УДК 539.3

Л. А. Фильштинский, В. Н. Кобзарь

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА СВЯЗАННОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛАСТИН С ОТВЕРСТИЯМИ

Предложен метод решения двумерных внутренних и внешних граничных задач связанной термоупругости, основывающийся на построенных фундаментальных решениях соответствующих уравнений.

Исследование стойкости твердых тел к воздействию тепловых нагрузок составляет содержание проблемы термической прочности, актуальность которой возросла особенно в последние десятилетия в связи с созданием мощных излучателей и их использованием в технологических операциях.

Появляется большой круг вопросов, требующих описания физических закономерностей термонапряженного состояния, возникающего в твердых телах, испытывающих тепловые воздействия. Подобные исследования оказались необходимыми, в частности, для разработки методов применения лазеров в технологических операциях (резание, сварка); для изучения условий работы самих лазероактивных материалов (стекла с неодимом, рубин), поскольку световое разрушение этих материалов ограничивает предельную мощность лазеров; при исследовании синтеза и свойств теплостойких (термостабильных) полимеров в условиях радиационного облучения или резких температурных перепадов; в криогенной технике и т. п.

В связи с этим развитие теоретических методов оценок термической прочности твердых тел при температурном или тепловом нагревах или нагреве средой приобретает важное значение.

Первое решение динамической задачи о тепловом ударе на границе полупространства принадлежит В. И. Даниловской [5]. Обобщение исследований взаимосвязанной термоупругости, включающее вывод основных уравнений, решение частных задач и анализ эффектов связанности, выполнено П. Чедвиком [14] и Б. Боли, Дж. Уэйнером [1]. Большой вклад в развитие указанного направления механики сплошных сред внесен В. Новацким [11], А. Д. Коваленко [10], Я. С. Подстригачом и Ю. М. Коляно [12]. Проблемам динамической термоупругости посвящены работы [3, 4, 6, 7, 9, 13].

Несмотря на большое число исследований в этой области актуальной остается разработка аналитических и численных процедур решения задач связанной термоупругости. В данной статье предлагается подход к решению граничных задач, опирающийся на построенную ниже матрицу фундаментальных решений двумерных уравнений связанной термоупругости с последующим применением техники сингулярных интегральных уравнений. Приводятся результаты расчетов, характеризующие связанность термоупругих полей для различных материалов.

1. Система уравнений связанной термоупругости. Дифференциальные уравнения связанной термоупругости имеют вид [7, 10, 12]

$$\nabla^2\mathbf{u} + \sigma\,\mathrm{grad}\,e - \frac{3\lambda + 2\mu}{\mu}\alpha_T\,\mathrm{grad}\,\theta + \frac{1}{\mu}\mathbf{F} = \frac{\rho}{\mu}\ddot{\mathbf{u}},$$
$$\nabla^2\theta - \frac{1}{a^2}\dot{\theta} - m\dot{e} = -\frac{W}{\lambda_T}, \qquad m = \frac{(3\lambda + 2\mu)T_0\alpha_T}{\lambda_T}, \tag{1}$$

где ∇^2 – оператор Лапласа; $\mathbf{u} = \{u_1(x_1, x_2, t),\ u_2(x_1, x_2, t)\}$ – вектор перемещений (x_1, x_2 – прямоугольные декартовы координаты; t – время); $\theta = T - T_0$ – приращение температуры (T_0 – температура тела в недеформированном и ненапряженном состоянии; T – абсолютная температура точек тела); $e = \mathrm{div}\,\mathbf{u}$ – объемное расширение; $\sigma = (1 - 2\nu)^{-1}$; ν – коэффициент Пуассона; λ, μ – постоянные Ламе; α_T – температурный коэффициент линейного расширения изотропного тела; $\mathbf{F}$ – интенсивность объемных сил; ρ – плотность; $a^2 = \lambda_T / c_\varepsilon \rho$ – коэффициент температуропроводности; λ_T – теплопроводность материала; c_ε – объемная теплоемкость при постоянной деформации; W – функция плотности тепловых источников.

Система уравнений (1) является связанной. Она описывает деформацию тела, возникающую от нестационарных тепловых и механических воздействий, а также обратный эффект – изменение температуры тела, обусловленное деформацией. Это влияние обычно мало в кристаллических телах и в ряде аморфных (неорганические и органические стекла). Однако подобное положение не сохраняется для ряда новых полимерных материалов (например, поливинилацетали, в частности поливинилбутирали), которые обладают большим параметром связанности, отражающим взаимодействие полей деформации и температуры.

2. Матрица фундаментальных решений системы (1). Имея в виду гармонический характер изменения во времени полевых величин, положим

$$
\begin{aligned}
&u_j = \mathrm{Re}\left(e^{-i\omega t} U_j\right), \qquad \sigma_{kj} = \mathrm{Re}\left(e^{-i\omega t} S_{kj}\right), \qquad k, j = 1, 2, \\
&\theta = \mathrm{Re}\left(e^{-i\omega t} U_3\right), \qquad e = \mathrm{Re}\left(e^{-i\omega t} e_*\right), \\
&\mathbf{F} = \mathrm{Re}\left(e^{-i\omega t} \mathbf{X}\right), \qquad W = \mathrm{Re}\left(e^{-i\omega t} Q\right),
\end{aligned} \tag{2}
$$

где σ_{kj} – компоненты тензора напряжения; U_j, $j = 1, 2, 3$, S_{kj}, e_*, $\mathbf{X}$, Q – амплитуды соответствующих величин; ω – круговая частота.

Исключая время в системе (1) в соответствии с представлениями (2), приходим к уравнениям термоупругости в амплитудах:

$$
\begin{aligned}
&(\nabla^2 + \gamma_2^2) U_1 + \sigma \partial_1 e_* - \alpha_0 \partial_1 U_3 = -\frac{1}{\mu} X_1, \\
&(\nabla^2 + \gamma_2^2) U_2 + \sigma \partial_2 e_* - \alpha_0 \partial_2 U_3 = -\frac{1}{\mu} X_2, \\
&i m \omega e_* + (\nabla^2 + i \gamma^2) U_3 = -\frac{1}{\lambda_T} Q, \\
&e_* = \partial_k U_k, \qquad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}, \\
&c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{\omega}{a^2}}, \quad \alpha_0 = 2(1 + \nu) \sigma \alpha_T,
\end{aligned} \tag{3}
$$

где γ_2 – волновое число; c_2 – скорость распространения поперечной волны в упругом теле.

Пусть в точке (x_{10}, x_{20}) действует гармонически изменяющаяся во времени сосредоточенная сила $\mathbf{P} = (P_1, P_2)$ или сосредоточенный тепловой источник P_3. Продифференцировав первое уравнение системы (3) по координате x_1, а второе уравнение – по координате x_2, и затем, сложив их, приходим к системе

$$
\begin{aligned}
&l_{11} e_* - l_{12} U_3 = -\frac{1}{\mu(1 + \sigma)} (\partial_1 P_1 + \partial_2 P_2) \delta(x), \\
&l_{21} e_* + l_{22} U_3 = -\frac{1}{\lambda_T} P_3 \delta(x), \\
&l_{11} = \nabla^2 + \gamma_1{}^2, \quad l_{12} = \frac{\alpha_0}{1 + \sigma} \nabla^2, \quad l_{21} = i m \omega, \quad l_{22} = \nabla^2 + i \gamma^2,
\end{aligned} \tag{4}
$$

где $\gamma_1 = \omega c_1^{-1}$ – волновое число, соответствующее продольной волне.

В дальнейшем целесообразно процедуру интегрирования системы (4) проводить в пространстве $D'(R^2)$ обобщенных функций [2]. Подробно рассмотрим случай $P_1 \neq 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$.

Вводя разрешающую функцию $\Phi_1(x_1, x_2)$ по формулам

$$e_*^{(1)} = l_{22}\Phi_1, \qquad \theta_*^{(1)} = -l_{21}\Phi_1,$$

приводим систему (4) к неоднородному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$(\nabla^2\nabla^2 + a\nabla^2 + b)\Phi_1 = -\frac{P_1}{\mu(1+\sigma)}\partial_1\delta(x),$$

$$a = \gamma_1^2 + i\gamma^2 + \frac{i\mu\alpha_0\beta_0}{1+\sigma}, \qquad b = i\gamma_1^2\gamma^2, \qquad \beta_0 = \alpha_0\frac{T_0}{\lambda_T}\omega.$$

Общее решение этого уравнения представимо в виде

$$\Phi_1 = \frac{iP_1}{4\mu(1+\sigma)(\mu_2^2 - \mu_1^2)}\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j-1}\partial_1 H_0^{(1)}(\mu_j r), \tag{5}$$

$$r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

где $H_p^{(1)}(x)$ – функция Ганкеля первого рода порядка p; μ_j – корни уравнения $\mu^4 - a\mu^2 + b = 0$, причём $\operatorname{Im}\mu_j > 0,\ j = 1, 2$.

С учетом (5) система (4) распадается на два независимых уравнения вида

$$\nabla^2 U_1^{(1)} + \gamma_2^2 U_1^{(1)} = -\frac{iP_1 a_0}{4\mu}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j d_j\partial_1^2 H_0^{(1)}(\mu_j r) - \frac{P_1}{\mu}\delta(x),$$

$$\nabla^2 U_2^{(1)} + \gamma_2^2 U_2^{(1)} = -\frac{iP_1 a_0}{4\mu}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j d_j\partial_1\partial_2 H_0^{(1)}(\mu_j r),$$

$$a_0 = \frac{1}{2\sigma(1-\nu)(\mu_1^2 - \mu_2^2)}, \qquad d_j = (\sigma+1)a - \gamma_2^2 - i\gamma^2 - \sigma\mu_j^2, \qquad j = 1, 2, \tag{6}$$

Интегрирование уравнений (6) в пространстве обобщенных функций $D'(R^2)$ дает

$$U_1^{(1)} = \frac{P_1}{4i\mu}\left\{-H_0^{(1)}(\gamma_2 r) + a_0\sum_{j=0}^{2}(-1)^j d_j b_j \partial_1^2 H_0^{(1)}(\mu_j r)\right\},$$

$$U_2^{(1)} = \frac{P_1}{4i\mu}\left\{a_0\sum_{j=0}^{2}(-1)^j d_j b_j \partial_1\partial_2 H_0^{(1)}(\mu_j r)\right\},$$

$$U_3^{(1)} = \theta_*^{(1)} = \frac{P_1}{4i\mu}\left\{i\omega m a_0\sum_{j=1}^{2}(-1)^j \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_j r)\right\},$$

$$d_0 = 1, \qquad b_0 = -\frac{1}{a_0\gamma_2^2}, \qquad b_j = \frac{1}{\gamma_2^2 - \mu_j^2}, \qquad j = 1, 2.$$

Аналогичным образом рассматриваются случаи, когда $P_1 = 0$, $P_2 \neq 0$, $P_3 = 0$ и $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 \neq 0$.

Ниже выпишем окончательные выражения для амплитуд перемещений и температуры:

$$U_n^{(k)} = \frac{P_k}{4i\mu} g_n^{(k)}, \qquad n, k = 1, 2, 3,$$

$$g_1^{(1)} = -H_0^{(1)}(\gamma_2 r) + a_0 \sum_{j=0}^{2} (-1)^j d_j b_j \partial_1^2 H_0^{(1)}(\mu_j r),$$

$$g_2^{(1)} = g_1^{(2)} = a_0 \sum_{j=0}^{2} (-1)^j d_j b_j \partial_1 \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_j r),$$

$$g_3^{(1)} = i\omega m a_0 \sum_{j=1}^{2} (-1)^j \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_j r),$$

$$g_2^{(2)} = -H_0^{(1)}(\gamma_2 r) + a_0 \sum_{j=0}^{2} (-1)^j d_j b_j \partial_2^2 H_0^{(1)}(\mu_j r),$$

$$g_3^{(2)} = i\omega m a_0 \sum_{j=1}^{2} (-1)^j \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_j r),$$

$$g_1^{(3)} = \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \beta \alpha_T \sum_{j=1}^{2} (-1)^j \partial_1 H_0^{(1)}(\mu_j r), \qquad \beta = -\frac{1}{\lambda_T(\mu_1^2 - \mu_2^2)},$$

$$g_2^{(3)} = \mu \frac{1+\nu}{1-\nu} \beta \alpha_T \sum_{j=1}^{2} (-1)^j \partial_2 H_0^{(1)}(\mu_j r),$$

$$g_3^{(3)} = \mu\beta \sum_{j=1}^{2} (-1)^j (\gamma_1^2 - \mu_j^2) H_0^{(1)}(\mu_j r), \tag{7}$$

Величины $g_n^{(k)}$, $n, k = 1, 2, 3$, определяют матрицу фундаментальных решений двумерных уравнений связанной термоупругости.

3. Пластинка с отверстием. Рассмотрим неограниченную пластинку, ослабленную отверстием достаточно гладкого контура Γ. Пусть на контуре отверстия заданы механические усилия и тепловой поток.

Условия на контуре отверстия представим в виде комплексных граничных равенств

$$S_1 - e^{2i\psi} S_2 = 2e^{i\psi}(X_{1n} - iX_{2n}),$$

$$S_1 - e^{-2i\psi} \tilde{S}_2 = 2e^{-i\psi}(X_{1n} + iX_{2n}),$$

$$-\lambda_T \frac{\partial U_3}{\partial n}\bigg|_\Gamma = \Phi\big|_\Gamma,$$

$$S_1 = S_{11} + S_{22}, \quad S_2 = S_{22} - S_{11} + 2iS_{12}, \quad \tilde{S}_2 = S_{22} - S_{11} - 2iS_{12}, \tag{8}$$

где X_{1n}, X_{2n} – компоненты вектора внешней нагрузки, действующей на граничной площадке с нормалью $\mathbf{n}$; ψ – угол между внешней нормалью к контуру Γ и осью Ox_1; Φ – тепловой поток.

Введем интегральные представления полей перемещений и температуры в виде свертки:

$$U_k(z) = \int_\Gamma \sum_{m=1}^{3} Z_m(\zeta) g_k^{(m)}(\zeta, z)\, ds, \qquad k = 1, 2, 3, \tag{9}$$

$$z = x_1 + ix_2, \qquad \zeta = \xi_1 + i\xi_2 \in \Gamma,$$

где ядра $g_k^{(m)}$ определены в (7).

Подстановка предельных значений комбинаций напряжений (8) в граничные условия (с учетом представлений (9)) приводит к системе сингулярных интегральных уравнений второго рода:

$$\pm 4iW_p(\zeta_0) + \int_\Gamma \sum_{m=1}^{3} W_m(\zeta)\mathcal{K}_{pm}(\zeta,\ \zeta_0)\,ds = F_p(\zeta_0), \qquad p = 1, 2, 3,$$

$$Z_1 = W_1 e^{i\psi} + W_2 e^{-i\psi}, \quad iZ_2 = W_1 e^{i\psi} - W_2 e^{-i\psi}, \quad \mu\alpha_T Z_3 = W_3,$$

$$F_1(\zeta_0) = (1/\mu)(N + iT)(\zeta_0), \qquad F_2(\zeta_0) = (1/\mu)(N - iT)(\zeta_0),$$

$$F_3(\zeta_0) = -\,2\alpha_T\Phi(\zeta_0), \qquad \zeta_0 \in \Gamma,$$

$$\mathcal{K}_{11}(\zeta,\ \zeta_0) = -\,\gamma_2 H_1^{(1)}(\gamma_2 r_0)\,e^{i(\alpha_0+\psi-2\psi_0)} - a_0\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\mu_j\big[\sigma\big(d_j b_j\mu_j^2 +$$

$$+\,\alpha^*\big)e^{i(\psi-\alpha_0)} + d_j b_j\mu_j^2 e^{i(\alpha_0+\psi-2\psi_0)}\big]H_1^{(1)}(\mu_j r_0),$$

$$\mathcal{K}_{12}(\zeta,\ \zeta_0) = a_0 e^{i(3\alpha_0-2\psi_0-\psi)}\sum_{j=0}^{2}(-1)^j d_j b_j\mu_j^3 H_3^*(\mu_j r_0) -$$

$$-\,a_0\sigma e^{i(\alpha_0-\psi)}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\mu_j\big(d_j b_j\mu_j^2 + \alpha^*\big)H_1^{(1)}(\mu_j r_0),$$

$$\mathcal{K}_{13}(\zeta,\ \zeta_0) = \beta\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\big[e^{2i(\alpha_0-\psi_0)}\mu_j^2 H_2^{(1)}(\mu_j r_0) - \big(\gamma_2^2 - \mu_j^2\big)H_0^{(1)}(\mu_j r_0)\big],$$

$$\mathcal{K}_{21}(\zeta,\ \zeta_0) = a_0 e^{i()2\psi_0+\psi-3\alpha_0}\sum_{j=0}^{2}(-1)^j d_j b_j\mu_j^3 H_3^*(\mu_j r_0) -$$

$$-\,a_0\sigma e^{i(-\alpha_0+\psi)}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\mu_j\big(d_j b_j\mu_j^2 + \alpha^*\big)H_1^{(1)}(\mu_j r_0),$$

$$\mathcal{K}_{22}(\zeta,\ \zeta_0) = -\,\gamma_2 H_1^{(1)}(\gamma_2 r_0)\,e^{i(2\psi_0-\alpha_0-\psi)} - a_0\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\mu_j\big[\sigma\big(d_j b_j\mu_j^2 +$$

$$+\,\alpha^*\big)\,e^{i(\alpha_0-\psi)} + d_j b_j\mu_j^2 e^{i(2\psi_0-\alpha_0-\psi)}\big]H_1^{(1)}(\mu_j r_0),$$

$$\mathcal{K}_{23}(\zeta,\ \zeta_0) = \beta\,\frac{1+\nu}{1-\nu}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\big[e^{2i(\psi_0-\alpha_0)}\mu_j^2 H_2^{(1)}(\mu_j r_0) - \big(\gamma_2^2 - \mu_j^2\big)H_0^{(1)}(\mu_j r_0)\big],$$

$$\mathcal{K}_{31}(\zeta,\ \zeta_0) = iE\sigma T_0\alpha_T^2\omega a_0\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\mu_j^2\big[e^{i(\psi+\psi_0-2\alpha_0)}H_2^{(1)}(\mu_j r_0) -$$

$$-\,e^{i(\psi-\psi_0)}H_0^{(1)}(\mu_j r_0)\big],$$

$$\mathcal{K}_{32}(\zeta,\ \zeta_0) = iE\sigma T_0\alpha_T^2\omega a_0\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\mu_j^2\big[e^{i(2\alpha_0-\psi-\psi_0)}H_2^{(1)}(\mu_j r_0) -$$

$$-\,e^{i(\psi-\psi_0)}H_0^{(1)}(\mu_j r_0)\big],$$

$$\mathcal{K}_{33}(\zeta,\ \zeta_0) = -\,\frac{2}{\mu_1^2 - \mu_2^2}\sum_{j=1}^{2}(-1)^j\mu_j\big(\gamma_1^2 - \mu_j^2\big)H_1^{(1)}(\mu_j r_0)\cos(\alpha_0 - \psi_0),$$

$$\alpha^* = 2i(1+\nu)\alpha_T\omega m, \qquad H_3^*(x) = 16\,\frac{i}{\pi x^3} + H_3^{(1)}(x), \qquad \alpha_0 = \mathrm{Arg}\,(\zeta - \zeta_0),$$

где N и T – нормальное и касательное усилия, заданные на контуре отверстия Γ; E – модуль Юнга. Здесь верхний знак соответствует внутренней задаче (конечная односвязная область), нижний – внешней задаче (неограниченная среда с отверстием).

Амплитуды напряжения $S_{\theta\theta}$ и температуры U_3 на основании представлений (9) будут иметь вид

$$\{S_{\theta\theta}\}^{\pm} = \{S_1\}^{\pm} - N = 2\mu\sigma\left\{ \pm \frac{i}{(1-\nu)\sigma}\left[W_1(\zeta_0) + W_2(\zeta_0)\right] + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Gamma} \sum_{m=1}^{3} W_m(\zeta) R_m(\zeta,\ \zeta_0)\, ds \right\} - N\,,$$

$$\{U_3\}^{\pm} = \int\limits_{\Gamma} \sum_{m=1}^{3} W_m(\zeta) R_3^{(m)}(\zeta,\ \zeta_0)\, ds$$

где

$$R_1(\zeta,\ \zeta_0) = -\, e^{i(\psi-\alpha_0)} \sum_{j=1}^{2} (-1)^j a_0 \mu_j \left(d_j b_j \mu_j^2 + \alpha^*\right) H_1^{(1)}(\mu_j r_0)\,,$$

$$R_1(\zeta,\ \zeta_0) = -\, e^{i(\alpha_0-\psi)} \sum_{j=1}^{2} (-1)^j a_0 \mu_j \left(d_j b_j \mu_j^2 + \alpha^*\right) H_1^{(1)}(\mu_j r_0)\,,$$

$$R_3(\zeta,\ \zeta_0) = -\, \frac{\beta(1+\nu)}{\sigma(1-\nu)} \sum_{j=1}^{2} (-1)^j \left(\gamma_2^2 - \mu_j^2\right) H_0^{(1)}(\mu_j r_0)\,,$$

$$R_3^{(1)}(\zeta,\ \zeta_0) = i\omega m a_0 e^{i(\psi-\alpha_0)} \sum_{j=1}^{2} (-1)^j \mu_j H_1^{(1)}(\mu_j r_0)\,,$$

$$R_3^{(2)}(\zeta,\ \zeta_0) = i\omega m a_0 e^{i(\alpha_0-\psi)} \sum_{j=1}^{2} (-1)^j \mu_j H_1^{(1)}(\mu_j r_0)\,,$$

$$R_3^{(3)}(\zeta,\ \zeta_0) = \frac{\beta}{\alpha_T} \sum_{j=1}^{2} (-1)^j \left(\gamma_1^2 - \mu_j^2\right) H_0^{(1)}(\mu_j r_0)\,.$$

4. Результаты расчетов и их обсуждение. Для численной реализации построенного алгоритма был привлечен метод механических квадратур.

Расчеты производились для кругового, эллиптического и квадратного контуров с такими параметрическими уравнениями соответственно:

$$\zeta = Re^{i\varphi}\,, \qquad \zeta = R_1 \cos\varphi + R_2 i \sin\varphi\,, \qquad \zeta = R\left(e^{i\varphi} + 0.14036 e^{-3i\varphi}\right),$$

где $R = R_2 = 10^{-4}$ м, $R_1 = 2\cdot 10^{-4}$ м, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

На представленных рисунках термодинамические характеристики взяты для поливинилбутираля, полистирола и алюминия (табл. 1).

Таблица 1. Термодинамические характеристики материалов при $T_0 = 293$ К [4, 8]

Материал	$E\cdot 10^{-10}$, Н/м^2	c_ε, Дж/(кг·К)	$\rho\cdot 10^{-3}$, кг/м^3	ν	$\alpha_T\cdot 10^6$, К$^{-1}$	λ_T, Дж/(м·с·К)
Алюминий	7.0	861	2.70	0.34	26	207
Полистирол	0.255	1077	1.04	0.30	70	0.16
Поливинилбутираль	0.275	1077	1.07	0.40	230	0.16

На рис. 1–3 приведены графики распределения амплитуды окружного нормального напряжения $|S_{\theta\theta}|$ в зависимости от относительного волнового числа $\gamma_2 r$ для пластинки с круговым отверстием соответственно из поливинилбутираля, полистирола и алюминия. Сплошная линия соответствует случаю связанности полей деформации и температуры (коэффициент связности $\delta > 0$), штриховая – отсутствию связанности ($\delta = 0$). На контуре отверстия заданы нормальное усилие $N = 1$ Н/м^2 и нулевой тепловой поток $\Phi = 0$ Н/м^2.

На рис. 4, 5 представлены графики изменения $|S_{\theta\theta}|$ по $\gamma_2 r$ для пластинки с эллиптическим и «квадратным» отверстиями соответственно, учитывая связанность термоупругих полей. Кривые соответствуют случаю, когда на контуре отверстия заданы нормальное усилие $N = 1$ Н/м^2 и нулевой тепловой поток $\Phi = 0$ Н/м^2. Сплошная, штриховая и пунктирная линии соответствуют пластинкам из полистирола, поливинилбутираля и алюминия соответственно.

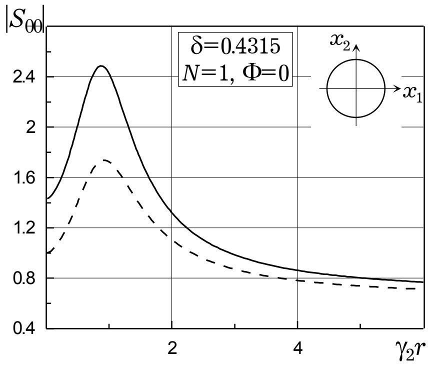

Рис. 1

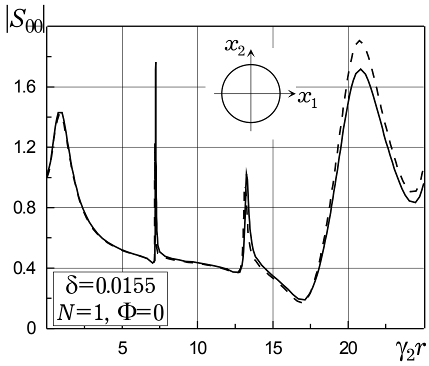

Рис. 2

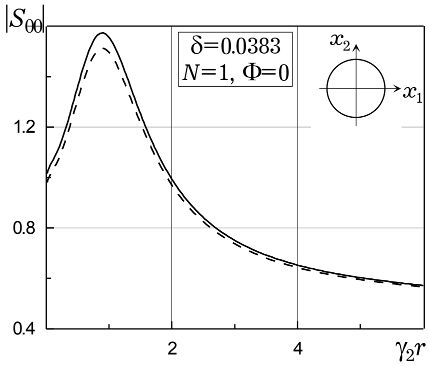

Рис. 3

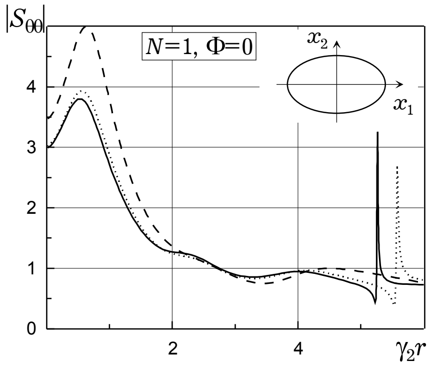

Рис. 4

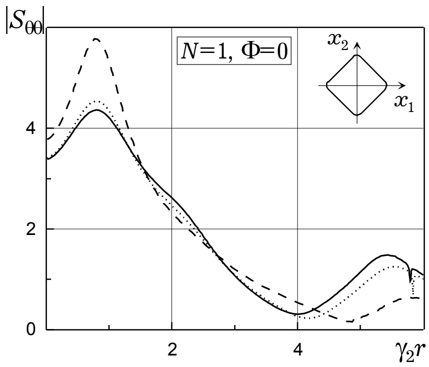

Рис. 5

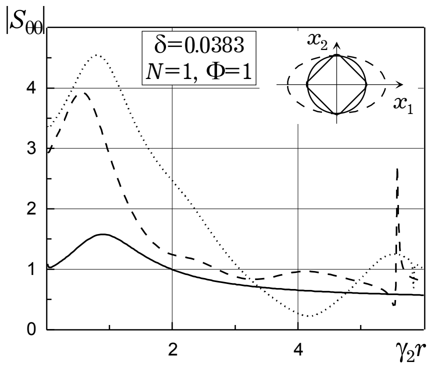

Рис. 6

Распределение амплитуды напряжения $|S_{\theta\theta}|$ для алюминиевой пластинки с отверстием представлено на рис. 6. Сплошная линия соответствует круговому, штриховая – эллиптическому, а пунктирная – «квадратному» отверстиям. На контуре отверстия заданы нормальное усилие $N = 1$ Н/м^2 и тепловой поток $\Phi = 1$ Н/м^2.

На рис. 1–3 видно, что решения несвязанной и связанной задач термоупругости не совпадают. Тем не менее, для материалов с низким коэффициентом связности (полистирол, алюминий, у которых δ на порядок меньше, чем у поливинилбутираля) кривые совмещаются. На примере поливинилбутираля (рис. 1) очевидно влияние взаимодействия полей деформаций и температур, приводящее к изменению волнового процесса.

Следует отметить, что возможность пренебречь членом связанности зависит не только от выполнения требования $\delta \ll 1$, что наглядно продемонстрировано на рис. 2 (полистирол, $\delta = 0.0155$). Поэтому строгое ограничение класса задач, для которых можно упростить связанные динамические задачи, не всегда представляется возможным.

1. *Боли Б., Уэйнер Дж.* Теория температурных напряжений. – Москва: Мир, 1964. – 520 с.
2. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.
3. *Гачкевич О. Р., Мусій Р. С., Мельник Н. Б.* Термомеханічна поведінка порожнистого електропровідного циліндра при імпульсній електромагнітній дії // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 1. – С. 146–154.
4. *Грибанов В. Ф., Паничкин Н. Г.* Связанные и динамические задачи термоупругости. – Москва: Машиностроение, 1981. – 184 с.
5. *Даниловская В. И.* Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы // Прикл. математика и механика. – 1950. – **14**, № 3. – С. 316–318.
6. *Демидов В. Н.* Задача о тепловом ударе в обобщенной термоупругопластической постановке // Тр. Междунар. конф. RDAMM–2001. – 2001. – Т. 6, № 2. – С. 145–152.
7. *Карнаухов В. Г.* Связанные задачи термовязкоупругости. – Киев: Наук. думка, 1982. – 260 с.
8. *Карташов Э. М., Партон В. З.* Динамическая термоупругость и проблемы термического удара // Итоги науки и техники. Сер. механика деформируемого твердого тела. – Москва: ВИНИТИ, 1991. – С. 55–127.
9. *Кит Г. С., Хай М. В.* Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1989. – 283 с.
10. *Коваленко А. Д.* Термоупругость. – Киев: Вища шк., 1975. – 216 с.
11. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. – Москва: Мир, 1970. – 256 с.
12. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1977. – 312 с.
13. *Andrew N. Norris* Dynamics of thermoelastic thin plates: A comparison of four theories // J. Thermal Stresses. – 2005.
14. *Chadwic P.* Thermoelasticity. The dynamical theory // Progress in Solid Mechanics. – Amsterdam: North-Holland, 1960. – **1**, chapt. 6. – P. 263–328.

ПЛОСКА ЗАДАЧА ЗВ'ЯЗАНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПЛАСТИН З ОТВОРАМИ

Запропоновано метод розв'язування двовимірних внутрішніх і зовнішніх граничних задач зв'язаної термопружності, який ґрунтується на побудованих фундаментальних розв'язках відповідних рівнянь.

PLANE PROBLEM OF COUPLED THERMOELASTICITY FOR PLATES WITH HOLES

The method for solution of two-dimensional inner and outer boundary problems of coupled thermoelasticity is proposed. It is based on the constructed fundamental solutions of the corresponding equations.

Сумск. гос. ун-т, Сумы

Получено
11.10.05