

ВЗАЄМОДІЯ ДВОХ ТІЛ ЗА НАЯВНОСТІ КАПІЛЯРІВ У МІЖКОНТАКТНОМУ ЗАЗОРІ

Змодельовано взаємодію пружних півпросторів за наявності в міжконтактному зазорі, зумовленому виїмкою на поверхні одного з тіл, нестисливої рідини, що утворює меніски на краях зазору, та дії тиску газу в середній його частині. При формулюванні контактної задачі для такої структури враховано поверхневий натяг рідини, стрибок тисків на межі рідини й газу, трансформацію зазору і зміну довжини капілярів під час навантаження. Розв'язок задачі подано через функцію висоти зазору, а для її визначення отримано сингулярне інтегральне рівняння, яке розв'язано аналітично. З умови обмеженості розв'язку цього інтегрального рівняння і з умови збереження кількості рідини в капілярах отримано систему трансцендентних рівнянь для визначення довжин зазору та капілярів. На графіках проілюстровано залежність довжини та форми зазору від навантаження, залежність перепаду тисків у капілярі та в газі від довжини зазору.

Вступ. Тонкі шари води, конденсуючись чи адсорбуючись на поверхні тіл з атмосфери, покривають їх тонкою плівкою. Під час контактної взаємодії тіл волога переміщується у більш вузькі місця міжконтактних зазорів, де утворюються капіляри.

Вплив капілярів на взаємодію тіл з неузгодженими поверхнями, для яких властивий локальний контакт, вивчали І. Г. Горячева, Ю. Ю. Маховська [2, 3], С. А. Чижик [12], О. Г. Чекіна [11], Jie Zheng, J. L. Stretor [16]. Takahisa Kato, Souta Watanabe, Hiroshige Mutsuoka [13, 14] досліджували вплив капілярів на переміщення головки в записуючих пристроях, зокрема в так званих headslider/disk interface (HDI) системах жорстких дисків (HDD). С. Pailler-Mattei, Н. Zahouani вивчали адгезійні властивості шкіри при контакті з жорстким індензором з урахуванням рідинних менісків [15]. Результати цих праць вказують, що вплив капілярів на контактну поведінку тіл зростає зі зменшенням розмірів тіл.

Для геомеханіки, трибології, біомеханіки значний практичний інтерес має взаємодія тіл з узгодженими або локально неузгодженими поверхнями, для яких характерна локальна відсутність контакту. У цьому разі заповнювач міжповерхневих зазорів особливо істотно впливає на контакт, оскільки стає активним чинником системи, дія якого на тіла змінюється разом із зовнішнім навантаженням. Раніше вивчено вплив на взаємодію тіл часткового заповнення нестисливою рідиною виїмок на поверхні одного з них [6, 7], досліджено взаємодію тіл за наявності ідеального [5] та реального [4] газу в тунельному міжконтактному зазорі. Розглянуто плоску і осесиметричну контактні задачі для пружного півпростору і жорсткої основи з виїмкою, заповненою стисливою баротропною рідиною [8, 9].

При частковому заповненні просвітів між узгодженими поверхнями рідиною, яка змочує поверхні, на краях зазорів утворюються капіляри. Проте вплив капілярів на контактну поведінку структур з узгодженими поверхнями ще не вивчався.

Нижче досліджується взаємодія двох тіл під дією зовнішнього стискаючого навантаження за наявності в міжконтактному зазорі рідини, яка утворює капіляри на краях зазору, та дії тиску газу в середній його частині.

Постановка задачі. Розглянемо два пружні півпростори, один з яких має плоску межу. Межа іншого – плоска скрізь, за винятком нескінченної смуги ширини $2c$, де вона має тунельну симетричну поверхневу виїмку, форми якої описується функцією $r(x)$ (рис. 1). Вважаємо, що виїмка є мілкою ($r(x) \ll c$) пологою ($r'(x) \ll 1$) і в крайніх точках плавно переходить у

площину ($r(\pm c) = 0$, $r'(\pm c) = 0$). Тіла притискаються один до одного зовнішнім тиском на нескінченності $\sigma_y = -P^\infty$. Вважаємо, що півпростори контактують, перебуваючи в умовах плоскої деформації. Тому розглянемо взаємодію двох півплощин D_1 і D_2 , утворених перетином півпросторів площиною, перпендикулярною до твірної поверхневої виїмки (рис. 2). Внаслідок виїмки безпосередній механічний контакт тіл неповний і між ними утворюється зазор завдовжки $2b$. На краях міжконтактного зазору конденсується чи адсорбується рідина, яка утворює два симетричні капіляри (рис. 2). Вважа-

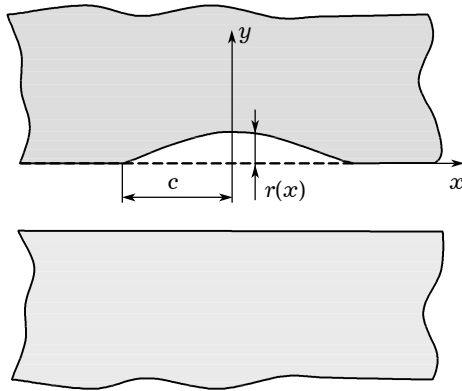


Рис. 1

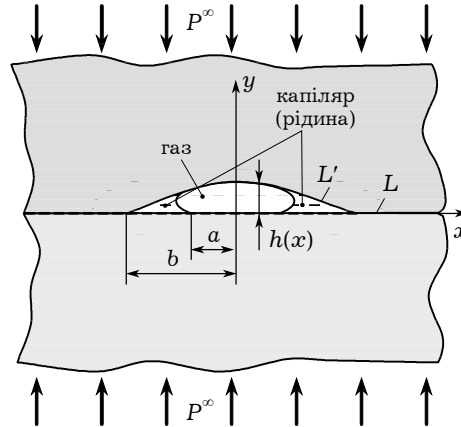


Рис. 2

мо, що вона нестиглива та повністю змочує поверхні тіл, тобто крайовий кут $\theta = 0^\circ$ [1]. Об'єм рідини V_0 незмінний. На межах менісків діє поверхневий натяг σ . У середній частині зазору завдовжки $2a$ між капілярами перебуває газ під тиском P_1 . У процесі навантаження змінюється форма зазору, тобто його довжина і висота $h(x)$, та довжина капілярів. Тиск газу вважаємо сталим ($P_1 = \text{const}$). Оскільки виїмка є мілкою та пологою, такі ж властивості матиме й зазор ($h(x) \ll b$, $h'(x) \ll 1$, $h(\pm b) = 0$). Як відомо з механіки рідин і газів [1], перепад тисків ΔP в капілярі та газі визначається формулою Лапласа $\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$, де R_1 , R_2 – радіуси кривизни поверхні меніска. У випадку циліндричної поверхні меніска один з її радіусів кривизни $R_2 = \infty$ і формула Лапласа набуде вигляду $\Delta P = \sigma/R_1$. Оскільки зазор змінюється плавно й рідина повністю змочує поверхні, можемо вважати, що бокова поверхня меніска є півциліндром, діаметр якого дорівнює висоті зазору в точках $x = \pm a$ виходу меніска на межу тіл ($2R_1 = h(a)$). Тоді з формули Лапласа випливає такий взаємозв'язок між тиском рідини P_2 , тиском газу P_1 , поверхневим натягом σ і висотою меніска $h(a)$ в точках його контакту з границею тіл:

$$P_1 - P_2 = \frac{2\sigma}{h(a)}. \quad (1)$$

Згідно з законом Паскаля тиск P_1 у всьому об'ємі капілярів однаковий і передається на поверхні тіл на ділянках $a < |x| < b$. При квазістатичному навантаженні дотичні зусилля в рідині не виникають.

В праці [3] обґрунтовано, що горизонтальна складова розподілених зусиль, які діють на межу тіл у точці $x = \pm a$ з боку поверхневої плівки меніска, є значно меншою, ніж інтегральний тиск з боку рідини на поверхні

тіл. Тому нею будемо нехтувати. Вважаємо, що на ділянках безпосереднього контакту поверхонь $|x| \geq b$ сили тертя не виникають.

Отже, граничні умови контактної задачі мають вигляд

– на ділянках контакту L :

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^-, \quad \tau_{xy}^- = \tau_{xy}^+ = 0, \quad (2)$$

$$v^+ = v^- - r(x), \quad |x| \in [b, c], \quad v^+ = v^-, \quad |x| > c; \quad (3)$$

– на ділянці міжконтактного зазору L' :

на ділянці дії газу $|x| < a$:

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^- = -P_1, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0, \quad (4)$$

на ділянці капілярів $a < |x| < b$:

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^- = -P_2, \quad \tau_{xy}^+ = \tau_{xy}^- = 0; \quad (5)$$

– на нескінченності:

$$\sigma_y = -P^\infty, \quad \sigma_x = 0, \quad \tau_{xy} = 0. \quad (6)$$

Тут σ_x , σ_y , τ_{xy} – компоненти тензора напружень; v – складова вектора переміщення уздовж осі Oy ; індексами «+», «-» позначено граничні значення функції при прямуванні точки до осі Ox у верхній і нижній півплощині ($y \rightarrow \pm 0$).

Умова збереження кількості рідини в капілярах з урахуванням її нестисливості має вигляд

$$\int_a^b h(x) dx - \frac{(h(a))^2}{8} \pi = \text{const} = \frac{1}{2} V_0. \quad (7)$$

Розв'язання задачі. Згідно з методом комплексних потенціалів [10] напруження і переміщення у контактуючих півплощинах D_k , $k = 1, 2$, подамо у вигляді [6]

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi_k(z) - \Phi_k(\bar{z}) + (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} - P^\infty, \quad z \in D_k, \quad (8)$$

$$2G_k(u' + iv') = \alpha_k \Phi_k(z) + \Phi_k(\bar{z}) - (z - \bar{z}) \overline{\Phi_k'(z)} + \frac{3 - \alpha_k}{4} P^\infty, \quad z \in D_k, \quad (9)$$

де $\Phi_k(z)$, $k = 1, 2$, – голоморфні в D_k і загасаючі на нескінченності функції; $G_k = \frac{E_k}{2(1 + \nu_k)}$; $\alpha_k = 3 - 4\nu_k$; G_k , E_k , ν_k – модуль зсуву, модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу півплощини D_k , $k = 1, 2$. Подання (8), (9) задовольняють умови на нескінченності (6).

Сформульована контактна задача має змішані крайові умови на лінії $L \cup L'$. Для її розв'язання розглянемо спочатку задачу з такими однотипними на всій межі умовами контакту:

$$\sigma_y^- = \sigma_y^+, \quad (10)$$

$$v'^- - v'^+ = g(x), \quad (11)$$

$$\tau_{xy}^- = \tau_{xy}^+ = 0, \quad (12)$$

де $g(x)$ – похідна стрибка нормальних переміщень границь півплощин (невідома заздалегідь функція).

Виходячи зі співвідношень (8), (9), запишемо граничні значення напружень і похідних від переміщень у півплощинах на лінії L' :

$$\begin{aligned}\sigma_y^+ - i\tau_{xy}^+ &= \Phi_2^+(x) - \Phi_2^-(x) - P^\infty, \\ 2G_2[u'^+ + iv'^+] &= \alpha_2\Phi_2^+(x) + \Phi_2^-(x) + \frac{3 - \alpha_2}{4}P^\infty, \\ \sigma_y^- - i\tau_{xy}^- &= \Phi_1^-(x) - \Phi_1^+(x) - P^\infty, \\ 2G_1[u'^- + iv'^-] &= \alpha_1\Phi_1^-(x) + \Phi_1^+(x) + \frac{3 - \alpha_1}{4}P^\infty.\end{aligned}\quad (13)$$

Використовуючи співвідношення (3), задовольнимо умови (10), (12). В результаті одержимо три задачі спряження граничних значень лінійних комбінацій функцій $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, $\bar{\Phi}_1(z) = \overline{\Phi_1(\bar{z})}$, $\bar{\Phi}_2(z) = \overline{\Phi_2(\bar{z})}$:

$$\begin{aligned}[\Phi_2(x) + \Phi_1(x)]^+ - [\Phi_2(x) + \Phi_1(x)]^- &= 0, \quad x \in L', \\ [\Phi_2(x) + \bar{\Phi}_2(x)]^+ + [\Phi_2(x) + \bar{\Phi}_2(x)]^- &= 0, \quad x \in L', \\ [\Phi_1(x) + \bar{\Phi}_1(x)]^+ + [\Phi_1(x) + \bar{\Phi}_1(x)]^- &= 0, \quad x \in L',\end{aligned}$$

розв'язавши які отримаємо такі залежності між функціями $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, $\bar{\Phi}_1(z)$, $\bar{\Phi}_2(z)$:

$$\Phi_2(z) = -\Phi_1(z), \quad z \in D_1 \cup D_2, \quad (14)$$

$$\bar{\Phi}_1(z) = -\Phi_1(z), \quad \bar{\Phi}_2(z) = -\Phi_2(z), \quad z \in D_1 \cup D_2. \quad (15)$$

Задовольнивши умову (11) з використанням співвідношень (13) і (15), одержимо задачу лінійного спряження

$$\Phi_1^-(x) + \Phi_1^+(x) = \frac{2ig(x)}{K}, \quad x \in L', \quad (16)$$

де $K = K_1 + K_2$, $K_1 = \frac{1 + \alpha_1}{2G_1}$, $K_2 = \frac{1 + \alpha_2}{2G_2}$.

Розв'язавши задачу (16), визначимо комплексний потенціал $\Phi_1(z)$ у кожній із півплощин через стрибок нормальних переміщень $g(x)$ між ними:

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) &= \frac{1}{\pi K} \int_{L'} \frac{g(t)}{t - z} dt, \quad z \in D_1, \\ \Phi_1(z) &= -\frac{1}{\pi K} \int_{L'} \frac{g(t)}{t - z} dt, \quad z \in D_2.\end{aligned}\quad (17)$$

З порівняння умов (11) і (3) випливає, що функція $g(x)$ відома на ділянках контакту тіл:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & |x| > c, \\ r'(x), & b < |x| < c. \end{cases} \quad (18)$$

На ділянці відсутності контакту функцію $g(x)$ можна подати через висоту виїмки $r(x)$ і висоту міжконтактного зазору $h(x)$ у вигляді

$$g(x) = r'(x) - h'(x). \quad (19)$$

Врахувавши подання (19) у залежностях (14), (17), отримаємо

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) &= \frac{1}{\pi K} \int_{L'} \frac{r'(t)}{t-z} dt - \frac{1}{\pi K} \int_{L'} \frac{h'(t)}{t-z} dt, & z \in D_1, \\ \Phi_1(z) &= -\frac{1}{\pi K} \int_{L'} \frac{r'(t)}{t-z} dt + \frac{1}{\pi K} \int_{L'} \frac{h'(t)}{t-z} dt, & z \in D_2, \\ \Phi_2(z) &= -\frac{1}{\pi K} \int_{L'} \frac{r'(t)}{t-z} dt + \frac{1}{\pi K} \int_{L'} \frac{h'(t)}{t-z} dt, & z \in D_1, \\ \Phi_2(z) &= \frac{1}{\pi K} \int_{L'} \frac{r'(t)}{t-z} dt - \frac{1}{\pi K} \int_{L'} \frac{h'(t)}{t-z} dt, & z \in D_2.\end{aligned}\quad (20)$$

Отже, подання (8), (9), (20) визначають напружено-деформований стан півплощин, що контактують, через зовнішнє навантаження, форму виїмки та невідому функцію висоти міжконтактного зазору $h(x)$. Вони задовольняють усі умови задачі (2)–(6), за винятком двох перших з умов (4), (5):

$$\begin{aligned}\sigma_y^+ &= -P_1, & |x| < a, \\ \sigma_y^+ &= -P_2, & a < |x| < b.\end{aligned}$$

Задовольнивши ці умови, отримаємо сингулярне інтегральне рівняння (СІР) відносно висоти зазору $h(x)$

$$-\frac{2}{\pi} \int_{L'} \frac{h'(t)}{t-x} dt = \frac{2}{\pi} \int_{-c}^c \frac{r'(t)}{t-x} dt + K(P^\infty - P(x)), \quad (21)$$

де

$$P(x) = \begin{cases} P_1, & |x| < a, \\ P_1 - \frac{2\sigma}{h(a)}, & a < |x| < b. \end{cases}$$

Щоб розв'язати рівняння (21), конкретизуємо форму початкової виїмки. Розглянемо виїмку з обрисом $r(x) = A \left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right)^{3/2}$, де A – максимальна

висота виїмки. Тоді $\int_{-c}^c \frac{r'(t)dt}{t-x} = \frac{3A}{c} \left(\frac{x^2}{c^2} - \frac{1}{2}\right)$ і рівняння (21) набуває вигляду

$$-\frac{2}{\pi} \int_{L'} \frac{h'(t)}{t-x} dt = \frac{3A}{c} \left(\frac{x^2}{c^2} - \frac{1}{2}\right) + K(P^\infty - P(x)). \quad (22)$$

Згідно з теорією сингулярних інтегральних рівнянь [10] рівняння з ядром Коші може мати: **а)** необмежений на двох кінцях відрізка інтегрування розв'язок, **б)** обмежений на одному і необмежений на іншому кінці розв'язок, **в)** розв'язок, обмежений на двох кінцях. Вибір розв'язку СІР у нашому випадку диктується фізичними міркуваннями. Оскільки виїмка є гладкою і без кутових точок, то контактні напруження повинні бути обмежені. З подань (8), (9), (20), враховуючи поведінку інтегралу типу Коші в околі кінців відрізка інтегрування, впливає, що контактні напруження будуть обмежені лише тоді, коли функція $h'(x)$ дорівнює нулеві при $x = \pm b$. Тому шукаємо обмежений розв'язок рівняння (22), який має вигляд

$$\begin{aligned}h'(x) &= -\frac{K\sqrt{x^2-b^2}}{2\pi} \left(\int_{L'} \frac{P^\infty - P(t)}{(t-x)\sqrt{t^2-b^2}} dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{L'} \left(\frac{t^2}{c^2} - \frac{1}{2}\right) \frac{3A}{c(t-x)\sqrt{t^2-b^2}} dt \right),\end{aligned}\quad (23)$$

звідки, обчисливши інтеграли, отримаємо

$$h'(x) = \frac{K\sigma}{2\pi h(a)} (\Gamma(b, x, -a) - \Gamma(b, x, a)) - \frac{3A}{c^3} x \sqrt{b^2 - x^2}, \quad (24)$$

де

$$\Gamma(a, x, t) = \ln \frac{a^2 - tx + \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - t^2)}}{a^2 - tx - \sqrt{(a^2 - x^2)(a^2 - t^2)}}.$$

Інтегруючи функцію $h'(x)$ з урахуванням умови $h(\pm b) = 0$, визначимо висоту зазору

$$h(x) = \frac{K\sigma}{2\pi h(a)} [(x+a)\Gamma(b, x, -a) - (x-a)\Gamma(b, x, a)] + \frac{A}{c^3} (b^2 - x^2)^{3/2}. \quad (25)$$

Права частина рівності (25) містить невідому заздалегідь величину $h(a)$ – висоту зазору в точках виходу меніска на границю тіл, оскільки вона входить у вираз (1) для перепаду тисків у рідині і газі. Покладаючи у залежності (25) $x = a$, одержимо квадратне рівняння стосовно $h(a)$:

$$(h(a))^2 - \frac{A}{c^3} (b^2 - a^2)^{3/2} h(a) - \frac{Ka\sigma}{\pi} \ln \frac{b}{a} = 0, \quad (26)$$

розв'язок якого має вигляд

$$h(a) = \frac{A}{c^3} (b^2 - a^2)^{3/2} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{c^3}\right)^2 (b^2 - a^2)^3 + 4 \frac{Ka\sigma}{\pi} \ln \frac{b}{a}}. \quad (27)$$

У формулі (27) перед радикалом потрібно вибрати знак «+», зважаючи на те, що: 1) при виборі знака «+» зі співвідношення (27), поклавши у ньому $\sigma = 0$, отримаємо відомий результат [8] для відсутності меніска; 2) при виборі знака «-» отримаємо фізично недостовірний результат $h(a) < 0$, що означає від'ємну висоту зазору.

Як відомо з теорії сингулярних інтегральних рівнянь, обмежений розв'язок рівняння (21) існує при виконанні додаткової умови на його праву частину

$$\int_{L'} \frac{K(P^\infty - P(t))}{\sqrt{t^2 - b^2}} dt + \int_{L'} \left(\frac{x^2}{c^2} - \frac{1}{2}\right) \frac{3A}{c\sqrt{t^2 - b^2}} dt = 0, \quad (28)$$

з якої випливає рівність

$$(KP^\infty - KP_1)\pi - \frac{2K\sigma}{h(a)} \left(2 \arcsin \frac{a}{b} - \pi\right) + \frac{3\pi A}{2c} \left(\frac{b^2}{c^2} - 1\right) = 0. \quad (29)$$

Підставивши функцію $h(x)$ з (25) в умову збереження кількості рідини в капілярах

$$\int_a^b h(x) dx - \frac{(h(a))^2}{8} \pi = \frac{1}{2} V_0,$$

отримаємо залежність

$$\begin{aligned} \frac{2K\sigma}{h(a)} a^2 \ln \frac{b}{a} + \frac{3}{8} \frac{A}{c^3} b^4 \left(\arcsin \frac{a}{b} - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{4} \frac{A}{c^3} a (b^2 - a^2)^{3/2} + \\ + \frac{3}{8} \frac{A}{c^3} a b^2 \sqrt{b^2 - a^2} - \frac{1}{8} (h(a))^2 \pi - \frac{1}{2} V_0 = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Співвідношення (29), (30) виражають зв'язок між невідомими заздалегідь геометричними параметрами – довжиною зазору b і ділянки дії газу a , та вхідними силовими параметрами задачі – зовнішнім тиском P^∞ , тиском газу в зазорі P_1 і поверхневим натягом σ . Будемо використовувати (29), (30) як два трансцендентні рівняння для визначення довжини зазору b і ділянки дії газу a .

Числові результати. Для числових розрахунків введено безрозмірні величини: висота міжконтактного зазору $\tilde{h} = h/c$; довжина ділянки дії газу $\tilde{a} = a/c$; довжина міжконтактного зазору $\tilde{b} = b/c$; поверхневий натяг рідини $\tilde{\sigma} = K\sigma/c$; тиск на нескінченності $\tilde{P}^\infty = KP^\infty$; тиск газу в міжконтактному зазорі $\tilde{P}_1 = KP_1$; максимальна висота виїмки $\tilde{A} = A/c$; об'єм рідини в капілярі $\tilde{V}_0 = V_0/V$, де V – об'єм виїмки.

У безрозмірному вигляді систему трансцендентних рівнянь (29), (30) запишемо як

$$\begin{aligned} (\tilde{P}^\infty - \tilde{P}_1)\pi - \frac{2\tilde{\sigma}}{\tilde{h}(a)} \left(2 \arcsin \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} - \pi \right) + \frac{3\pi}{2} \tilde{A}(\tilde{b}^2 - 1) &= 0, \\ \frac{2\tilde{\sigma}\tilde{a}^2}{\tilde{h}(a)} \ln \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}} + \frac{3}{8} \tilde{A}\tilde{b}^4 \left(\arcsin \frac{\tilde{a}}{\tilde{b}} - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{1}{4} \tilde{A}\tilde{a}(\tilde{b}^2 - \tilde{a}^2)^{3/2} + \\ + \frac{3}{8} \tilde{A}\tilde{a}\tilde{b}^2 \sqrt{\tilde{b}^2 - \tilde{a}^2} - \frac{1}{8} (\tilde{h}(a))^2 \pi - \tilde{V}_0 \tilde{A} \frac{3\pi}{16} &= 0, \end{aligned}$$

де

$$\tilde{h}(a) = \tilde{A}(\tilde{b}^2 - \tilde{a}^2)^{3/2} + \sqrt{\tilde{A}^2(\tilde{b}^2 - \tilde{a}^2)^3 + 4 \frac{\tilde{a}\tilde{\sigma}}{\pi} \ln \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}}.$$

Числове розв'язання цієї системи можна дещо спростити, якщо за невідомі вибрати \tilde{P}^∞ і \tilde{a} , вважаючи довжину зазору \tilde{b} відомою і змінювати її в межах фізично допустимого діапазону, верхня межа якого 1, а нижня – та, при якій $\tilde{a} = 0$. Тоді друге рівняння системи буде рівнянням з одним невідомим \tilde{a} . Це рівняння розв'язували методом поділу відрізка пополам. Знаючи \tilde{a} і \tilde{b} , з першого рівняння легко визначити \tilde{P}^∞ .

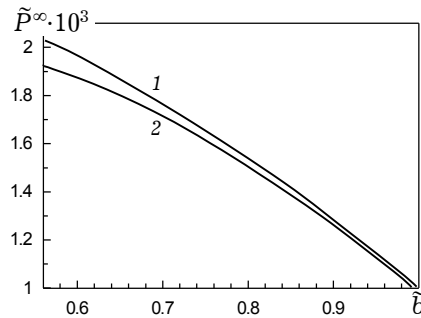


Рис. 3

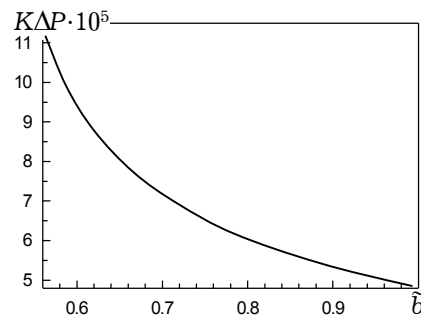


Рис. 4

На рис. 3 показано графік залежності тиску на нескінченності \tilde{P}^∞ від розміру міжконтактного зазору при відсутності капіляра (крива 1) і з урахуванням капіляра (крива 2) за таких вхідних даних: $\tilde{A} = 0.001$, $\tilde{V}_0 = 0.1$, $\tilde{\sigma} = 0.1 \cdot 10^{-7}$. Наявність капіляра зумовлює зменшення розмірів

міжконтактного зазору. На рисунку бачимо, що при зменшенні довжини зазору \tilde{b} різниця між кривою 1 і кривою 2 збільшується, тобто зростає вплив капіляра. Така поведінка зумовлена збільшенням перепаду тисків у рідині й газі за зменшення довжини зазору, що ілюструє рис. 4. Оскільки тиск газу вважається сталим, це фактично означає зменшення тиску рідини у капілярі при зменшенні довжини зазору.

На рис. 5 зображено форму початкового зазору (крива 1) між навантаженими півплощинами, форму зазору між навантаженими півплощинами за відсутності капіляра (крива 2) та при його наявності (крива 3). Вхідні дані були такі ж, як і для кривих на рис. 3, тиск на нескінченності $\tilde{P}^\infty = 0.0018$. З аналізу графіків випливає, що довжина та висота зазору швидше зменшуються при наявності капіляра, ніж за його відсутності. Тому для досягнення заданого об'єму зазору в разі наявності меніска необхідно прикласти менше навантаження, ніж у разі зазору без рідини. При цьому довжина зазору з капіляром $\tilde{b} = 2 \times 0.65$, а без капіляра $\tilde{b} = 2 \times 0.685$.

Різні рідини характеризуються різним поверхневим натягом. Окрім того, поверхневий натяг однієї і тієї ж рідини може істотно змінюватись зі зміною температури. Тому з практичного погляду цікавим є аналіз впливу варіювання натягу на параметри контактної взаємодії.

На рис. 6 зображено форми зазору \tilde{h} при різних поверхневих натягах. Для обчислень брали такі вхідні дані: $\tilde{A} = 0.001$, $\tilde{V}_0 = 0.1$, $\tilde{P}_1 = 0.001$. Криві 1–3 відповідають значенням натягу $\tilde{\sigma} = 0.2 \cdot 10^{-7}$, $\tilde{\sigma} = 0.1 \cdot 10^{-7}$, $\tilde{\sigma} = 0.1 \cdot 10^{-8}$. Бачимо, що зі збільшенням поверхневого натягу меніска збільшується вплив капіляра на величину зазору. Так, за натягу $\tilde{\sigma} = 0.2 \cdot 10^{-7}$ довжина зазору $\tilde{b} = 2 \times 0.582$, а його максимальна висота $\tilde{A} = 2.1 \cdot 10^{-4}$; за натягу $\tilde{\sigma} = 0.1 \cdot 10^{-7}$ маємо $\tilde{b} = 2 \times 0.65$ та $\tilde{A} = 2.85 \cdot 10^{-4}$; за натягу $\tilde{\sigma} = 0.1 \cdot 10^{-8}$ маємо $\tilde{b} = 2 \times 0.68$ та $\tilde{A} = 3.15 \cdot 10^{-4}$.

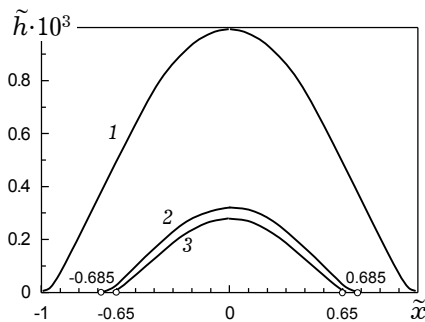


Рис. 5

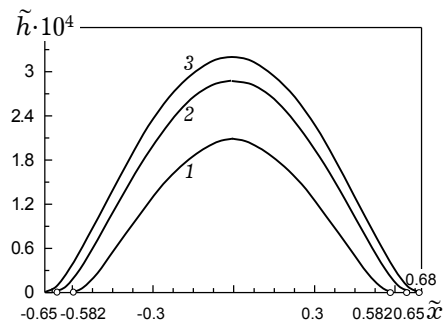


Рис. 6

Висновки. В останні роки зростає зацікавленість задачами контактної взаємодії пружних тіл з урахуванням капілярних явищ. Відомі в літературі публікації в цьому напрямку стосуються тіл з неузгодженими поверхнями, для яких властивий локальний контакт. Проте охопити весь спектр контактних поверхонь, притаманних для природних, технічних і біологічних систем, можна, розглянувши ще й тіла з узгодженими межами. Для них поверхня контакту співвимірна з границею, а локальний характер можуть мати ділянки відсутності контакту.

У цій статті розглянуто взаємодію двох пружних півпросторів за наявності в локальному зазорі між ними симетрично розташованих менісків та дії тиску газу в середній його частині. Враховано поверхневий натяг рідини та зміну форми й довжини зазору і довжини капілярів в процесі навантаження системи. Запропоновано аналітично-числову процедуру розв'язання

сформульованої задачі. На підставі проведених обчислень встановлено такі закономірності:

- наявність капіляра зумовлює зменшення довжини і висоти зазору між тілами;
- зі зменшенням довжини зазору зростає кривизна меніска і перепад тисків у рідині й газі;
- збільшення поверхневого натягу рідини зумовлює зменшення міжконтактного зазору.

Врахування тиску газу в постановці задачі дозволило побудувати фізично коректний розв'язок, який забезпечує невід'ємність тиску рідини. У відомих розв'язках контактних задач для тіл з неузгодженими границями за наявності менісків контактуючі поверхні поза меніском вважалися ненавантаженими, внаслідок чого отримано негативний тиск рідини в капілярі.

1. *Арцыбашев С. А.* Курс физики. Часть 1. Механика и теплота. – Москва: Гос. уч.-пед. изд-во М-ва просвещения РСФСР, 1951. – 672 с.
2. *Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю.* Адгезионное взаимодействие упругих тел // Прикл. математика и механика. – 2001. – **65**, № 2. – С. 279–289.
3. *Горячева И. Г., Маховская Ю. Ю.* Контактное взаимодействие упругих тел при наличии капиллярной адгезии // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, № 1. – С. 128–137.
4. *Кит Г. С., Мартыняк Р. М., Мачишин И. М.* Влияние газожидкостного заполнителя межконтактного пространства на напряженное состояние сопряженных тел // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 3. – С. 52–60.
5. *Мартыняк Р. М.* Контакт півпростору з нерівною основою при заповненому ідеальним газом міжконтактному зазорі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 144–149.
6. *Мартыняк Р. М.* Контактна взаємодія двох півпросторів при наявності поверхневої виїмки, частково заповненої нестисливою рідиною // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1990. – **26**, № 2. – С. 91–94.
7. *Мартыняк Р. М.* Механотермодифузійна взаємодія тіл з врахуванням заповнювача міжконтактних зазорів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – **36**, № 2. – С. 124–126.
8. *Мартыняк Р. М.* Термоупругое взаимодействие тел при неидеальном тепловом и механическом контакте: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04. – Львов, 1987. – 185 с.
9. *Монастирський Б. Є.* Вплив заповнювача міжповерхневого просвіту на взаємодію тіл в умовах недосконалого контакту // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2003. – Вип. 1. – С. 78–82.
10. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Изд-во АН СССР, 1954. – 648 с.
11. *Чекина О. Г.* О трении шероховатых поверхностей, разделенных тонким слоем жидкости // Трение и износ. – 1998. – **19**, № 3. – С. 306–311.
12. *Чижик С. А.* Капиллярный механизм адгезии и трения шероховатых поверхностей, разделенных тонким слоем жидкости // Трение и износ. – 1994. – **15**, № 1. – С. 11–26.
13. *Kato Takahisa, Watanabe Souta, Matsuoka Hiroshige.* Dynamic characteristics of an in-contact headslider considering meniscus force: Part 1 – Formulation and application to the disk with sinusoidal undulation // J. Tribology. – 2000. – **122**. – P. 633–638.
14. *Kato Takahisa, Watanabe Souta, Matsuoka Hiroshige.* Dynamic characteristics of an in-contact headslider considering meniscus force: Part 2 – Application to the disk with random undulation and design conditions // J. Tribology. – 2001. – **123**. – P. 168–174.
15. *Pailler-Mattei C., Zahouani H.* Analysis of adhesive behaviour of human skin in vivo by an indentation test // Tribology Int. – 2006. – **39**, № 1. – P. 12–21.
16. *Zheng Jie, Streutor J. L.* A liquid bridge between two elastic half-spaces: A theoretical study of interface instability // Tribology Lett. – 2004. – **16**, Nos. 1–2. – P. 1–9.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ КАПИЛЛЯРОВ В МЕЖКОНТАКТНОМ ЗАЗОРЕ

Смоделировано взаимодействие упругих полупространств при наличии в межконтактном зазоре, обусловленном выемкой на поверхности одного из тел, несжимаемой жидкости, образующей мениски на краях зазора, и давления газа в средней его части. При формулировке контактной задачи для такой структуры учтены поверхностное натяжение жидкости, скачок давления на границе жидкости и газа, трансформация зазора и изменение длины капилляров при изменении нагрузки. Решение задачи представлено через функцию высоты зазора. Для ее определения получено сингулярное интегральное уравнение, которое решено аналитически. Из условий ограниченности решения этого интегрального уравнения и сохранения количества жидкости в капиллярах получена система трансцендентных уравнений для определения длин зазора и капилляров. На графиках проиллюстрирована зависимость длины и формы зазора от нагрузки, зависимость перепада давления в капилляре и газе от длины зазора.

INTERACTION OF TWO BODIES IN CASE OF CAPILLARIES IN INTERCONTACT GAP

Interaction of elastic half-spaces in the case of an intercontact gap, caused by a coulisse on the surface of one of the bodies, incompressible liquid forming meniscuses on the edges of the gap, and of gas pressure action in its middle part is modelled. At the contact problem definition for such a structure the surface tension of liquid, pressure jump on the verge of the liquid and gas, transformation of the gap and change of the capillaries length at loading are taken into account. The solution to the problem is given through the function of the gap height, and for its determination a singular integral equation solved analytically is obtained. Due to limitation of the solution to singular integral equation and because of preservation of the amount of liquid in the capillaries, a system of transcendent equations is derived for determination of the gap and capillaries lengths. The dependence of the gap length and form on loading, and the dependence of jump pressure in a capillary and gas on the gap length are illustrated.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
21.12.05