

РУХ ЕЛЕКТРОІЗОЛЬОВАНОЇ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ З ДОКРИТИЧНОЮ ШВИДКІСТЮ У П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ БІМАТЕРІАЛЬНОМУ ПРОСТОРІ

Вивчається рух електроізолюваної тріщини по межі поділу матеріалів у просторі, що складається з двох різних п'єзоелектричних півпросторів. Ліва вершина тріщини вважається відкритою, натомість біля правої вершини виникає зона контакту. Тертя між берегами тріщини відсутнє. Тріщина рухається з усталеною швидкістю разом із прикладеними до берегів зосередженими електричними і механічними навантаженнями. У процесі розв'язування отримано трансцендентне рівняння для визначення зони контакту, яке розв'язано чисельно, а також вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень. Окремо приділено увагу швидкості вивільнення енергії в околі правої вершини тріщини. Проведено порівняльний аналіз ділянок контакту та швидкостей вивільнення енергії для тріщин скінченної та напівнескінченної довжини.

Вступ. Рух тріщини в композиті по межі поділу матеріалів становить суттєвий практичний інтерес як один із етапів руйнування, пов'язаний з виникненням і ростом міжфазних дефектів. Рух тріщин в ізотропних і ортотропних біматеріалах досліджувався у роботах [1, 3, 7, 13], у яких використано моделі відкритої тріщини [1, 13] і тріщини з наявністю безфрикційної зони контакту [3, 7]. У зв'язку з широким застосуванням композиційних матеріалів, складовими яких є п'єзоелектрики, набула актуальності проблема дослідження напружено-деформованого стану в околі тріщини, що рухається по межі поділу матеріалів у п'єзоелектричному біматеріальному просторі. Дослідження у цьому напрямку проводяться із застосуванням двох основних моделей тріщин в п'єзоелектричному матеріалі: моделі електропроникної тріщини, коли вважається, що електричне поле безперешкодно пронизує тріщину [10], і моделі електроізолюваної тріщини, коли вважається, що силові лінії електричного поля не пронизують тріщину, а гальмуються нею [11, 12].

У цій роботі розглядаємо електроізолювану тріщину, що рухається з докритичною швидкістю по межі поділу складових у п'єзоелектричному біматеріальному просторі разом із сконцентрованим навантаженням і зосередженим зарядом, прикладеними до її берегів. Біля правої вершини тріщини виникає зона контакту, тертя між берегами якої вважаємо відсутнім. Розглядаються випадки тріщин скінченної та напівнескінченної довжини.

Постановка задачі. Розглянемо тріщину скінченної довжини (c, b), що рухається зі швидкістю v під дією сил P_1, P_3 і заряду D , прикладених відповідно в точках з координатами $(d, 0)$ і $(e, 0)$ (рис. 1). Слід відмітити, що

рухома тріщина скінченної довжини є ідеалізованим випадком, який вперше було розглянуто Е. Іоффе [14]. Однак у роботах [6, 8] показано, що на локальні особливості напруженого стану, що виникають в околі якої-небудь із вершин тріщини, вплив іншої вершини є незначним і використання моделі рухомої тріщини скінченної довжини для дослідження вказаних особливостей повністю виправдано. Вважаємо, що біля правої вершини тріщини виникає безфрикційна зона контакту (a, b) невідомої поки що довжини.

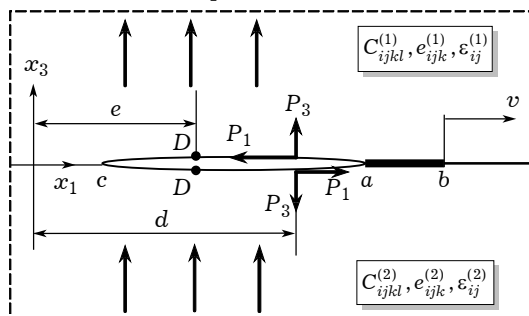


Рис. 1

Напрямок поляризації обох матеріалів співпадає з напрямком осі X_3 .

Рівняння руху для п'єзоелектричного середовища в нерухомій системі координат X_1, X_2, X_3 мають вигляд

$$(c_{ijrs}u_r + e_{sji}\varphi)_{,si} = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad (-\varepsilon_{is}\varphi + e_{irs}u_r)_{,si} = 0. \quad (1)$$

Визначальні співвідношення, що пов'язують механічні напруження та електричну індукцію з деформаціями та електричною напруженістю, запишемо в такому вигляді:

$$\sigma_{ij} = C_{ijrs}u_{r,s} + e_{sji}\varphi_{,s}, \quad D_i = -\varepsilon_{is}\varphi_{,s} + e_{irs}u_{r,s}. \quad (2)$$

У формулах (1), (2) прийнято такі позначення: σ_{ij} , D_i , u_i , φ – компоненти тензора переміщень, вектора електричної індукції, вектора переміщень, потенціал електричного поля відповідно; C_{ijkl} – компоненти тензора пружних сталей; e_{lij} – п'єзоелектричні сталі; ε_{ij} – діелектричні проникності матеріалу; ρ – густина матеріалу.

Введемо в розгляд вектор $\mathbf{U} = [u_1, u_2, u_3, \varphi]^T$ і проведемо традиційну заміну координат $x_1 = X_1 - vt$, $x_2 = X_2$, $x_3 = X_3$. Тоді рівняння (1) в рухомих координатах переписуються таким чином:

$$\mathbf{Q}\mathbf{U}_{,11} + (\mathbf{R} + \mathbf{R}^T)\mathbf{U}_{,13} + \mathbf{T}\mathbf{U}_{,33} = 0, \quad (3)$$

де

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 & \mathbf{e}_{11} \\ \mathbf{e}_{11}^T & -\varepsilon_{11} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0 & \mathbf{e}_{31} \\ \mathbf{e}_{13}^T & -\varepsilon_{13} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 & \mathbf{e}_{33} \\ \mathbf{e}_{33}^T & -\varepsilon_{33} \end{bmatrix},$$

$$(\mathbf{Q}_0)_{ik} = c_{i1k1} - \rho v^2 \delta_{ik}, \quad (\mathbf{R}_0)_{ik} = c_{i1k3},$$

$$(\mathbf{T}_0)_{ik} = c_{i3k3}, \quad \mathbf{e}_{ik} = [e_{i1k}, e_{i2k}, e_{i3k}]^T.$$

Індекс «T» зверху означає операцію транспонування.

У рухомій системі координат граничні умови в площині поділу матеріалів мають вигляд

$$[u_1] = [u_2] = [u_3] = 0, \quad [\varphi] = 0, \\ [\sigma_{13}] = [\sigma_{23}] = [\sigma_{33}] = 0, \quad [D_3] = 0, \quad x_1 \notin (c, b), \quad (4)$$

$$\sigma_{13}^\pm = P_1 \delta(x_1 - d), \quad \sigma_{33}^\pm = P_3 \delta(x_1 - d), \\ \sigma_{23}^\pm = 0, \quad D_3^\pm = D \delta(x_1 - e), \quad x_1 \in (c, a), \quad (5)$$

$$\sigma_{13}^\pm = \sigma_{23}^\pm = 0, \quad [\sigma_{33}] = 0, \quad [u_3] = 0, \\ [\varphi] = 0, \quad [D_3] = 0, \quad x_1 \in (a, b), \quad (6)$$

де $\delta(x_1)$ – дельта-функція Дірака; $[f] = f^+ - f^-$ – стрибок функції при переході через площину поділу матеріалів, $f^\pm(x_1) = f(x_1 \pm i \cdot 0)$.

Припустимо, що швидкість руху тріщини v є докритичною, тобто не перевищує c_1 – швидкості руху поверхневих хвиль Релея або Гуляєва – Блюстейна, і є мінімальною з відповідних швидкостей хвиль для обох матеріалів, що рухаються у напрямку x_1 . У цьому разі рівняння (3) – це система рівнянь у частинних похідних еліптичного типу, для розв'язування якої можемо застосувати підхід узагальнених комплексних потенціалів [11, 12], запропонований для розв'язування задач з нерухомою тріщиною.

Загальний розв'язок. Припустимо, що напруження, електрична індукція, переміщення і електричний потенціал не залежать від координати x_2 . Подамо вектор-функцію \mathbf{U} через вектор-функцію $\mathbf{f}(z)$:

$$u_k = a_k f_k(x + py), \quad k = 1, 2, 3, 4,$$

де a_k і p – компоненти власного вектора і власне значення відповідно, які визначаються як розв'язки системи рівнянь

$$[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^\top) + p^2\mathbf{T}] \mathbf{a} = 0,$$

нетривіальний розв'язок якої існує при виконанні умови

$$\det[\mathbf{Q} + p(\mathbf{R} + \mathbf{R}^\top) + p^2\mathbf{T}] = 0. \quad (7)$$

Рівняння (7) є алгебраїчним рівнянням восьмого порядку, яке розв'язується чисельно і має комплексні або чисто уявні корені [12]. Позначимо через p_i , $i = 1, 2, 3, 4$, корені з додатною уявною частиною, а відповідні їм власні вектори – через \mathbf{a}_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Найбільш загальний розв'язок рівнянь (3) можемо подати у вигляді [12]

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{f}(z) + \overline{\mathbf{A}}\overline{\mathbf{f}}(\bar{z}), \quad (8)$$

де $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4]$ – матриця, побудована з власних векторів, $\mathbf{f}(z) = [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3), f_4(z_4)]^\top$ – невизначена поки що вектор-функція, $z_i = x_1 + p_i x_3$ – узагальнена комплексна змінна. Рискою зверху позначено операцію комплексного спряження.

Введемо в розгляд вектор

$$\mathbf{t} = [\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}, D_3]^\top, \quad (9)$$

і, використовуючи зображення (2), (8), перепишемо його так:

$$\mathbf{t} = \mathbf{B}\mathbf{f}'(z) + \overline{\mathbf{B}}\overline{\mathbf{f}}'(\bar{z}),$$

де

$$\mathbf{f}'(z) = \left[\frac{d}{dz_1} f_1(z_1), \frac{d}{dz_2} f_2(z_2), \frac{d}{dz_3} f_3(z_3), \frac{d}{dz_4} f_4(z_4) \right],$$

$$B_{ij} = (E_{3ik1} + p_j E_{3ik3}) A_{kj},$$

$$E_{iJKL} = \begin{cases} c_{ijkl}, & J, K = 1, 2, 3, \\ e_{lij}, & J = 1, 2, 3, \quad K = 4, \\ e_{ikl}, & K = 1, 2, 3, \quad J = 4, \\ -\varepsilon_{il}, & J = K = 4. \end{cases}$$

Розв'язок для анізотропного п'єзоелектричного біматеріального простору зі змішаними граничними умовами на інтерфейсі. Із граничних умов (4)–(6) випливає, що вектор-функція \mathbf{t} є неперервною при переході через інтерфейс, тобто

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{t}^{(2)}(x_1, 0), \quad x_1 \in (-\infty, \infty), \quad (10)$$

на відміну від вектор-функції \mathbf{U} , яка є неперервною на всьому інтерфейсі, за винятком області тріщини:

$$\mathbf{U}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{U}^{(2)}(x_1, 0), \quad x_1 \in \{(-\infty, c) \cup (b, \infty)\}.$$

Індексами «1» і «2» у дужках позначено відповідно області вище та нижче лінії поділу матеріалів.

Зображення (8), (9) перепишемо у вигляді

$$\mathbf{U}^{(m)}(x_1, x_3) = \mathbf{A}^{(m)}\mathbf{f}^{(m)}(z) + \bar{\mathbf{A}}^{(m)}\bar{\mathbf{f}}^{(m)}(\bar{z}), \quad (11)$$

$$\mathbf{t}^{(m)}(x_1, x_3) = \mathbf{B}^{(m)}\mathbf{f}'^{(m)}(z) + \bar{\mathbf{B}}^{(m)}\bar{\mathbf{f}}'^{(m)}(\bar{z}), \quad (12)$$

де вектор-функції $\mathbf{f}^{(1)}(z)$ і $\mathbf{f}^{(2)}(z)$ аналітичні у верхній, $x_3 > 0$, і нижній, $x_3 < 0$, областях відповідно; $m = \begin{cases} 1, & x_3 > 0, \\ 2, & x_3 < 0. \end{cases}$

Подальший аналіз зроблено аналогічно до аналізу, детально наведеного у роботах [10, 11]. Рівняння (10) дає змогу записати співвідношення

$$\mathbf{B}^{(1)}\mathbf{f}'^{(1)}(x_1, 0) - \bar{\mathbf{B}}^{(2)}\bar{\mathbf{f}}'^{(2)}(x_1, 0) = \mathbf{B}^{(2)}\mathbf{f}'^{(2)}(x_1, 0) - \bar{\mathbf{B}}^{(1)}\bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1, 0), \quad (13)$$

$$x_1 \in (-\infty, \infty).$$

Ліва частина рівняння (13) є граничним значенням функції, аналітичної в області $x_3 > 0$, а права частина є граничним значенням функції, аналітичної в області $x_3 < 0$. Згідно з рівнянням (13) обидві ці функції можуть бути аналітично продовжені на всю комплексну площину, тобто вони дорівнюють деякій вектор-функції $\mathbf{M}(z)$, аналітичній у всій комплексній площині. Беручи до уваги, що напруження і електрична індукція загасають на нескінченності, можемо, враховуючи зображення (12), зробити висновок, що $\mathbf{M}(z)|_{z \rightarrow \infty} = 0$. Це означає, що $\mathbf{M}(z) = 0$ у всій комплексній площині. Таким чином, рівняння (13) дає змогу записати такі рівняння:

$$\mathbf{B}^{(1)}\mathbf{f}'^{(1)}(z) - \bar{\mathbf{B}}^{(2)}\bar{\mathbf{f}}'^{(2)}(\bar{z}) = 0, \quad x_3 > 0, \quad (14)$$

$$\mathbf{B}^{(2)}\mathbf{f}'^{(2)}(z) - \bar{\mathbf{B}}^{(1)}\bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(\bar{z}) = 0, \quad x_3 < 0. \quad (15)$$

Враховавши, що матриці в співвідношеннях (14), (15) не є виродженими, перепишемо останні рівняння у формі

$$\bar{\mathbf{f}}'^{(2)}(\bar{z}) = (\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1}\mathbf{B}^{(1)}\mathbf{f}'^{(1)}(z), \quad x_3 > 0, \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(\bar{z}) = (\bar{\mathbf{B}}^{(1)})^{-1}\mathbf{B}^{(2)}\mathbf{f}'^{(2)}(z), \quad x_3 < 0. \quad (17)$$

Введемо в розгляд вектор

$$[\mathbf{U}'(x_1)] = \mathbf{U}'^{(1)}(x_1, 0) - \mathbf{U}'^{(2)}(x_1, 0),$$

який є стрибком при переході через інтерфейс похідних від переміщень і електричного потенціалу. Використавши вирази (11), (16), (17), цей стрибок запишемо у вигляді

$$[\mathbf{U}'(x_1)] = \mathbf{D}\mathbf{f}'^{(1)}(x_1) + \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(x_1),$$

де $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{(1)} - \bar{\mathbf{A}}^{(2)}(\bar{\mathbf{B}}^{(2)})^{-1}\mathbf{B}^{(1)}$.

Введемо в розгляд вектор-функцію $\mathbf{W}(z)$ таким чином:

$$\mathbf{W}(z) = \begin{cases} \mathbf{D}\mathbf{f}'^{(1)}(z), & x_3 > 0, \\ \bar{\mathbf{D}}\bar{\mathbf{f}}'^{(1)}(z), & x_3 < 0, \end{cases}$$

яка є аналітичною у всій комплексній площині, за винятком області тріщини (с, b). Виражаючи вектор-функції $[\mathbf{U}'(x_1)]$ і $\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0)$ у термінах вектор-функції $\mathbf{W}(z)$, отримаємо

$$[\mathbf{U}'(x_1)] = \mathbf{W}^+(x_1) - \mathbf{W}^-(x_1), \quad (18)$$

$$\mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{G}\mathbf{W}^+(x_1) - \bar{\mathbf{G}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (19)$$

де $\mathbf{G} = \mathbf{B}^{(1)}\mathbf{D}^{-1}$, $\mathbf{W}^+(x_1) = \mathbf{W}(x_1 + i0)$, $\mathbf{W}^-(x_1) = \mathbf{W}(x_1 - i0)$.

Визначення основних параметрів руйнування при наявності штучної зони контакту. В подальшому увага буде приділена п'єзоелектричним матеріалам класу бтпм як одним з найбільш поширених з досить розвинутою анізотропією. У випадку збігу напрямку поляризації першого та другого матеріалів з віссю x_3 компонента U_2 вектор-функції \mathbf{U} буде незалежною від трьох інших компонент (U_1, U_3, U_4) , як це зазначено в роботі [11]. Таким чином, маємо дві окремі задачі: задачу антиплоскої деформації і плоску задачу електропружності. Матриця \mathbf{G} матиме такий вигляд:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} ig_{11} & 0 & g_{13} & g_{14} \\ 0 & ig_{22} & 0 & 0 \\ g_{31} & 0 & ig_{33} & ig_{34} \\ g_{41} & 0 & ig_{43} & ig_{44} \end{bmatrix},$$

де коефіцієнти g_{ij} – дійсні та $g_{ij} = g_{ji}$ при $i \neq j$. Зосередимо увагу на плоскій задачі електропружності як на більш складному випадку. Для спрощення розв'язку надалі будемо розглядати вищенаведені вектор-функції за відсутності другої компоненти та вищенаведені матриці за відсутності других рядка та стовпця.

Рівність (19) перепишемо у формі

$$\mathbf{St}^{(1)}(x_1, 0) = \mathbf{SGW}^+(x_1) - \bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{G}}\mathbf{W}^-(x_1), \quad (20)$$

де \mathbf{S} – невизначений поки що вектор $\mathbf{S} = (S_1, S_3, S_4)^\top$.

Введемо в розгляд функцію

$$F(z) = \mathbf{YW}(z), \quad (21)$$

де

$$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_3, Y_4)^\top = \mathbf{SG},$$

і припустимо, що

$$\bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{G}} = -\gamma \mathbf{SG}, \quad (22)$$

де γ – константа, яку належить визначити. Врахувавши (21), рівняння (20) перепишемо так:

$$\mathbf{St}^{(1)}(x_1, 0) = F^+(x_1) + \gamma F^-(x_1). \quad (23)$$

Виходячи з рівняння (22), приходимо до задачі на власні значення і власні вектори для визначення вектора \mathbf{S} і константи γ :

$$(\gamma \mathbf{G}^\top + \bar{\mathbf{G}}^\top) \mathbf{S}^\top = 0.$$

Рівняння $\det(\gamma \mathbf{G}^\top + \bar{\mathbf{G}}^\top) = 0$ матиме такі корені:

$$\gamma_1 = \frac{1 + \delta}{1 - \delta}, \quad \gamma_3 = \gamma_1^{-1}, \quad \gamma_4 = 1,$$

де

$$\delta^2 = \frac{g_{14}^2 g_{33} + g_{13}^2 g_{44} - 2g_{14} g_{13} g_{34}}{g_{11}(g_{33} g_{44} - g_{34}^2)}.$$

Відповідні власним значенням γ_j , $j = 1, 3, 4$, власні вектори $\mathbf{S}_j^\top = (S_{j1}, S_{j3}, S_{j4})^\top$ матимуть наступні властивості: якщо S_{k3} взяти дійсним, то у випадку $\delta^2 > 0$ значення S_{k1} буде чисто уявним, а S_{k4} – дійсним, $k = 1, 3$, і S_{k1}, S_{k4} будуть дійсними у випадку $\delta^2 < 0$. Крім того, $S_{41} = 0$ і,

незалежно від знаку δ^2 , S_{44} – дійсне, якщо S_{43} взяти дійсним. Відповідні вектори \mathbf{Y}_j матимуть такі властивості: Y_{k1} – дійсне, а Y_{k3} , Y_{k4} – чисто уявні, якщо $\delta^2 > 0$, і Y_{kj} , $k = 1, 3$, – комплексні при $\delta^2 < 0$, $Y_{41} = 0$ і, незалежно від знаку δ^2 , величини Y_{43} , Y_{44} – чисто уявні.

Отже, отримано три співвідношення

$$\mathbf{S}_j \mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0) = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1),$$

де

$$F_j(z) = \mathbf{Y}_j \mathbf{W}(z).$$

Як впливає з властивостей вектор-функції $\mathbf{W}(z)$, функції $F_j(z)$ є аналітичними в усій комплексній площині, за винятком області тріщини $[c, b]$. Беручи це до уваги, отримаємо для $x_1 \notin [c, b]$

$$F_j^+(x_1) = F_j^-(x_1) = F(x_1), \quad (1 + \gamma_j) F_j(x_1) = \mathbf{S}_j \mathbf{t}^{(1)}(x_1, 0), \quad x_1 \rightarrow \infty.$$

Враховуючи аналітичність функцій $F_j(z)$ усюди, за винятком області тріщини, і відсутність електричного та механічного навантажень на нескінченості для функцій $F_j(z)$, отримаємо, що

$$F_j(z) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty.$$

Числовий аналіз показує, що для однієї групи п'єзоелектричних матеріалів виконується умова $\delta^2 > 0$, а для іншої $\delta^2 < 0$. Надалі будемо розглядати матеріали, для яких $\delta^2 > 0$, з характерним для них виникненням осциляційної особливості біля вершини тріщини, отже, тоді необхідно застосувати контактну модель тріщини. Взевши $S_{j3} = 1$ і скориставшись виразами (18) і (23), отримаємо зображення для переміщень і напружень на інтерфейсі у вигляді

$$\begin{aligned} n_{j1}[u'_1(x_1, 0)] + i(n_{j3}[u'_3(x_1, 0)] + n_{j4}[\varphi'(x_1, 0)]) = \\ = F_j^+(x_1) - F_j^-(x_1), \quad j = 1, 3, 4, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{j4}D_3^{(1)}(x_1, 0) + i m_{j1}\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = \\ = F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1), \quad j = 1, 3, 4, \end{aligned} \quad (25)$$

де $m_{j4} = S_{j4}$, $m_{j1} = -iS_{j1}$, $n_{j1} = Y_{j1}$, $n_{j3} = -iY_{j3}$, $n_{j4} = -iY_{j4}$, причому n_{ij} , m_{ij} , $i, j = 1, 3, 4$, є дійсними коефіцієнтами.

Підставивши вирази (24), (25) у граничні умови (4)–(6), отримаємо задачі Діріхле – Рімана для функцій $F_j(z)$ при $j = 1, 3$:

$$F_j^+(x_1) + \gamma_j F_j^-(x_1) = (P_3 + i m_{j1}P_1)\delta(x_1 - d) + m_{j4}D\delta(x_1 - e), \quad x_1 \in (c, a),$$

$$\text{Im } F_j^\pm(x_1) = 0, \quad x_1 \in (a, b),$$

і задачу Гільберта при $j = 4$:

$$F_4^+(x_1) + F_4^-(x_1) = (P_3 + i m_{41}P_1)\delta(x_1 - d) + m_{44}D\delta(x_1 - e), \quad x_1 \in (c, a).$$

Шляхом аналітичних розрахунків доведено, що $m_{14} = m_{34}$, $m_{11} = -m_{31}$. Це дає змогу отримати розв'язок у випадку $j = 3$, якщо відомий розв'язок

для $j = 1$. На підставі цього розглянемо задачу Діріхле – Рімана тільки для функції $F_1(z)$:

$$F_1^+(x_1) + \gamma_1 F_1^-(x_1) = f_1(x_1), \quad x_1 \in (c, a), \quad (26)$$

$$\text{Im } F_1^\pm(x_1) = 0, \quad x_1 \in (a, b), \quad (27)$$

де $f_1(x_1) = (P_3 + i m_{11} P_1) \delta(x_1 - d) + m_{14} D \delta(x_1 - e)$.

Розв'язок задачі (26), (27), одержаний з використанням методики [5], має вигляд

$$F_1(z) = \frac{X_2(z)}{2\pi\sqrt{\gamma_1}} \left[\left(\Psi_1 + i\Psi_2 \frac{Y(z)}{Y(d)} \right) \frac{\sqrt{(d-c)(a-d)}}{d-z} + \left(\Psi_3 + i\Psi_4 \frac{Y(z)}{Y(e)} \right) \frac{\sqrt{(e-c)(a-e)}}{e-z} \right], \quad (32)$$

де

$$X_2(z) = \frac{1}{\sqrt{(z-c)(z-a)}} e^{i\varphi(z)},$$

$$\varphi(z) = 2\varepsilon_1 \ln \frac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{(b-c)(z-a)} + \sqrt{(a-c)(z-b)}}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \gamma_1,$$

$$\Psi_1 = P_3 \cos \varphi_1(d) + m_{11} P_1 \sin \varphi_1(d),$$

$$\Psi_2 = m_{11} P_1 \cos \varphi_1(d) - P_3 \sin \varphi_1(d),$$

$$\Psi_3 = m_{14} D \cos \varphi_1(e), \quad \Psi_4 = -m_{14} D \sin \varphi_1(e), \quad Y(z) = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}},$$

$$\varphi_1(x_1) = 2\varepsilon_1 \ln \frac{\sqrt{(b-a)(x_1-c)}}{\sqrt{(b-c)(a-x_1)} + \sqrt{(a-c)(b-x_1)}}.$$

Розв'язок задачі Гільберта отримано з використанням результатів Мусхелішвілі [4]:

$$F_4(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c^a \frac{f_4(t) dt}{X_0^+(t)(t-z)},$$

де $X_0(z) = [(z-c)(z-a)]^{-1/2}$, $f_4(t) = (P_3 + i m_{41} P_1) \delta(t-d) + m_{44} D \delta(t-e)$.

Обчисливши інтеграл, знаходимо

$$F_4(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \left[\frac{P_3 + i m_{41} P_1}{X_0^+(d)(d-z)} + \frac{m_{44} D}{X_0^+(e)(e-z)} \right]. \quad (33)$$

Отримані результати дають змогу визначити механічні напруження, електричну індукцію, стрибок похідних від переміщень і електричного потенціалу на інтерфейсі. Підставивши вирази (32), (33) у рівняння (24), (25) у випадку $j = 1, 4$, одержимо співвідношення

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = -\frac{(1 + \gamma_1) \exp(i\varphi(x_1))}{m_{11} \sqrt{(x_1-c)\gamma_1}} \frac{1}{2\pi} \left[\left(\Psi_1 \frac{\sqrt{d-c}}{x_1-d} + \Psi_3 \frac{\sqrt{e-c}}{x_1-e} \right) \sin \varphi(x_1) + \left(\Psi_2 \frac{\sqrt{(b-d)(d-c)}}{(x_1-d)\sqrt{x_1-b}} + \Psi_4 \frac{\sqrt{(e-d)(e-c)}}{(x_1-e)\sqrt{x_1-b}} \right) \cos \varphi(x_1) \right], \quad x_1 > b, \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{14}D_3^{(1)}(x_1, 0) &= \\
&= -\frac{1}{2\pi\sqrt{(x_1-c)(x_1-a)}\gamma_1} \left[\left(\Psi_1 \frac{\sqrt{(d-c)(b-d)}}{x_1-d} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \Psi_3 \frac{\sqrt{(e-c)(b-e)}}{x_1-e} \right) [\exp(\varphi_0(x_1)) + \gamma_1 \exp(-\varphi_0(x_1))] + \right. \\
&\quad \left. + \left(\Psi_2 \frac{\sqrt{(d-c)(b-d)}}{x_1-d} + \Psi_4 \frac{\sqrt{(e-c)(b-e)}}{x_1-e} \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times \sqrt{\frac{x_1-a}{b-x_1}} [\exp(\varphi_0(x_1)) - \gamma_1 \exp(-\varphi_0(x_1))] \right], \quad x_1 \in (a, b), \quad (35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{44}D_3^{(1)}(x_1, 0) &= -\sqrt{\frac{(d-c)(a-d)}{(x_1-c)(x_1-a)}} \frac{P_3}{\pi(x_1-d)} - \\
&\quad -\sqrt{\frac{(e-c)(a-e)}{(x_1-c)(x_1-a)}} \frac{m_{44}D}{\pi(x_1-e)}, \quad x_1 \in (a, b), \quad (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{13}[u'_3(x_1, 0)] + n_{14}[\varphi'(x_1, 0)] &= \\
&= \frac{\cosh(\pi\varepsilon_1)}{\pi\gamma_1\sqrt{(x_1-c)(a-x_1)}} \left[\left(\Psi_1 \cos \varphi_1(x_1) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \Psi_2 \sin \varphi_1(x_1) \frac{Y(x_1)}{Y(d)} \right) \frac{\sqrt{(d-c)(a-d)}}{x_1-d} + \left(\Psi_3 \cos \varphi_1(x_1) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \Psi_4 \sin \varphi_1(x_1) \frac{Y(x_1)}{Y(d)} \right) \frac{\sqrt{(e-c)(a-e)}}{x_1-e} \right], \quad x_1 \in (c, a), \quad (37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{43}[u'_3(x_1, 0)] + n_{44}[\varphi'(x_1, 0)] &= \frac{1}{\pi} \left[\sqrt{\frac{(d-c)(a-d)}{(x_1-c)(a-x_1)}} \frac{P_3}{x_1-d} + \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{(e-c)(a-e)}{(x_1-c)(a-x_1)}} \frac{m_{44}D}{x_1-e} \right], \quad x_1 \in (c, a), \quad (38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{11}[u'_1(x_1, 0)] &= -\frac{1}{\pi\sqrt{\gamma_1(x_1-c)(x_1-a)}} \left[\left(\cosh \varphi_0(x_1)\Psi_1 + \sinh \varphi_0(x_1) \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \Psi_2 \sqrt{\frac{(x_1-a)(b-d)}{(b-x_1)(a-d)}} \right) \frac{\sqrt{(d-c)(a-d)}}{x_1-d} + \left(\cosh \varphi_0(x_1)\Psi_3 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sinh \varphi_0(x_1)\Psi_4 \sqrt{\frac{(x_1-a)(b-e)}{(b-x_1)(a-e)}} \right) \frac{\sqrt{(e-c)(a-e)}}{x_1-e} \right], \quad x_1 \in (a, b), \quad (39)
\end{aligned}$$

де

$$\varphi_0(x_1) = 2\varepsilon_1 \arctan \sqrt{\frac{(a-c)(b-x_1)}{(b-c)(x_1-a)}}.$$

Введемо в розгляд коефіцієнти інтенсивності механічних напружень та електричної індукції таким чином:

$$k_1 = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x_1 - a)} \sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0),$$

$$k_4 = \lim_{x_1 \rightarrow a+0} \sqrt{2\pi(x_1 - a)} D_3^{(1)}(x_1, 0), \quad (40)$$

$$k_2 = \lim_{x_1 \rightarrow b+0} \sqrt{2\pi(x_1 - b)} \sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0). \quad (41)$$

Підставляючи формулу (34) у (41), одержуємо

$$k_2 = -\frac{1 + \gamma_1}{m_{11}\sqrt{2\pi\gamma_1}} \left(\sqrt{\frac{d-c}{(b-c)(b-d)}} \Psi_2 + \sqrt{\frac{e-c}{(b-c)(b-e)}} \Psi_4 \right).$$

Перейшовши у виразах (35), (36) до крайових значень і скориставшись означеннями (40), отримаємо систему для визначення коефіцієнтів k_1 і k_4 :

$$k_1 + m_{14}k_4 = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sqrt{\frac{d-c}{(a-c)(a-d)}} \Psi_1 + \sqrt{\frac{e-c}{(a-c)(a-e)}} \Psi_3 \right),$$

$$k_1 + m_{44}k_4 = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sqrt{\frac{d-c}{(a-c)(a-d)}} P_3 + \sqrt{\frac{e-c}{(a-c)(a-e)}} m_{44}D \right),$$

розв'язок якої має вигляд

$$k_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(m_{44} - m_{14})} \left(\sqrt{\frac{d-c}{(a-c)(a-d)}} (m_{14}P_3 - m_{44}\Psi_1) + \sqrt{\frac{e-c}{(a-c)(a-e)}} (m_{44}m_{14}D - m_{44}\Psi_3) \right),$$

$$k_4 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(m_{14} - m_{44})} \left(\sqrt{\frac{d-c}{(a-c)(a-d)}} (P_3 - \Psi_1) + \sqrt{\frac{e-c}{(a-c)(a-e)}} (m_{44}D - \Psi_3) \right).$$

Формули (37) і (38) з урахуванням двох останніх співвідношень дають можливість записати вирази для стрибка похідної від переміщень $[u'_3(x_1, 0)]$ і похідної від електричного потенціалу $[\varphi'(x_1, 0)]$ при $x_1 \rightarrow a - 0$ у такій формі:

$$[u'_3(x_1, 0)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi(a-x_1)}} (\Theta_{11}k_1 + \Theta_{14}k_4),$$

$$[\varphi'(x_1, 0)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi(a-x_1)}} (\Theta_{41}k_1 + \Theta_{44}k_4),$$

де

$$\Theta_{11} = \frac{1}{\Delta_n} \left(n_{44}\sqrt{\frac{\varpi}{\gamma_1}} - n_{14} \right), \quad \Theta_{14} = \frac{1}{\Delta_n} \left(m_{14}n_{44}\sqrt{\frac{\varpi}{\gamma_1}} - m_{44}n_{14} \right),$$

$$\Theta_{41} = \frac{1}{\Delta_n} \left(n_{13} - n_{43}\sqrt{\frac{\varpi}{\gamma_1}} \right), \quad \Theta_{44} = \frac{1}{\Delta_n} \left(m_{44}n_{13} - m_{14}n_{43}\sqrt{\frac{\varpi}{\gamma_1}} \right),$$

$$\Delta_n = n_{13}n_{44} - n_{43}n_{14}, \quad \varpi = \frac{1}{4\gamma_1} (1 + \gamma_1)^2.$$

Стрибок похідної від переміщень $[u'_1(x_1, 0)]$ безпосередньо в зоні контакту при $x_1 \rightarrow b - 0$ виразиться таким чином:

$$[u'_1(x_1, 0)] = -\frac{1}{\sqrt{2\pi(b-x_1)}} \Theta_{22} k_2,$$

$$\text{де } \Theta_{22} = -\frac{2m_{11}}{n_{11}(1+\gamma_1)}.$$

Введемо в розгляд швидкість вивільнення енергії у точках a і b відповідно:

$$G_1^c = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_a^{a+\Delta l} (\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0)[u_3(x_1 - \Delta l, 0)] + D_3^{(1)}(x_1, 0)[\varphi(x_1 - \Delta l, 0)]) dx_1,$$

$$G_2^c = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta l} \int_b^{b+\Delta l} \sigma_{31}^{(1)}(x_1, 0)[u_1(x_1 - \Delta l, 0)] dx_1.$$

Використавши співвідношення (34)–(39), отримаємо такі вирази для швидкостей вивільнення енергії:

$$G_1^c = [\Theta_{11}k_1^2 + \Theta_{44}k_4^2 + (\Theta_{14} + \Theta_{41})k_1k_4]/4,$$

$$G_2^c = \Theta_{22}k_2^2/4.$$

Відповідно загальна швидкість вивільнення енергії визначиться як

$$G^c = G_1^c + G_2^c = [\Theta_{11}k_1^2 + \Theta_{22}k_2^2 + \Theta_{44}k_4^2 + (\Theta_{14} + \Theta_{41})k_1k_4]/4.$$

Отримані вище результати справедливі для довільного положення точки a . Така модель тріщини носить назву моделі зі штучною зоною контакту (заданою заздалегідь), але в дійсності зона контакту не є відома і її потрібно визначати. Для випадку тріщини між двома ізотропними матеріалами така зона контакту вперше знайдена у роботі [9].

Визначення довжини зони контакту. Введемо в розгляд відносну довжину зони контакту $\lambda = (b-a)/(b-c)$. Для визначення реального значення цього параметра необхідно вимагати виконання таких умов:

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) \leq 0, \quad x_1 \in (a, b), \quad (42)$$

$$[u_3(x_1, 0)] \geq 0, \quad x_1 \in (c, a). \quad (43)$$

Чисельно-аналітичний аналіз показує, що обидві ці умови виконуються, якщо a вибрати з проміжку $[a_1, a_2]$, де $a_1 = b - \lambda_1(b-c)$, $a_2 = b - \lambda_2(b-c)$, причому λ_1 є максимальним з проміжку $(0, 1)$ коренем рівняння

$$k_1 = 0,$$

а λ_2 є максимальним з $(0, 1)$ коренем рівняння

$$\sqrt{a-x_1} [u'_3(x_1, 0)] = 0 \quad \text{або} \quad \Theta_{11}k_1 + \Theta_{14}k_4 = 0.$$

Отримані рівняння розв'язуються чисельно, але при досить малих λ справджуються асимптотичні формули

$$\tilde{\lambda}_1 = \exp \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \left(-\arcsin \left(\frac{\Delta y}{\Delta_{pd}} \right) + (-1)^n \arcsin \left(\frac{m_{14}}{\Delta_{pd} m_{44}} (\Theta_1 m_{44} D + P_3) \right) + \pi n \right) \right],$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \exp \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \left(-\arcsin \left(\frac{\Delta y}{\Delta_{pd}} \right) + (-1)^n \arcsin \left(\frac{\Theta_{11} m_{14} - \Theta_{14}}{\Delta_{pd} m_{44} (m_{44} \Theta_{11} - \Theta_{14})} (\Theta_1 m_{44} D + P_3) \right) + \pi n \right) \right],$$

Вирази для стрибків похідних від переміщень і напружень на інтерфейсі переписуться в такій формі:

$$n_{43}[u'_3(x_1, 0)] + n_{44}[\varphi'(x_1, 0)] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{P_3}{x_1 + d_1} \sqrt{\frac{d_1 - r}{-x_1 - r}} + \frac{m_{44}D}{x_1 + e_1} \sqrt{\frac{e_1 - r}{-x_1 - r}} \right],$$

$$x_1 \in (-d_1, -r),$$

$$n_{13}[u'_3(x_1, 0)] + n_{14}[\varphi'(x_1, 0)] = \frac{\cosh(\pi\varepsilon_1)}{\pi\gamma_1\sqrt{(-x_1 - r)}} \left[\left(\Psi_1^\infty \cos \varphi_1^\infty(x_1) - \right. \right.$$

$$\left. - \Psi_2^\infty \sin \varphi_1^\infty(x_1) \sqrt{\frac{(x_1 + r)d_1}{(d_1 - r)x_1}} \right) \frac{\sqrt{d_1 - r}}{x_1 + d_1} + \left(\Psi_3^\infty \cos \varphi_1^\infty(x_1) - \right.$$

$$\left. - \Psi_4^\infty \sin \varphi_1^\infty(x_1) \sqrt{\frac{(x_1 + r)e_1}{(e_1 - r)x_1}} \right) \frac{\sqrt{e_1 - r}}{x_1 + e_1} \right], \quad x_1 \in (-d_1, -r),$$

$$n_{11}[u'_1(x_1, 0)] = -\frac{1}{\pi\sqrt{\gamma_1(x_1 + r)}} \left[\left(\cosh \varphi_0^\infty(x_1) \Psi_1^\infty + \sinh \varphi_0^\infty(x_1) \times \right. \right.$$

$$\left. \times \Psi_2^\infty \sqrt{\frac{(x_1 + r)d_1}{x_1(r - d_1)}} \right) \frac{\sqrt{d_1 - r}}{x_1 + d_1} + \left(\Psi_3^\infty \cosh \varphi_0^\infty(x_1) + \right.$$

$$\left. + \Psi_4^\infty \sinh \varphi_0^\infty(x_1) \sqrt{\frac{(x_1 + r)e_1}{x_1(r - e_1)}} \right) \frac{\sqrt{d_1 - r}}{x_1 + e_1} \right], \quad x_1 \in (-r, 0),$$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{14}D_3^{(1)}(x_1, 0) = -\frac{1}{\sqrt{(x_1 + r)\gamma_1} 2\pi} \left[\left(\Psi_1^\infty \frac{\sqrt{d_1}}{x_1 + d_1} + \Psi_3^\infty \frac{\sqrt{e_1}}{x_1 + e_1} \right) \times \right.$$

$$\left. \times [\exp(\varphi_0^\infty(x_1)) + \gamma_1 \exp(-\varphi_0^\infty(x_1))] + \left(\Psi_2^\infty \frac{\sqrt{d_1}}{x_1 + d_1} + \Psi_4^\infty \frac{\sqrt{e_1}}{x_1 + e_1} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \sqrt{\frac{x_1 + r}{-x_1}} [\exp(\varphi_0^\infty(x_1)) - \gamma_1 \exp(-\varphi_0^\infty(x_1))] \right], \quad x_1 \in (-r, 0),$$

$$\sigma_{33}^{(1)}(x_1, 0) + m_{44}D_3^{(1)}(x_1, 0) = -\sqrt{\frac{d_1 - r}{x_1 + r}} \frac{P_3}{\pi(x_1 + d_1)} - \sqrt{\frac{e_1 - r}{x_1 + r}} \frac{m_{44}D}{\pi(x_1 + e_1)},$$

$$x_1 \in (-r, 0),$$

$$\sigma_{13}^{(1)}(x_1, 0) = -\frac{(1 + \gamma_1) \exp(i\varphi_0^\infty(x_1))}{m_{11}\sqrt{\gamma_1} 2\pi} \left[\left(\frac{\Psi_1^\infty}{x_1 - d} + \frac{\Psi_3^\infty}{x_1 - e} \right) \sin \varphi_0^\infty(x_1) + \right.$$

$$\left. + \left(\Psi_2^\infty \frac{\sqrt{d_1}}{(x_1 + d_1)\sqrt{x_1}} + \Psi_4^\infty \frac{\sqrt{e_1}}{(x_1 + e_1)\sqrt{x_1}} \right) \cos \varphi_0^\infty(x_1) \right], \quad x_1 > 0,$$

де

$$\varphi_0^\infty(x_1) = 2\varepsilon_1 \arctg \sqrt{-\frac{x_1}{r + x_1}}.$$

Коефіцієнти інтенсивності напружень і електричної індукції також можуть бути отримані шляхом граничного переходу при $s \rightarrow -\infty$ і мають вигляд

$$k_2^\infty = -\frac{1 + \gamma_1}{m_{11}\sqrt{2\pi\gamma_1}} \left(\Psi_2^\infty \frac{1}{\sqrt{d_1}} + \Psi_4^\infty \frac{1}{\sqrt{e_1}} \right),$$

$$k_1^\infty = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(m_{44} - m_{14})} \left(\frac{m_{14}P_3 - m_{44}\Psi_1^\infty}{\sqrt{d_1 - r}} + \frac{m_{44}m_{14}D - m_{44}\Psi_3^\infty}{\sqrt{e_1 - r}} \right),$$

$$k_4^\infty = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(m_{14} - m_{44})} \left(\frac{P_3 - \Psi_1^\infty}{\sqrt{d_1 - r}} + \frac{m_{44}D - \Psi_3^\infty}{\sqrt{e_1 - r}} \right).$$

Швидкість вивільнення енергії G^c може бути отримана з відповідної формули для тріщини скінченної довжини відповідною заміною коефіцієнтів інтенсивності напружень.

У випадку тріщини напівнескінченної довжини відносна довжина зони контакту $\alpha^\infty = r/d_1$ визначається з умов, аналогічних до (42), (43), і справджуються аналогічні асимптотичні співвідношення:

$$\tilde{\alpha}_1^\infty = \exp \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \left(-\arcsin \frac{\Delta_y^\infty}{\Delta_{pd}^\infty} + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^n \arcsin \frac{m_{14}(\Theta_1^\infty m_{44}D + P_3)}{\Delta_{pd}^\infty m_{44}} + \pi n \right) \right],$$

$$\tilde{\alpha}_2^\infty = \exp \left[\frac{1}{\varepsilon_1} \left(-\arcsin \frac{\Delta_y^\infty}{\Delta_{pd}^\infty} + \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^n \arcsin \frac{(\Theta_{11} m_{14} - \Theta_{14})(\Theta_1^\infty m_{44}D + P_3)}{\Delta_{pd}^\infty m_{44}(m_{44}\Theta_{11} - \Theta_{14})} + \pi n \right) \right],$$

де

$$\Delta_x^\infty = m_{11}P_1 \cos U^\infty + \Theta_1^\infty m_{14}D \sin V^\infty + P_3 \sin U^\infty,$$

$$\Delta_y^\infty = \Theta_1^\infty m_{14}D \cos V^\infty + P_3 \cos U^\infty - m_{11}P_1 \sin U^\infty,$$

$$\Theta_1 = \frac{1}{\sqrt{\Theta^\infty}}, \quad \Theta^\infty = \frac{e_1}{d_1}, \quad U = \varepsilon_1 \ln 4, \quad V = \varepsilon_1 \ln 4\Theta^\infty, \quad \Delta_{pd}^\infty = \sqrt{(\Delta_x^\infty)^2 + (\Delta_y^\infty)^2},$$

необхідні значення n вибираються з тієї ж умови, що й для тріщини скінченної довжини.

Аналіз отриманих чисельних результатів. Для апробації отриманих аналітичних розв'язків було розглянуто рухому міжфазну тріщину в п'єзоелектричному біматеріальному просторі що складається з двох п'єзоелектричних керамік: PZT – 4 і PZT – 5 [2]. Аналіз проведено для таких значень механічних і геометричних параметрів: $P_1 = 0$, $P_3 = -2000$ Н/м, $\theta = \vartheta = 0.15$, $e_1/d_1 = 1$. Увагу було зосереджено на вивченні впливу електричного навантаження і швидкості розповсюдження тріщини на швидкість вивільнення енергії G^c і величину відносної довжини зони контакту $\alpha = \lambda/\theta$ (α^∞) для тріщини скінченної (напівнескінченної) довжини.

На рис. 3 наведено залежність α_1 (суцільною лінією) і α_2 (пунктирною лінією) від швидкості руху тріщини $v \in (0; 1930$ м/с) у логарифмічній шкалі для двох значень електричної індукції $D = -6 \cdot 10^{-7}$, $-50 \cdot 10^{-7}$ Ф·В/м². Зони контакту α_1^∞ і α_2^∞ настільки близькі відповідно до α_1 і α_2 , що їх графіки візуально співпадають.

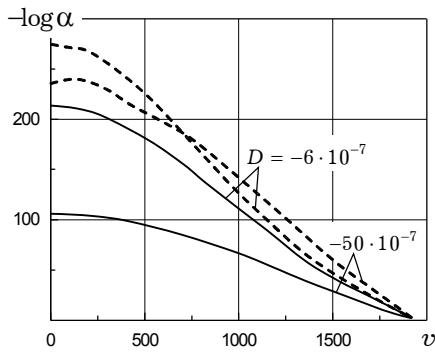


Рис. 3

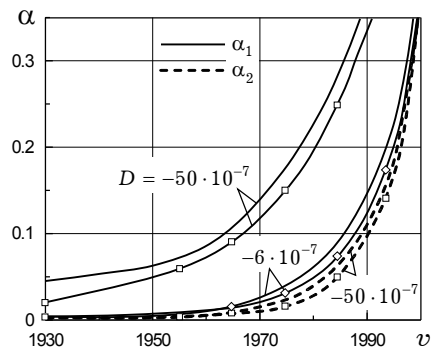


Рис. 4

На рис. 4 проілюстровано зміну відповідних зон контакту при безпосередньому наближенні швидкості v до критичної швидкості (в даному випадку швидкості хвиль Гуляєва – Блюстейна), $c_1 = 2001.8702$ м/с.

Для меншого значення електричного навантаження зони контакту α_2 і α_2^∞ майже співпадають відповідно з α_1 і α_1^∞ , але для другого випадку різниця досить суттєва (порожні маркери відповідають тріщині напівнескінченної довжини). Як бачимо, суттєве зростання зон контакту виникає при наближенні до критичної швидкості c_1 і при $v \rightarrow c_1$ всі зони α_1 , α_2 , α_1^∞ , $\alpha_2^\infty \rightarrow 1$. Слід відмітити, що значення електричної індукції D були взяті не випадково: як показано в роботі [11], вони повинні задовольняти умову існування контактної моделі $D \leq -P_3/m_{44}$.

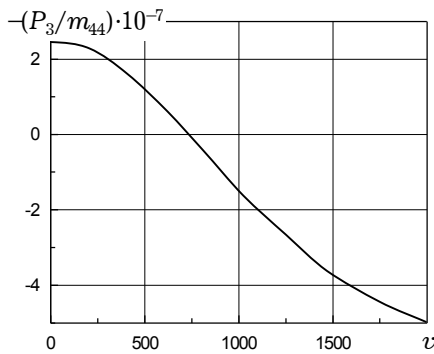


Рис. 5

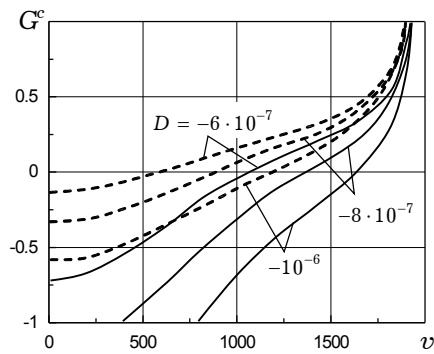


Рис. 6

Графік зміни величини $-P_3/m_{44}$ з ростом v наведено на рис. 5. Залежність швидкості вивільнення енергії G^c для тріщин скінченної довжини (суцільна лінія) і напівнескінченної довжини (пунктирна лінія) зображено на рис. 6 як функцію від відповідних зон контакту α_1 і α_1^∞ . Відмітимо, що зменшення G^c обумовлено зменшенням (збільшенням за модулем) електричної індукції, що добре проілюстровано графіком.

1. Гольдштейн Р. В. О стационарном движении трещины по прямолинейной границе соединения двух упругих материалов // Механика твердого тела. – 1966. – № 5. – С. 93–102.
2. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5.)
3. Комаров О. В., Лобода В. В. Рух міжфазної тріщини в ортотропному біматеріальному просторі з урахуванням контакту її берегів // Машинознавство. – 2004. – 84, № 4. – С. 3–9.

4. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1954. – 647 с.
5. Нахмейн Е. Л., Нуллер Б. М. Контакт упругой полуплоскости с частично отслоившимся штампом // Прикл. математика и механика. – 1986. – **50**, № 4. – С. 663–673.
6. Разрушение. – Москва: Мир, 1975. – 764 с. – Т. 2.
7. Симонов И. В. Динамика трещины отрыва-сдвига на границе раздела двух упругих материалов // Докл. АН СССР. – 1983. – **271**, № 1. – С. 65–68.
8. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
9. Cotrinou M. The interface crack // J. Appl. Mech. – 1977. – **44**. – P. 631–636.
10. Herrmann K. P., Loboda V. V. Fracture-mechanical assessment of electrically permeable interface cracks in piezoelectric bimetals by consideration of various contact zone models // Arch. Appl. Mech. – 2000. – **70**. – P. 127–143.
11. Herrmann K. P., Loboda V. V., Govorukha V. B. On contact zone models for an electrically impermeable interface crack in a piezoelectric bimaterial // Int. J. Fract. – 2000. – **111**. – P. 127–143.
12. Suo Z., Kuo C.-M., Barnett D. M., Willis J. R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics // J. Mech. Phys. Solids. – 1992. – **40**, № 4. – P. 739–765.
13. Yang W., Suo Z., Shih C.F. Mechanics of dynamic debonding // Proc. Roy. Soc. Lond. A. – 1991. – **433**. – P. 679–697.
14. Yoffe E. The moving Griffith crack // Phil. Mag. – 1951. – **42**. – P. 739–750.

ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОИЗОЛИРОВАННОЙ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ С ДОКРИТИЧЕСКОЙ СКОРОСТЬЮ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ БИМАТЕРИАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В работе рассмотрено движение электроизолированной трещины по границе раздела материалов в пространстве, которое состоит из двух различных пьезоэлектрических полупространств. Левая вершина трещины считается открытой, в то время как возле правой вершины есть зона контакта, трение между берегами которой считается отсутствующим. Трещина движется с установившейся скоростью вместе с приложенными к берегам сосредоточенными электрической и механической нагрузками. В процессе решения получены трансцендентные уравнения для определения зон контакта, которые решены численно, а также выражения для коэффициентов интенсивности напряжений и электрической индукции. Особое внимание уделено скорости освобождения энергии в окрестности правой вершины трещины. Проведен сравнительный анализ для трещины конечной длины и полубесконечной трещины.

ON MOVING IMPERMEABLE INTERFACE CRACK WITH CONSTANT SUBSONIC VELOCITY IN PIEZOELECTRIC BIMATERIAL

A problem for an impermeable crack moving along the interface of two dissimilar piezoelectric materials is considered. A mechanically frictionless and electrically permeable contact zone is assumed at the right crack tip whilst another part of the crack is open. The crack moves with constant velocity together with concentrated loading and electrical charge, which are prescribed at the crack faces. The transcendental equation for determination of the real contact zone length is solved numerically, and both stress and electrical displacement intensity factors are derived. Special attention is devoted to the problem of the energy release rate at the right crack tip. A comparative analysis is given for a finite length crack and for a semi-infinite crack.

Дніпропетр. нац. ун-т, Дніпропетровськ

Одержано
14.11.05