infty, \\
Y_\ell^{(1)} &= \frac{4\pi U_1(a)}{ab(\pi^2 - 4)} - \frac{\pi U_1'(a)}{2ab\beta_\ell} - \operatorname{Re}(E_\lambda^{(1)} \beta_\ell^{-\lambda_1}) + o(\ell^{-3}), \quad \ell \rightarrow \infty, \quad (13)
\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}
X_m^{(2)} &= \frac{2\pi^2 U_2(a)}{ab(\pi^2 - 4)} - \frac{\pi U_2'(a)}{2ab\alpha_m} + \operatorname{Re}(E_\lambda^{(2)} \alpha_m^{-\lambda_1}) + o(m^{-3}), \quad m \rightarrow \infty, \\
Y_k^{(2)} &= \frac{4\pi U_2(a)}{ab(\pi^2 - 4)} - \frac{\pi U_2'(a)}{2ab\gamma_k} - \operatorname{Re}(E_\lambda^{(2)} \gamma_k^{-\lambda_1}) + o(k^{-3}), \quad k \rightarrow \infty, \quad (14)
\end{aligned}$$

з деякими комплексними сталими $E_\lambda^{(1)}$, $E_\lambda^{(2)}$ та $\lambda_1 = 2.73959 + i1.11902$.

Для достатньо гладкої функції $U_+(x)$ локальне зображення функції течії ψ в околі кутової точки (a, b) має вигляд

$$\begin{aligned}
\psi(\rho, \theta) &= \frac{4U_+(a)}{\pi^2 - 4} \rho \left[\theta \cos \theta - \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \sin \theta \right] + \\
&+ \frac{U_+'(a)}{4} \rho^2 \left(2\theta - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos 2\theta + \sin 2\theta \right) - \frac{U_+''(a)}{8} \rho^3 (\sin \theta + \sin 3\theta) + \\
&+ \operatorname{Re} \left\{ A_M \rho^{\gamma_1+1} \left[\sin \theta \sin \gamma_1 \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) + \cos \theta \sin \gamma_1 \theta \right] \right\} + O(\rho^4), \quad (15)
\end{aligned}$$

де полярні координати (ρ, θ) введено за формулами $x = a - \rho \cos \theta$, $y = b - \rho \sin \theta$. У поданні (15) член, лінійний за ρ , презентує відомий розв'язок Гудьєра – Тейлора [2] для течії Стокса у квадранті $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ під дією сталої дотичної швидкості, прикладеної уздовж однієї сторони $\theta = 0$. Розв'язки з членами ρ^2 та ρ^3 дозволяють взяти до уваги нерівномірність розподілу такої швидкості. Член, пропорційний до ρ^{γ_1+1} , відповідає власному розв'язку, знайденому у роботі [17] для нескінченного квадранта. Г. К. Моффатт [33] встановив, що він містить нескінченну кількість вихорів біля вершини. Можливість явного визначення амплітуди A_M вихорів Моффатта через комплексні сталі $E_\lambda^{(1)}$, $E_\lambda^{(2)}$, що входять до асимптотик (13), (14), є основною аналітичною перевагою методу суперпозиції.

3. Числові результати. Знання поля швидкості у прямокутній порожнині дозволяє вивчити задачу про змішування в'язкої рідини при її повільних стоксових рухах. Наведемо деякі результати наших розрахунків, отримані на основі знання аналітичного поля швидкості методами, детально викладеними у [22, 31]. Періодичний за часом рух стінок порожнини задаємо як

$$\begin{aligned}
U_+ &= \begin{cases} U_0, & nT \leq t < \left(n + \frac{1}{2}\right)T, \\ 0, & \left(n + \frac{1}{2}\right)T \leq t < (n+1)T, \end{cases} \\
U_- &= \begin{cases} 0, & nT \leq t < \left(n + \frac{1}{2}\right)T, \\ -U_0, & \left(n + \frac{1}{2}\right)T \leq t < (n+1)T, \end{cases} \quad (16)
\end{aligned}$$

зі сталою уздовж стінок швидкістю U_0 . Безрозмірним параметром, який характеризує протокол змішування, служить $D = U_0 T / 2b$.

На рис. 1 наведено результати числових розрахунків періодичних точок різних періодів і перетинів Пуанкаре для прямокутної порожнини з параметрами $a/b = 1.67$, $D = 6.24$, які відповідають експериментальним даним [23]. Видно, що навколо еліптичної точки першого порядку існує великий острів у хаотичному морі, на границі якого, у свою чергу, існують еліптичні точки шостого порядку зі значно меншими островами. З цього рисунку видно, що підфарбована рідина, яка спочатку знаходилася усередині цього острова, ніколи не зможе його залишити та змішатися з навколишньою рідиною (див. популярну статтю Д. М. Оттіно [34], у якій наведено яскраві експериментальні демонстрації цього явища).

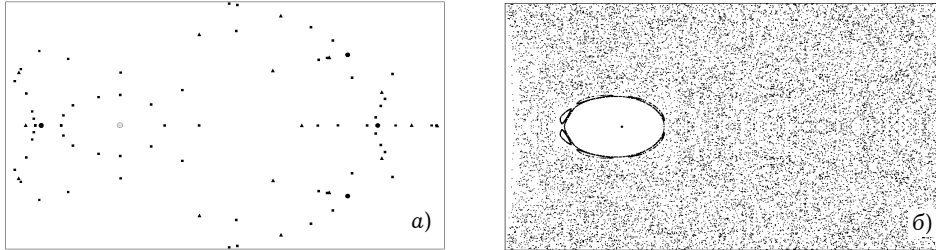


Рис. 1. Змішування в'язкої рідини в прямокутній порожнині за протоколом (16):
а) положення періодичних точок першого – шостого періодів;
б) відображення Пуанкаре.

На рис. 2 наглядно показано суттєву різницю при деформації виділеного квадратного елемента, який розміщений в околі еліптичної (E , рис. 2а) і гіперболічної (H , рис. 2б) періодичних точок першого періоду. Квадрат навколо еліптичної точки E цілком належить еліптичному острову і тому ніколи не вийде за границі цього острова.

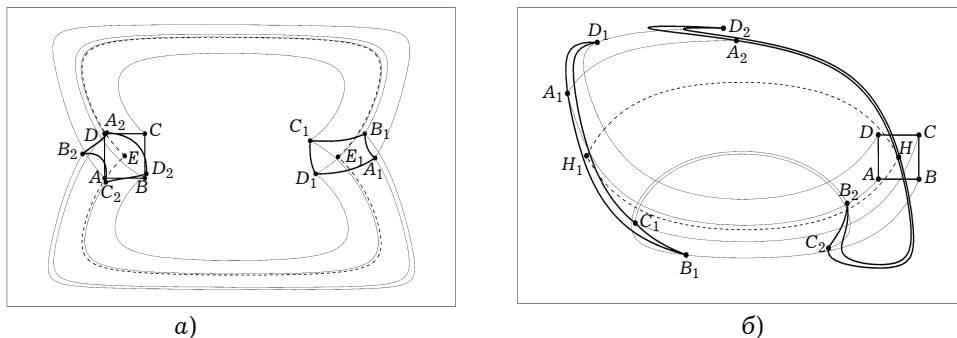


Рис. 2. Траєкторії точок A, B, C, D та деформація квадрата $ABCD$ за півперіоду (індекс «1») та за один період (індекс «2»):
а) еліптична точка E ; б) гіперболічна точка H .

Важливу роль, яку відіграють в процесі змішування рідини стійкі W_H^s та нестійкі W_H^u многовиди, що пов'язані лише з однією (!) гіперболічною точкою H , ілюструє рис. 3. Границя спеціально виділеної плями рухається, як автомобілі по «автострадах» W_H^s та W_H^u . Неважко уявити, що відбудеться, коли взяти довільну пляму кругової форми навколо точки H : початкове коло перетинає при цьому нескінченну множину точок, які належать не тільки многовидам W_H^s та W_H^u , але й многовидам, пов'язаним із іншими

гіперболічними періодичними точками, які мають свій «атлас автошляхів». Хоча точки контуру будуть рухатися по них цілком детерміновано, найменше відхилення від «автострад» (похибка в початкових умовах) неминуче призведе до зовсім інших кінцевих положень всього контуру.

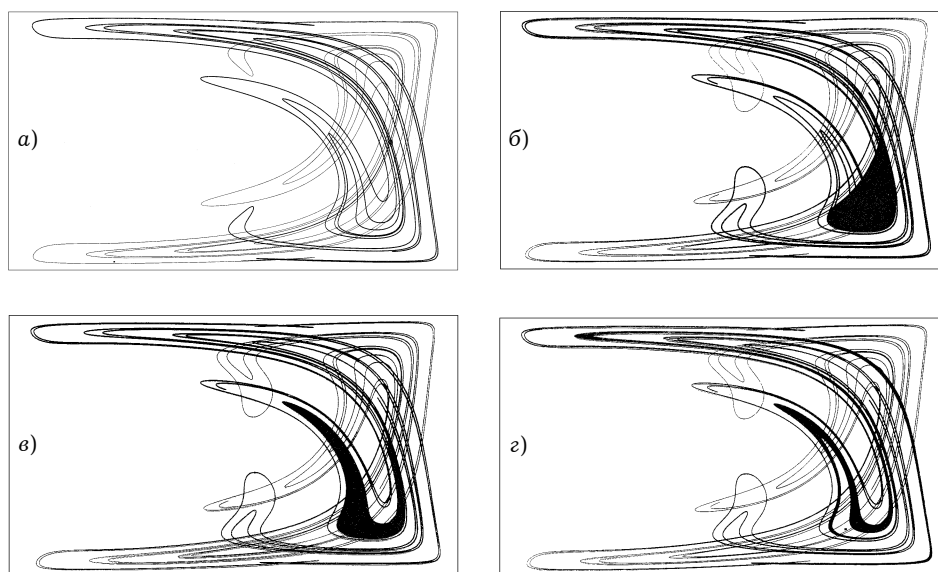


Рис. 3. Деформація плями рідини з границею, утвореною відрізками многовидів:

а) многовиди W_H^s та W_H^u ; б) положення контуру при $t = 0$;

в) положення контуру при $t = T$; г) положення контуру при $t = 2T$.

4. Заключні зауваження. Розглядаючи метод суперпозиції та деякі конкретні числові результати, отримані за його допомогою, можна стверджувати, що цей метод є ефективним аналітичним засобом для розв'язування різних двовимірних бігармонічних граничних задач для прямокутника. Хоча алгебраїчна робота може здатися дещо громіздкою, кінцеві формули виявляються дуже простими для проведення обчислень. Цей підхід може бути узагальнений на квазітривимірні задачі про течію Стокса у скінченній циліндричній порожнині [32] та про змішування в'язкої рідини в ній [26, 38]. Однак суто тривимірна задача про течію Стокса у порожнині у вигляді скінченного паралелепіпеда все ще є викликом аналітичним засобом сучасного аналізу.

1. Бурак Я. Й. Вибрані праці. – Львів: НУЦММ ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, Вид-во «Ахіл», 2001. – 352 с.
2. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. – Москва: Мир, 1973. – 758 с.
3. Гельмгольц Г. Вихревые бури и грозы // Популярныя речи. Часть II. – Санкт-Петербург: Риккер, 1899. – С. 115–134.
4. Крылов А. Н. Значение математики для кораблестроения // Мои воспоминания. – 8-е изд. – Ленинград: Судостроение, 1983. – С. 308–320.
5. Максвелл Д. К. О соотношении между физикой и математикой // Речи и статьи. – Москва-Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1940. – С. 9–26.
6. Новожилов В. В. Математические модели и точность инженерных расчетов // Вопросы механики сплошной среды. – Ленинград: Судостроение, 1989. – С. 351–363.
7. Новожилов В. В. Прикладные математики – кто они? // Вопросы механики сплошной среды. – Ленинград: Судостроение, 1989. – С. 341–345.
8. Пуанкаре А. Избранные труды. – Москва: Наука, 1972. – 999 с. – Том II.
9. Тимошенко С. П. Курс теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1972. – 508 с.
10. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. – Москва-Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1948. – 460 с.

11. *Aref H.* Chaotic advection of fluid particles // *Phil. Trans. Roy. Soc. London.* – 1990. – **A333**. – P. 273–288.
12. *Aref H.* Stirring by chaotic advection // *J. Fluid Mech.* – 1984. – **143**. – P. 1–21.
13. *Aref H.* The development of chaotic advection // *Phys. Fluids.* – 2002. – **14**. – P. 1315–1325.
14. *Barrow-Green J.* Poincaré and the three-body problem. – Providence: AMS Press, 1997. – 200 p.
15. *Biezeno C. B.* Graphical and numerical methods for solving stress problems // *Proc. 1st Int. Congr. Appl. Mech. (Delft, 22–26 April 1924).* – Delft: Waltman, 1925. – P. 3–17.
16. *Chaiken J., Chevray R., Tabor M., Tan Q. M.* Experimental study of Lagrangian turbulence in Stokes flow // *Proc. Roy. Soc. London.* – 1986. – **A408**. – P. 165–174.
17. *Dean W. R., Montagnon P. E.* On the steady motion of viscous liquid in a corner // *Proc. Cambridge Phil. Soc.* – 1949. – **45**. – P. 389–395.
18. *Dixon A. C.* The problem of the rectangular plate // *J. London Math. Soc.* – 1934. – **9**. – P. 61–74.
19. *Hopkinson J.* The relation of mathematics to engineering // *Nature.* – 1894. – **50**. – P. 42–47.
20. *Inglis C. E.* Solid body mechanics in relation to mechanical engineering // *Proc. Inst. Mech. Eng.* – 1947. – **157**. – P. 271–274.
21. *Kármán Th. von.* Tooling up mathematics for engineering // *Quart. Appl. Math.* – 1943. – **1**. – P. 2–6.
22. *Krasnopolskaya T. S., Meleshko V. V., Peters G. W. M., Meijer H. E. H.* Mixing in Stokes flow in an annular wedge cavity // *Eur. J. Mech. B/Fluids.* – 1999. – **18**. – P. 793–822.
23. *Leong C. W., Ottino J. M.* Experiments on mixing due to chaotic advection in a cavity // *J. Fluid Mech.* – 1989. – **209**. – P. 463–499.
24. *Lighthill J.* The recently recognized failure of predictability in Newtonian dynamics // *Proc. Roy. Soc. London.* – 1986. – **A407**. – P. 35–50.
25. *Love A. E. H.* Biharmonic analysis, especially in a rectangle, and its application to the theory of elasticity // *J. London Math. Soc.* – 1928. – **3**. – P. 144–156.
26. *Malyuga V. S., Meleshko V. V., Speetjens M. F. M., Clercx H. J. H., van Heijst G. J. F.* Mixing in the Stokes flow in a cylindrical container // *Proc. Roy. Soc. London.* – 2002. – **A458**. – P. 1867–1865.
27. *Maxwell J. C.* On the displacement in a case of fluid motion // *Proc. London Math. Soc.* – 1870. – **3**. – P. 82–87.
28. *Meleshko V. V.* Biharmonic problem in a rectangle // *Appl. Sci. Res.* – 1998. – **58**. – P. 217–249.
29. *Meleshko V. V.* Steady Stokes flow in a rectangular cavity // *Proc. Roy. Soc. London.* – 1996. – **A452**. – P. 1999–2022.
30. *Meleshko V. V., Gomilko A. M.* Infinite systems for a biharmonic problem in a rectangle // *Proc. Roy. Soc. London.* – 1997. – **A453**. – P. 2139–2160.
31. *Meleshko V. V., van Heijst G. J. F.* Interacting two-dimensional vortex structures: Point vortices, contour kinematics and stirring properties // *Chaos, Solitons & Fractals.* – 1994. – **4**. – P. 977–1010.
32. *Meleshko V. V., Malyuga V. S., Gomilko A. M.* Steady Stokes flow in a finite cylinder // *Proc. Roy. Soc. London.* – 2000. – **A456**. – P. 1741–1758.
33. *Moffatt H. K.* Viscous and resistive eddies near a sharp corner // *J. Fluid Mech.* – 1964. – **18**. – P. 1–18.
34. *Ottino J. M.* The mixing of fluids // *Sci. Amer.* – 1989. – **260**. – P. 56–67.
35. *Ottino J. M., Jana S. C., Chakravarthy V. S.* From Reynolds's stretching and folding to mixing studies using horseshoe maps // *Phys. Fluids.* – 1994. – **6**. – P. 685–699.
36. *Reynolds O.* Study of fluid motion by means of coloured bands // *Nature.* – 1894. – **50**. – P. 161–163.
37. *Selvadurai A. P. S.* Partial differential equations in mechanics. 2. The biharmonic equation, Poissons's equation. – Berlin-Heidelberg: Springer, 2000. – 698 p.
38. *Speetjens M. F. M., Clercx H. J. H., van Heijst G. J. F.* A numerical and experimental study of advection in three-dimensional Stokes flows // *J. Fluid Mech.* – 2004. – **514**. – P. 77–105.
39. *Welander P.* Studies of the general development of motion in a two-dimensional ideal fluid // *Tellus.* – 1955. – **7**. – P. 141–156.
40. *Wiggins S., Ottino J. M.* Foundations of chaotic mixing // *Phil. Trans. Roy. Soc. London.* – 2004. – **A362**. – P. 937–970.

СМЕШИВАНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТИ

Рассматривается классическая двумерная бигармоническая задача для прямоугольной области. Метод суперпозиции оказывается эффективным для решения задач прикладной механики, относящимся к медленному течению вязкой жидкости в прямоугольной полости под действием касательных скоростей, приложенных на ее стенках. Метод проиллюстрирован несколькими примерами.

MIXING OF VISCOUS FLUID IN RECTANGULAR CAVITY

This paper addresses the classical two-dimensional biharmonic problem for a rectangular domain. The method of superposition is effective for solving the mechanical problems concerning creeping flow of viscous fluid set up in a rectangular cavity by tangential velocities applied along its walls. The method is illustrated by several examples.

¹ Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ,

² Ейндховенський технолог. ун-т, Нідерланди

Одержано

21.01.06