

ДИНАМИЧЕСКИЙ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИЙ ИЗГИБ АРМИРОВАННЫХ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Предложена вязкопластическая модель, в рамках которой сформулирована задача неупругого динамического изгиба стержней. Разработан метод численного интегрирования поставленной задачи, основанный на обобщении методов Рунге – Кутты. Проведено сравнение численных результатов с известными аналитическими решениями, полученными в рамках жесткопластической модели, показана их хорошая согласованность. Эффективность разработанного подхода продемонстрирована на расчетах неупругой динамики изотропных и армированных стержней постоянного и переменного поперечного сечения. Показано, что оптимальные при статическом нагружении стержни не всегда являются наилучшими и при динамическом воздействии.

Стержни составляют основу силовых элементов многих защитных ограждений и ответственных элементов судостроительной, машиностроительной и авиационной техники, объектов стройиндустрии. При воздействии динамических нагрузок высокой интенсивности их повреждаемость определяет возможность дальнейшего функционирования указанных объектов. Поэтому проблема динамического расчета таких элементов конструкций является одной из важнейших в механике деформируемого твердого тела. Большинство существующих на данный момент решений основано на модели идеального жесткопластического тела. Их обзор и анализ приведены в [1, 6] и др. Как правило, все полученные решения являются аналитическими и относятся к однородным стержням постоянного поперечного сечения, при этом зависимость предела текучести материала стержней от скорости деформирования не учитывается. Настоящая работа посвящена разработке численного метода интегрирования задач динамики вязкопластических армированных стержней переменного сечения и в этом смысле является продолжением исследований, опубликованных авторами в [11], где разработан и апробирован на решениях задач математической физики один подход к обобщению методов Рунге – Кутты на многомерные случаи. Авторам представляется, что предлагаемый в настоящем исследовании подход может быть эффективно использован в дальнейшем при решении задач динамики вязкопластического деформирования неоднородных композитных пластин и оболочек со сложными структурами армирования, изучение которых находится пока в зачаточном состоянии [8].

1. Постановка задачи неупругой динамики стержней. Рассмотрим прямолинейный стержень длиной l . Поперечное сечение стержня может быть переменным и имеет две ортогональные оси симметрии. Свяжем со стержнем декартову систему координат (x, y, z) : ось Ox совместим с осью центров тяжести поперечных сечений, оси Oy, Oz направим по осям симметрии поперечных сечений. В продольном направлении стержень усилен N семействами армирующих элементов. В поперечном сечении структура армирования является регулярной и симметричной относительно направлений y, z , в частности, квазиоднородной. (Под усиливающими элементами можно понимать армирующие волокна или тонкие, регулярно чередующиеся слои, т. е. стержень может иметь волокнистую, слоистую или слоисто-волокнистую структуру.)

Поперечная распределенная нагрузка действует в направлении z , поэтому при сделанных выше предположениях о геометрии и структуре армирования стержня в случае малых прогибов будет реализоваться попе-

речный изгиб стержня в плоскости (x, z) . Уравнение динамического изгиба такого стержня имеет вид [1]

$$M(x, t)_{,xx} = -p(x, t) + R(x)w(x, t)_{,tt}, \quad (1)$$

где

$$M(x, t) = \iint_F \sigma z dF, \quad \sigma(x, y, z, t) = \sum_k \sigma_k \omega_k, \quad R(x) = \sum_k \rho_k \iint_F \omega_k dF, \quad (2)$$

M – изгибающий момент; σ – осредненное продольное напряжение в стержне; $F(x)$ – площадь поперечного сечения стержня; p – погонная поперечная нагрузка, действующая в направлении z ; w – прогиб в направлении z ; ρ_k – объемная плотность материала k -й фазы композиции (при $k = 0$ здесь и далее будем понимать связующее, а при $k = 1, 2, \dots, N$ – k -е семейство арматуры); σ_k – продольное напряжение в k -й фазе композиции; $\omega_k(x, y, z)$ – интенсивность (плотность) армирования k -й фазой композиции ($\sum_k \omega_k = 1$); $R(x)$ – погонная масса стержня, в случае квазиоднородного армирования ($\omega_k = \omega_k(x)$) имеющая выражение

$$R(x) = F(x)\rho(x), \quad \rho(x) = \sum_k \rho_k \omega_k(x), \quad (3)$$

ρ – приведенная объемная плотность композиции; суммирование производится по указанному индексу от 0 до N ; нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по пространственной переменной x или по времени t .

Стержень подчиняется гипотезе Кирхгофа, поэтому при малых прогибах связь между продольной деформацией ε , ее скоростью ξ , прогибом w и его скоростью v определяется так [4]:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, z, t) &= -zw_{,xx}(x, t), & \xi(x, z, t) &= -zv_{,xx}(x, t), & \xi &= \varepsilon_{,t}, \\ v &= w_{,t}, & |z| &\leq H(x)/2, \end{aligned} \quad (4)$$

где $H(x)$ – высота поперечного сечения.

Согласно вязкопластической модели [4, 6] напряжения σ_k в фазах композиции зависят от скорости деформации ξ . Будем предполагать, что пределы текучести σ_{sk} всех фазовых материалов линейно зависят от ξ (при необходимости могут быть использованы и другие зависимости $\sigma_k \sim \xi$, в рамках настоящего исследования это не принципиально). Тогда связь между σ_k , ξ определяется соотношениями

$$|\sigma_k| \leq \sigma_{sk}^0, \quad \xi = 0, \quad 0 \leq k \leq N, \quad |z| \leq H/2, \quad (5)$$

$$\sigma_k = \sigma_{sk} = \text{sign}(\xi)\sigma_{sk}^0 + \mu_{sk}\xi, \quad 0 < |\xi|, \quad 0 \leq k \leq N, \quad |z| \leq H/2, \quad (6)$$

где σ_{sk}^0 – предел текучести k -й фазы композиции при квазистатическом нагружении ($\xi \approx 0$); μ_{sk} – коэффициент вязкого упрочнения материала k -й фазы.

Определенным недостатком соотношений (5), (6) является то, что отсутствует однозначная зависимость $\sigma_k = \sigma_k(\xi)$, а именно, при $\xi = 0$ напряжения σ_k определены неоднозначно (см. (5)). Чтобы преодолеть этот недостаток, аппроксимируем зависимость (5), (6) однозначной и гладкой зависимостью

$$\sigma_k(\xi) = \text{sign}(\xi) \sigma_{sk}^0 (1 - \exp(-\lambda |\xi|)) + \mu_{sk} \xi, \quad \lambda > 0, \quad 0 \leq k \leq N, \quad |z| \leq H/2, \quad (7)$$

где λ – некоторый параметр.

Замена соотношений (5), (6) на (7) соответствует переходу от обычной жестко-вязкопластической модели к вязкопластической [4], специального типа, причем в предельном случае $\lambda \rightarrow \infty$ из (7) получаем (5), (6). Задавая λ достаточно большим (но не бесконечным), будем получать некоторое приближение к жестко-вязкопластической модели. Поэтому далее под приближенным решением задачи динамики жестко-вязкопластических стержней будем понимать решение вязкопластической задачи, полученное на основе равенства (7) при достаточно большом λ .

Подставим выражения для напряжений (7) во второе из равенств (2), а результат – в первое из равенств (2). Тогда после вычисления интеграла с учетом соотношения (4) получим следующее представление для момента M в сечении x :

$$M = -A(x, v_{,xx}) v_{,xx} + B(x, v_{,xx}), \quad (8)$$

где A, B – определенные функции указанных аргументов.

Если поперечное сечение стержня является прямоугольным и имеет высоту $H(x)$ и ширину $b(x)$ (в направлении y), то при квазиоднородном армировании поперечного сечения ($\omega_k = \omega_k(x)$) функции A, B определяются выражениями

$$\begin{aligned} A(x, v_{,xx}) &= b(x) \sum_{k=0}^N \omega_k(x) \left[\frac{H^3}{12} \mu_{sk} + \frac{\sigma_{sk}^0 H}{\lambda v_{,xx}^2} \exp\left(-\frac{\lambda |v_{,xx}| H}{2}\right) \right], \\ B(x, v_{,xx}) &= -b(x) \text{sign}(v_{,xx}) \sum_{k=0}^N \sigma_{sk}^0 \omega_k(x) \left\{ \frac{H^2}{4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\lambda v_{,xx}^2} \left[\exp\left(-\frac{\lambda |v_{,xx}| H}{2}\right) - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ из (8) с учетом (9) получаем выражение для момента по жестко-вязкопластической модели.

Подставив выражения для момента (8) в уравнение (1) с учетом (4), получим систему уравнений движения

$$v_{,t} = q(x, t) - L(x; v), \quad w_{,t} = v(x, t), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (10)$$

где

$$L(x; v) = \frac{1}{R(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [A(x, v_{,xx}) v_{,xx} - B(x, v_{,xx})], \quad q(x, t) = \frac{p(x, t)}{R(x)}, \quad (11)$$

$R(x)$ определена в (2) или (3).

Первое уравнение (10) с учетом (11) является параболическим уравнением в частных производных первого порядка по времени t и четвертого порядка по пространственной переменной x ; второе уравнение (10) является уравнением в частных производных первого порядка по одной переменной t (переменная x при этом выступает в качестве параметра). Для однозначного интегрирования системы (10) необходимо использовать начальные

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x), \quad t = 0, \quad (12)$$

и общеизвестные граничные условия [14], задаваемые на концах стержня $x = 0, \ell$. При этом следует учитывать выражение для момента (8) и перерезывающей силы

$$Q = M_{,x} = - (A(x, v_{,xx}) v_{,xx} - B(x, v_{,xx}))_{,x}. \quad (13)$$

В частности, при шарнирном опирании концов стержня имеют место граничные условия

$$\begin{aligned} v(0, t) = v(\ell, t) = 0, \quad v_{,xx}(0, t) = v_{,xx}(\ell, t) = 0, \\ (w(0, t) = w(\ell, t) = 0, \quad w_{,xx}(0, t) = w_{,xx}(\ell, t) = 0), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (14)$$

а при защемлении концов

$$\begin{aligned} v(0, t) = v(\ell, t) = 0, \quad v_{,x}(0, t) = v_{,x}(\ell, t) = 0, \\ (w(0, t) = w(\ell, t) = 0, \quad w_{,x}(0, t) = w_{,x}(\ell, t) = 0), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

(Стержень может иметь опоры не в конечных точках, а в промежуточных, в рамках настоящего исследования это не принципиально.)

Если в некоторых сечениях $x = x_c$ стержня заданы сосредоточенные перерезывающие силы Q_c или моменты M_c , то дополнительно необходимо использовать условия сопряжения решения

$$\begin{aligned} Q(x_c - 0, t) + Q(x_c + 0, t) = Q_c(t), \quad M(x_c - 0, t) + M(x_c + 0, t) = -M_c(t), \\ v(x_c - 0, t) = v(x_c + 0, t), \quad v_{,x}(x_c - 0, t) = v_{,x}(x_c + 0, t), \\ (w(x_c - 0, t) = w(x_c + 0, t), \quad w_{,x}(x_c - 0, t) = w_{,x}(x_c + 0, t)), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где для задания M и Q нужно учесть выражения (8), (13).

Из системы (10), начальных (12) и граничных (14), (15) условий, а также из условий сопряжения (16) следует, что в первую очередь необходимо решать начально-краевую задачу для скорости прогиба v , после чего прогиб w определяется интегрированием по времени t второго уравнения (10).

2. Метод численного интегрирования сформулированной задачи. Для численного интегрирования первого уравнения (10) по времени t используем обобщенный метод Рунге – Кутты [11], а именно, двустадийный обобщенный метод Лобатто IIIA (метод трапеций), имеющий второй порядок точности по τ , где τ – шаг по времени t . Согласно этому методу

$$v^{n+1} = v^n + \tau(q^n - L(x; v^n) + q^{n+1} - L(x; v^{n+1})) / 2,$$

откуда умножением на $R(x)$ получим

$$\tau D(x; v^{n+1}) + 2R(x)v^{n+1} = \tau(p^n + p^{n+1} - D(x; v^n)) + 2R(x)v^n, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} D(x; v^n) = R(x)L(x; v^n) = \frac{d^2}{dx^2} \left(A \left(x, \frac{d^2 v^n}{dx^2} \right) \frac{d^2 v^n}{dx^2} - B \left(x, \frac{d^2 v^n}{dx^2} \right) \right), \\ q^n(x) = q(x, t_n), \quad p^n(x) = p(x, t_n), \quad v^n(x) = v(x, t_n), \\ t_{n+1} = t_n + \tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad t_0 = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

причем шаг по времени $\tau > 0$ может быть переменным ($\tau = \tau_n$).

Если на n -м (по времени) слое скорость прогиба v^n известна, то уравнение (17) задает решение на следующем слое ($n + 1$). Определенным недостатком уравнения (17) является то, что для вычисления его правой части необходимо применить дифференциальный оператор четвертого порядка $D(x; \cdot)$ к известной функции v^n (см. (17), (18)). Чтобы избежать этого дифференцирования, введем в рассмотрение функции

$$P_n(x) = \tau D(x; v^n) + 2R(x)v^n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

Тогда разрешающее уравнение (17) примет вид

$$\tau D(x; v^{n+1}) + 2R(x)v^{n+1} = P_{n+1}(x), \quad (20)$$

где правая часть известна и определяется по рекуррентной формуле

$$P_{n+1}(x) = -P_n(x) + 4R(x)v^n(x) + \tau(p^n(x) + p^{n+1}(x)), \quad (21)$$

вытекающей из сравнения (19) и правой части (17). В момент времени $t_0 = 0$ в силу первого начального условия (12) из (19) получим известную функцию

$$P_0(x) = \tau D(x; v_0(x)) + 2R(x)v_0(x), \quad v^0(x) = v_0(x). \quad (22)$$

В частности, при нулевых начальных условиях

$$P_0(x) = 0, \quad v^0 = v_0(x) = 0, \quad (23)$$

а из (21), (23) следует

$$P_1(x) = \tau(p^0(x) + p^1(x)). \quad (24)$$

Таким образом, для определения скорости прогиба на $(n+1)$ -м слое необходимо проинтегрировать уравнение (20) с известной правой частью (21)–(24) при граничных условиях, которые полностью соответствуют граничным условиям исходной начально-краевой задачи. (В частности, в граничных условиях (14), (15) и условиях сопряжения (16) (с учетом (8), (13)) необходимо заменить v на v^{n+1}).

Уравнение (20) можно интерпретировать как уравнение установившейся ползучести изгибаемого стержня на линейно-вязком основании. В силу известного [5] формального сходства уравнений установившейся ползучести (в рамках теории течения) и уравнений теории упругопластических деформаций равенство (20) формально совпадает с уравнением статического упругопластического изгиба стержня на упругом основании, если под v^{n+1} понимать прогиб. Поэтому для интегрирования граничной задачи, соответствующей уравнению (20), можно использовать известные методы статики или установившейся ползучести.

Для удобства численного интегрирования указанной граничной задачи (например, (20), (14) или (20), (15) и т. п.) обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка (20) (см. (18)) перепишем в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} A\left(x, \frac{d^2 v^m}{dx^2}\right) \frac{d^2 v^m}{dx^2} - B\left(x, \frac{d^2 v^m}{dx^2}\right) + M^m(x) = 0, \\ -\tau \frac{d^2 M^m}{dx^2} + 2R(x)v^m = P_m(x), \quad m = n+1, \end{aligned} \quad (25)$$

где $M^m(x) = M(x, t_m)$ – подлежащий определению изгибающий момент на m -м слое.

Первое уравнение системы (25) нелинейное, для его линеаризации можно использовать следующий итерационный процесс, качественно аналогичный методу переменных параметров упругости, широко используемому при решении упругопластических задач статики [9]. Пусть $v_{(r)}^m$, $M_{(r)}^m$ – известные r -е приближения разыскиваемых функций v^m , M^m , а следующие приближения этих функций определим из системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} A\left(x, \frac{d^2 v_{(r)}^m}{dx^2}\right) \frac{d^2 v_{(s)}^m}{dx^2} + M_{(s)}^m(x) = B\left(x, \frac{d^2 v_{(r)}^m}{dx^2}\right), \\ -\tau \frac{d^2 M_{(s)}^m}{dx^2} + 2R(x)v_{(s)}^m = P_m(x), \quad m = n+1, \quad s = r+1. \end{aligned} \quad (26)$$

В качестве начального приближения для v^m можно выбрать решение на предыдущем слое

$$v_{(0)}^m(x) = v^n(x), \quad m = n + 1, \quad (27)$$

или функцию

$$v_{(0)}^m(x) = -v^n(x) + (\text{tr}^n(x) + P_n(x)) / R(x), \quad m = n + 1, \quad (28)$$

получающуюся по формуле Тейлора $v^m(x) = v^n(x) + \tau v_{,t}(x, t_n)$ с учетом выражения для $v_{,t}$ из (10) и оператора $L(x; v^n)$ из (11) и (18), (19) в предположении, что на предыдущем n -м слое решение задачи уже известно. (Такой же итерационный процесс получается и при использовании метода, предложенного в [5] для решения задач установившейся ползучести.)

Если в (26) $\frac{d^2 v_{(r)}^m}{dx^2} = 0$ (например, в силу нулевых начальных условий), то, как следует из (9), функции A, B не определены. В этом случае следует в (7) экспоненту разложить по формуле Тейлора в окрестности нуля

$$\exp(-\lambda |\xi|) = 1 - \lambda |\xi| + O(|\xi|^2), \quad |\xi| \approx 0. \quad (29)$$

Тогда после вычисления первого интеграла в (2) с учетом (7), (29), (4) получим выражение для момента M в виде (8), где

$$A(x) = \frac{H^3(x)b(x)}{12} \sum_{k=0}^N \omega_k(x)(\mu_{sk} + \lambda \sigma_{sk}^0), \quad B(x) = 0. \quad (30)$$

Заменив в (26) вторые производные конечными разностями на равномерной сетке по x с шагом h , получим для трехточечного шаблона конечно-разностные аналоги уравнений (26) со вторым порядком аппроксимации по h . Для решения соответствующей СЛАУ можно использовать матричную прогонку [3], которая устойчива.

Как показывают многочисленные расчеты, проведенные авторами, итерационный процесс (26)–(30) всегда сходится, поэтому предложенная схема численного интегрирования граничной задачи для системы (25) имеет точность порядка h^2 .

Если скорость прогиба известна на n -м и $(n + 1)$ -м слоях, то из второго уравнения (10) по формуле трапеций можно определить прогиб на $(n + 1)$ -м слое:

$$w^{n+1} = w^n + \tau(v^n + v^{n+1}) / 2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

В случае вязкопластического деформирования фаз композиции разрешающее уравнение динамики стержня (первое уравнение (10) с учетом (11)) является квазилинейным уравнением параболического типа относительно скорости прогиба v . Известно [13], что для квазилинейных дифференциальных уравнений общая теория устойчивости и сходимости конечно-разностных схем разработана недостаточно, поэтому основным критерием доверия той или иной конечно-разностной схеме служат приближенные решения для тестовых (модельных) задач, аналитические решения которых известны.

Авторам пока не удалось доказать устойчивость численной схемы (20), (31) в общем случае, когда оператор D (см. (18)) нелинеен. Но в пользу устойчивости этой схемы говорят физическая корректность (непротиворечивость) результатов многочисленных расчетов, проведенных авторами, и хорошее совпадение численных результатов с известными аналитическими решениями (см. далее обсуждение результатов расчетов). В случае линей-

ной вязкости (30) для однородно армированного ($\omega_k = \text{const}$) стержня постоянной высоты ($H = \text{const}$) и ширины ($b = \text{const}$) доказать спектральную устойчивость схемы (17), (18) можно, повторив все рассуждения из [11], касающиеся доказательства устойчивости обобщенных методов Рунге – Кутты при решении задачи нестационарной одномерной теплопроводности.

Замечание. При постановке задачи динамического изгиба стержня в настоящем исследовании не учитывалась инерция вращения поперечных сечений. Если же учесть эту инерцию, то вместо системы (10) в случае стержня прямоугольного поперечного сечения получим

$$\begin{aligned} -R(x)L(x;v) + \frac{R(x)H^2(x)}{12} v_{,txx} + \frac{1}{12} (R(x)H^2(x))' v_{,tx} + \\ + p(x,t) - R(x)v_{,t} = 0, \\ w_{,t} = v(x,t), \end{aligned} \quad (32)$$

где штрихом обозначена обычная производная по x . Проинтегрировать систему (32) по времени t также можно с использованием метода трапеций, после чего вместо схемы (20)–(24) получим равенства

$$\begin{aligned} \tau D(x;v^{n+1}) + 2R(x)v^{n+1} - (RH^2)'(v^{n+1})' - RH^2(v^{n+1})'' = P_{n+1}(x), \\ P_{n+1} = -P_n + 4Rv^n - 2(RH^2)'(v^n)' - 2RH^2(v^n)'' + \tau(p^n + p^{n+1}), \end{aligned} \quad (33)$$

где следует учесть (23), (24). При достаточно плавном изменении функций R , H и соответствующем обезразмеривании уравнений (32), (33) слагаемые в них, содержащие множители H^2 , будут малы. Поэтому, как показали расчеты для тонких однородных стержней постоянного поперечного сечения, максимальные остаточные прогибы при решении задачи с учетом и без учета инерции вращения поперечных сечений отличаются лишь в третьей – четвертой значащей цифре. Следовательно, для тонких стержней инерцией вращения поперечных сечений действительно можно пренебречь.

3. Обсуждение результатов расчетов неупругой динамики стержней.

В качестве примера исследуем динамический изгиб изотропных и армированных стержней прямоугольного поперечного сечения. Ширина поперечных сечений предполагается постоянной ($b(x) = b = \text{const}$) и одинаковой для всех конструкций, высота сечений может быть постоянной ($H(x) = H_* = \text{const}$) или переменной и определяется формулой

$$H(x) = nH_* + \pi \sin(\pi x/\ell)(1-n)H_*/2, \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad n \geq 0. \quad (34)$$

(При однородном армировании стержней ($\omega_k = \text{const}$) и задании высоты сечения в виде (34) расход материала k -й фазы композиции будет такой же, как и в стержне постоянного поперечного сечения, так как объем стержней одинаков и равен $H_*\ell b$. При $0 \leq n < 1$ из (34) следует, что высота концевых сечений стержня меньше, чем центрального сечения; при $n = 1$ получаем стержень постоянного сечения.) Длина стержней $\ell = 1$ м, высота стержня постоянного сечения $H_* = 0.01$ м. Концы стержней могут быть шарнирно оперты или зацементированы. Внешняя распределенная нагрузка является нагрузкой взрывного типа, не зависит от x и затухает по экспоненциальному закону

$$p(x,t) = p(t) = p_0 \exp(-\alpha t), \quad \alpha = 12 \text{ с}^{-1}, \quad t \geq 0, \quad (35)$$

где p_0 – значение нагрузки в начальный момент времени $t = 0$. (Может быть задан другой закон изменения взрывной нагрузки по времени [1, 6], в рамках настоящего исследования это не принципиально.) Изотропные

стержни изготовлены из высококачественной малоуглеродистой стали; армированные стержни изготовлены из алюминиевого сплава АМцН и усилены однородно и прямолинейно (вдоль x) стальной проволокой У8А ($d = 80$ мкм). Механические характеристики фазовых материалов приведены в табл. 1. (Коэффициент вязкого упрочнения μ_{sk} для малоуглеродистой стали получен по табличным данным из [2] с использованием метода наименьших квадратов.)

Таблица 1. Физико-механические характеристики фазовых материалов [2, 7]

Материал	ρ_k , кг/м ³	σ_{sk}^0 , МПа	μ_{sk} , МПа · с
Малоуглеродистая сталь	8000.0	248.0	90.9
Сплав АМцН	2730.0	180.0	...
Стальная проволока У8А	7800.0	2500.0	...

Для тестирования разработанного в п. 2 метода сравним результаты численных расчетов с известными аналитическими решениями [1, 6], полученными по идеальной жесткопластической схеме ($\mu_{sk} = 0$). С этой целью исследуем динамику однородного стержня постоянного поперечного сечения, изготовленного из малоуглеродистой стали. Согласно [6] при фронтальных взрывных нагрузках (не зависящих от переменной x), к которым относится и нагрузка вида (35), следует различать два уровня нагружения:

1) нагрузки малой и средней интенсивности, при которых

$$\bar{p}_s < \bar{p}_0 \leq 3\bar{p}_s; \quad (36)$$

2) нагрузки высокой интенсивности, при которых

$$\bar{p}_0 > 3\bar{p}_s, \quad (37)$$

где

$$\bar{p}_0 \equiv p_0/b, \quad \bar{p}_s \equiv p_s/b = 8\gamma\bar{M}_s/\ell^2, \quad \bar{M}_s \equiv M_s/b, \quad M_s = \sigma_{s0}^0 H_*^2 b/4; \quad (38)$$

M_s – предельный момент в сечении стержня; p_s – предельная равномерно распределенная поперечная нагрузка; p_0 определена в (35); $\gamma = 1$ при шарнирном опирании стержня и $\gamma = 2$ при заделке обоих концов. (Здесь и далее чертой сверху обозначены относительные величины, получающиеся делением реальной величины на ширину стержня $b = \text{const}$.)

При начальном значении нагрузки (36) движение стержня сопровождается возникновением лишь пластических шарниров. В этом случае при нагрузке вида (35) время t_f остановки движения стержня определяется из уравнения [6]

$$\alpha\bar{p}_s t + \bar{p}_0(\exp(-\alpha t) - 1) = 0, \quad (39)$$

а величина максимального остаточного прогиба

$$w_{\max} = \frac{3\bar{p}_s}{2\bar{m}} \left(-\frac{t_f^2}{2} + \frac{\bar{p}_0/\bar{p}_s - 1}{\alpha} t_f \right), \quad \bar{m} \equiv \frac{m}{b} = \rho_0 H_*. \quad (40)$$

При начальном уровне нагрузки (37) движение стержня сопровождается возникновением сначала пластических зон, которые через время t_1 вырождаются в пластические шарниры. Величина t_1 определяется уравнением [6]

$$3\alpha\bar{p}_s t + \bar{p}_0(\exp(-\alpha t) - 1) = 0, \quad (41)$$

время t_f остановки стержня – по-прежнему уравнением (39), а величина максимального остаточного прогиба в этом случае

$$w_{\max} = \delta(t_1) + \frac{3}{2\bar{m}} \left(-\frac{\bar{p}_s}{2} (t_f^2 - t_1^2) + \frac{\bar{p}_0}{\alpha} (t_f - t_1) + \frac{\bar{p}_0}{\alpha^2} (e^{-\alpha t_f} - e^{-\alpha t_1}) \right),$$

$$\delta(t_1) = \frac{\bar{p}_0}{\alpha \bar{m}} \left(t_1 + \frac{1}{\alpha} (\exp(-\alpha t_1) - 1) \right). \quad (42)$$

В табл. 2 приведены точные, рассчитанные по формулам (35)–(42), и приближенные, рассчитанные по схеме п. 2, значения времени остановки t_f и максимального безразмерного остаточного прогиба $W_{\max} = \frac{1}{2c^2} H_* w_{\max}$, а также характерный период времени T , в течение которого изучалось движение стержня. В расчетах время T разбивалось на 1000 слоев ($\tau = T/1000$), а по длине стержня вводился 401 узел. Расчеты проводились для нагрузок средней и малой интенсивности $\bar{p}_0 = 148.8$ кПа, что для стержня из малоуглеродистой стали соответствует $\bar{p}_0 = 3\bar{p}_s$ при шарнирном опирании и $\bar{p}_0 = 1.5\bar{p}_s$ при заделке обоих концов, а также при нагрузке большой интенсивности $\bar{p}_0 = 396.8$ кПа, что соответствует $\bar{p}_0 = 8\bar{p}_s$ при шарнирном опирании и $\bar{p}_0 = 4\bar{p}_s$ при заделке. В скобках в табл. 2 указаны отклонения приближенного решения от точного.

Таблица 2. Сравнение точных и приближенных решений задачи неупругой динамики стержней

Характеристика решения	Шарнирное опирание		Жесткое защемление	
	Точное решение	Приближенное решение	Точное решение	Приближенное решение
Нагрузка средней и малой интенсивности ($\bar{p}_0 = 148.8$ кПа)				
t_f , с	0.235120	0.234920 (0.1 %)	0.0728510	0.0708990 (2.7 %)
W_{\max}	0.053689	0.052526 (2.2 %)	0.0035508	0.0032194 (9.3 %)
T , с	...	0.25	...	0.25
Нагрузка высокой интенсивности ($\bar{p}_0 = 396.8$ кПа)				
t_f , с	0.66644	0.66400 (0.4 %)	0.32672	0.32200 (1.4 %)
W_{\max}	0.73971	0.73153 (1.1 %)	0.26206	0.24915 (4.9 %)
T , с	...	1.0	...	1.0

Из табл. 2 следует хорошее согласование численного решения с аналитическим: почти все отклонения составляют менее 5 %, исключением является лишь значение максимального прогиба защемленного стержня при $\bar{p}_0 = 148.8$ кПа. Ошибка для этой величины составляет 9.3 %. Это вызвано тем, что для защемленного стержня нагрузка такого уровня является малой ($\bar{p}_0 = 1.5\bar{p}_s$), поэтому пластичность развивается слабо и сказывается влияние искусственно введенной вязкости (см. (7)). С увеличением уровня нагрузки пластичность развивается более интенсивно и влияние искусственной вязкости уменьшается. Так, из табл. 2 видно, что с увеличением внешней нагрузки в 8/3 раза ошибка по остаточному прогибу уменьшается почти вдвое. Дополнительно уменьшить ошибку можно за счет увеличения слоев по времени и количества узлов по переменной x (за счет уменьшения τ и h). Однако следует подчеркнуть, что приближенные значения прогиба всегда меньше точных (результат введенной вязкости). Последнее является положительным фактом, так как известно [1, 6], что вычисленные аналитически остаточные прогибы превышают экспериментальные значе-

ния на 30÷80 %, поэтому приближенные значения W_{\max} в табл. 2 лучше согласуются с экспериментом, чем точные.

Таблица 3. Характеристики решения задачи неупругой динамики стержней с учетом вязкого упрочнения

Характеристика решения	Шарнирное опирание		Жесткое защемление	
	$\bar{p}_0 = 148.8 \text{ кПа}$	$\bar{p}_0 = 396.8 \text{ кПа}$	$\bar{p}_0 = 148.8 \text{ кПа}$	$\bar{p}_0 = 396.8 \text{ кПа}$
$t_f, \text{ с}$	0.1523 (64.8 %)	0.2820 (42.7 %)	0.0379 (52.1 %)	0.1230 (38.2 %)
W_{\max}	0.0169 (32.2 %)	0.1335 (18.3 %)	$4.11 \cdot 10^{-4}$ (12.8%)	0.0160 (6.4 %)

Результаты, приведенные в табл. 2, получены по идеально жесткопластической схеме. Если же учесть зависимость предела текучести малоуглеродистой стали от скорости деформаций ($\mu_{sk} \neq 0$, см. табл. 1), то получим другие значения времени остановки и максимального остаточного прогиба, приведенные в табл. 3, где в скобках указано, какой процент составляет величина от соответствующего расчетного значения в табл. 2. Из табл. 3 видно, что учет вязкого упрочнения материала стержня приводит к резкому уменьшению времени остановки (в 1.5÷2.5 раза) и максимального остаточного прогиба (в 3÷15 раз). Последнее обстоятельство лучше согласуется с экспериментальными данными [1, 6].

На рис. 1 изображены кривые, характеризующие движение центральных ($x = \ell/2$) сечений рассмотренных выше стержней при разных типах закрепления их концов с учетом и без учета вязкого упрочнения при нагрузке высокой интенсивности ($\bar{p}_0 = 396.8 \text{ кПа}$). По оси абсцисс отложено время t , а по оси ординат – безразмерный прогиб $W = H_x w / (2\ell^2)$. Кривые 1, 1' относятся к шарнирно опертым стержням, линии 2, 2' – к жестко защемленным. Кривые 1, 2 рассчитаны без учета вязкого упрочнения ($\mu_{sk} = 0$), а линии 1', 2' – с учетом вязкого упрочнения ($\mu_{sk} \neq 0$). Ординаты горизонтальных участков, характеризующих остановку движения стержней, соответствуют значениям W_{\max} , приведенным в табл. 2, 3 для $\bar{p}_0 = 396.8 \text{ кПа}$.

На рис. 2 изображены эпюры безразмерных остаточных прогибов. Кривые 1, 1', 2, 2' рассчитаны при тех же входных данных, что и соответствующие линии на рис. 1 (ординаты максимумов указанных кривых на рис. 1, 2 совпадают).

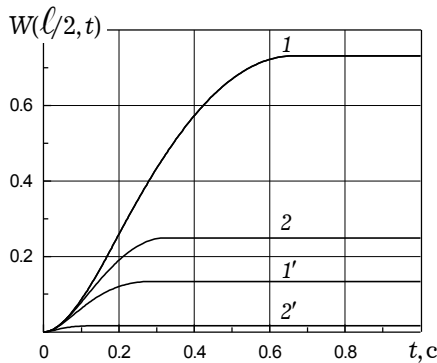


Рис. 1

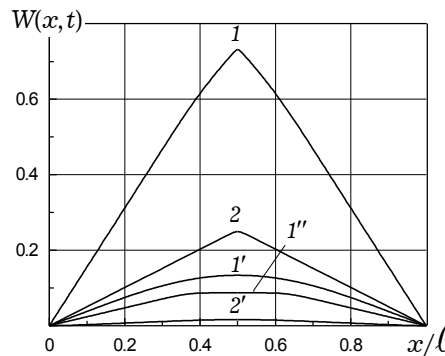


Рис. 2

Кривые 1, 2 на рис. 2 по форме близки к ломаным, что соответствует возникновению в центральном сечении стержня пластического шарнира. Эпюры же 1', 2', полученные с учетом вязкого упрочнения, не имеют изломов и близки к соответствующим балочным функциям [12].

Линия 1'' на рис. 2 рассчитана при тех же входных данных, что и кривая 1, но характеризует не остаточный прогиб, а эпюру прогибов в момент времени $t = 0.1 \text{ с}$ ($\approx t_f/6.6$). Горизонтальный участок в центральной части этой кривой соответствует пластической зоне, которая возникает на начальном этапе движения стержня при нагрузках большой интенсивности и вырождается в пластический шарнир в момент времени $t_1 = 0.2 \text{ с}$.

Из табл. 2, 3 и рис. 1, 2 следует, что при одном и том же уровне нагружения остаточные прогибы в защемленных стержнях в разы (иногда на порядок) меньше, чем в шарнирно опертых стержнях той же геометрии.

На рис. 1, 2 не изображены соответствующие эпюры для нагрузок малой и средней интенсивности ($\bar{p}_0 = 148.8 \text{ кПа}$), так как максимальные значения для них почти на порядок меньше, чем у приведенных кривых.

Выше исследовалась динамика стержней постоянного поперечного сечения. Варьируя же форму сечений можно управлять предельной распределенной нагрузкой \bar{p}_s и остаточными прогибами. Рассмотрим совокупность шарнирно опертых стержней прямоугольного поперечного сечения постоянной ширины $b = \text{const}$, высота которых определяется формулой (34). Выбор параметра n в (34) задает форму профиля стержня.

Определим зависимость $\bar{p}_s(n)$. Относительный изгибающий момент \bar{M} в произвольном сечении x шарнирно опертого стержня

$$\bar{M}(x) = -\bar{p}_s x(x - \ell) / 2, \quad (43)$$

а относительный предельный момент в этом сечении (см. (2), (5))

$$\bar{M}_s^0(x) = \sigma_s^0 H^2(x, n) / 4, \quad \sigma_s^0 = \sum_k \sigma_{sk}^0 \omega_k, \quad (44)$$

где $H(x, n)$ задается равенством (34). Приравнивая (43) и (44), получим

$$\bar{p}_s(x, n) = -\sigma_s^0 H^2(x, n) / [2x(x - \ell)].$$

Нас интересует минимум \bar{p}_s по x , при котором впервые хотя бы в одном из сечений возникает пластический шарнир, поэтому окончательно

$$\bar{p}_s(n) = \lim_{0 \leq x \leq \ell} \{-\sigma_s^0 H^2(x, n) / [2x(x - \ell)]\}. \quad (45)$$

На рис. 3 кривая 1 характеризует зависимость (45) с учетом (34) для стержней из малоуглеродистой стали, а кривая 2 – для металлокомпозитных стержней, изготовленных из алюминиевого сплава АМцН и продольно армированных стальной проволокой У8А с интенсивностью $\omega_1 = 0.6$. Видно, что обе кривые имеют локальные максимумы, определяющие значения n , при которых предельная нагрузка с профилями (34) является наибольшей.

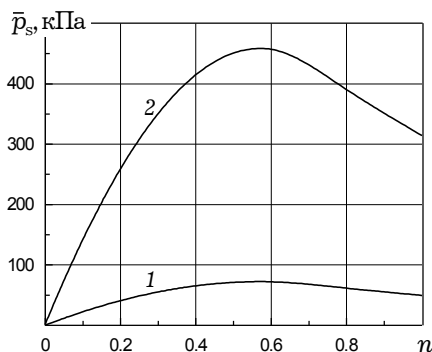


Рис. 3

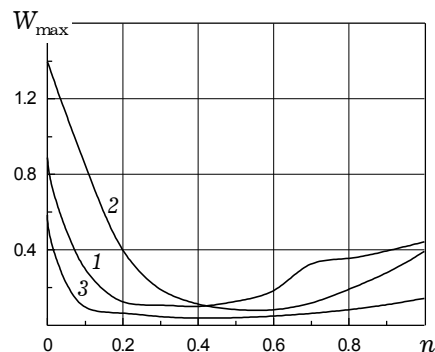


Рис. 4

На рис. 4 изображены кривые, характеризующие зависимость максимального остаточного прогиба W_{\max} от значения параметра n в (34) при нагрузке взрывного типа (35) с начальным значением $\bar{p}_0 = 900$ кПа. Линия 1 соответствует профилированным стальным стержням и рассчитана с учетом вязкого упрочнения материала (аналогичный расчет без учета упрочнения приводит к значениям, на порядок превосходящим те, что изображены на рис. 4, поэтому соответствующая кривая не изображена); линия 2 рассчитана для металлокомпозитных стержней без учета вязкого упрочнения стальной проволоки (пределы текучести алюминиевых сплавов практически не чувствительны к скорости деформации [10]), а кривая 3 – для металлокомпозитных конструкций с учетом вязкого упрочнения стальной проволоки. (В силу отсутствия экспериментальных данных, позволяющих определить коэффициент μ_{s1} для проволоки У8А, в расчетах принималось такое же значение $\mu_{s1} = 90.9$ кПа·с, как и для малоуглеродистой стали, см. табл. 1.)

Как видно, все кривые на рис. 4 имеют локальные минимумы, причем значения W_{\max} в этих минимумах в несколько раз меньше, чем при $n = 1$ (стержни постоянного поперечного сечения). Следовательно, за счет рационального подбора профиля стержня остаточные прогибы можно уменьшить в несколько раз.

На основании сопоставления максимумов кривых 1, 2 на рис. 3 и минимумов кривых 1, 3 на рис. 4 можно заключить, что замена изотропного стального стержня на металлокомпозитный стержень того же объема позволяет увеличить статическую предельную нагрузку в несколько раз и уменьшить в разы остаточный прогиб. Это объясняется тем, что предел текучести стальной проволоки У8А на порядок больше той же величины конструкционной малоуглеродистой стали (см. табл. 1).

Сравним динамическое поведение равнопрочных (в статической постановке) стержней с конструкциями, рассмотренными выше. Из сопоставления равенств (43), (44) следует, что при шарнирном опирании и равномерном поперечном нагружении стержня в каждом его сечении момент достигает предельного значения, если высота стержня изменяется по закону

$$H(x) = H_0 \sqrt{x(\ell - x)}, \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad (46)$$

Из условия равенства объемов равнопрочного и эталонного стержней получаем

$$H_0 = H_* \ell \left(\int_0^\ell \sqrt{x(\ell - x)} dx \right)^{-1}, \quad (47)$$

а из (43), (44) с учетом (46), (47) следует значение предельной нагрузки

$$\bar{p}_s = H_0^2 \sigma_s^0 / 2. \quad (48)$$

В случае изотропного стального стержня $\bar{p}_s = 80.5$ кПа, а для металлокомпозитного стержня прежней структуры $\bar{p}_s = 510.1$ кПа, что примерно на 12 % больше максимальных значений кривых 1, 2 на рис. 3. В силу статической определимости рассматриваемой задачи при шарнирном опирании такие равнопрочные стержни являются оптимальными по прочности.

Величина максимального остаточного прогиба стального равнопрочного стержня при взрывной нагрузке интенсивности $\bar{p}_0 = 900$ кПа с учетом вязкого упрочнения материала имеет значение $W_{\max} = 0.1435$, что примерно на 43 % больше минимального значения кривой 1 рис. 4. Следовательно, оптимальный при статическом нагружении стержень не является наилучшим

при динамических нагрузках, так как величина остаточного прогиба характеризует меру повреждаемости стержня. Для металлокомпозитного стержня $W_{\max} = 0.0346$, что примерно на 10 % меньше минимального значения кривой 3 на рис. 4 (расчет проводился с учетом вязкого упрочнения арматуры). Следовательно, равнопрочный металлокомпозитный стержень, в отличие от изотропного, оказался наилучшим как при статическом, так и при динамическом нагружении (в последнем случае – среди всех рассмотренных выше профилей).

Остановимся на вопросе выбора значения параметра λ в (7), характеризующего искусственно введенную вязкость. Во всех расчетах принималось значение $\lambda = 10^7$; при $\lambda = 10^3$ величина остаточного прогиба при нагрузках средней интенсивности отличается от расчетных значений, приведенных в табл. 2, лишь в четвертой значащей цифре. При $\lambda = 50$ наблюдается значительное и неоправданное увеличение времени останова. Следовательно, для расчетов можно рекомендовать значения $\lambda \approx 10^3 \div 10^4$.

Таким образом, предложенный в настоящей работе подход сведения динамики жестко-вязкопластических стержней к близкой задаче динамики вязкопластических конструкций и разработанный численный метод позволяют эффективно решать динамические задачи неупругих стержневых систем. Эти методы можно обобщить на случай неупругой динамики однородных и неоднородных, изотропных и армированных пластин, исследование которой находится в настоящее время в зачаточном состоянии [8]. Оптимальные при статическом нагружении конструкции не всегда являются наилучшими и при динамических нагрузках, поэтому в задачах динамики необходимо разрабатывать свои подходы к оптимальному и рациональному проектированию. Улучшить динамические показатели изделия можно за счет замены обычных конструкционных материалов композитными.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00161-а).

1. Ананенко Л. А., Комаров К. Л. Динамика неупругих балок. – Новосибирск: Наука, 1999. – 151 с.
2. Ворнок Ф., Поуп Дж. Изменение механических свойств мягкой стали при повторных ударах // Механика: Сб. пер. и реф. иностр. период. лит. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1950. – Вып. II. – С. 69–83.
3. Калиткин Н. Н. Численные методы – Москва: Наука, 1978. – 512 с.
4. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – Москва: Наука, 1969. – 420 с.
5. Качанов Л. М. Теория ползучести. – Москва: Физматгиз, 1960. – 456 с.
6. Комаров К. Л., Немировский Ю. В. Динамика жестко-пластических элементов конструкций. – Новосибирск: Наука, 1984. – 236 с.
7. Композиционные материалы: Справочник. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
8. Кошур В. Д., Немировский Ю. В. Континуальные и дискретные модели динамического деформирования элементов конструкций. – Новосибирск: Наука, 1990. – 200 с.
9. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – Москва: Машиностроение, 1968. – 400 с.
10. Мейден (С. J. Maiden). Грин (S. J. Green) Испытание на скоростное деформирование при сжатии для шести материалов при скоростях деформации от 10^{-3} до 10^4 мм/сек // Прикл. механика: Тр. амер. общества. Ser. E. – 1966. – № 3. – С. 20–30.
11. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Численное интегрирование начально-краевых задач с большими градиентами решения обобщенными методами Рунге – Кутты // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 1. – С. 43–62.
12. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. – Москва: Наука, 1979. – 744 с.
13. Самарский А. А. Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1989. – 616 с.
14. Феодосьев В. И. Сопrotивление материалов. – Москва: Наука, 1986. – 516 с.

ДИНАМІЧНИЙ В'ЯЗКОПЛАСТИЧНИЙ ЗГИН АРМОВАНИХ СТЕРЖНІВ ЗМІННОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Запропоновано в'язкопластичну модель, у рамках якої сформульовано задачу непружного динамічного згину стержнів. На основі узагальнення методів Рунге – Кутта розроблено метод числового інтегрування сформульованої задачі. Проведено порівняння числових результатів з відомими аналітичними розв'язками, отриманими в рамках жорсткопластичної моделі, показана їх добра узгодженість. Ефективність розробленого підходу проілюстровано на розрахунках непружної динаміки ізотропних і армованих стержнів сталого та змінного поперечних перерізів. Показано, що оптимальні при статичному навантаженні стержні не завжди є найкращими і при динамічній дії.

DYNAMIC VISCO-PLASTIC BENDING OF REINFORCED CORES WITH VARIABLE CROSS-SECTION

We present a visco-plastic model within the limits of which the problem on non-elastic dynamic bend of cores is formulated. The method of numerical integration of the problem in view, based on generalization of the Runge – Kutta methods is developed. Comparison of numerical results with the known analytical solutions obtained within the limits of a rigid-plastic of model is made, their good agreement is shown. Efficiency of the developed approach is shown on the calculations of non-elastic dynamics of the isotropic and reinforced cores of constant and variable cross-section. It is shown, that not always the optimum – at static loading – cores are the best at dynamic influence.

Ин-т теорет. и прикл. механики
СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено
22.04.05