УДК 517.958

В. Н. Сущ

ДИСКРЕТНІ МОДЕЛІ ОПЕРАТОРІВ, ЯКІ ПОРОДЖУЮТЬСЯ РІВНЯННЯМИ ЯНҐА – МІЛЛСА НА 4-ВИМІРНОМУ ТОРІ

Збудовано дискретні аналоги рівнянь Янґа – Міллса, оператора зовнішнього коваріантного диференціювання та спряженого з ним оператора на комбінаторному 4-вимірному торі. Доведено самоспряженість дискретного аналога оператора типу лапласіана.

1. Вступ. Нехай T^4 – 4-вимірний тор. Розглянемо також тривіальне розшарування $P = T^4 \times G$, де G – деяка група Лі з алгеброю Лі $\mathbf{g}$. Відомо (див., наприклад, [6]), що зв'язність в P можна означити як 1-форму, яка приймає значення в $\mathbf{g}$. Надалі, нехай $G = \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$, тоді $\mathbf{g} = \mathrm{gl}(2,\mathbb{C})$. Нехай A – $\mathrm{gl}(2,\mathbb{C})$-значна 1-форма зв'язності. Тоді 2-форма кривизни цієї зв'язності має вигляд

$$F = dA + A \wedge A. \tag{1}$$

Введемо на довільних $\mathrm{gl}(2,\mathbb{C})$-значних p-формах φ оператор зовнішнього коваріантного диференціювання за правилом

$$d_A\varphi = d\varphi + A \wedge \varphi + (-1)^{p+1}\varphi \wedge A. \tag{2}$$

Тоді однорідні рівняння Янґа – Міллса мають вигляд

$$d_A F = 0, \qquad d_A * F = 0, \tag{3}$$

де $*$ – операція метричного спряження – оператор Годжа (W. W. D. Hodge). Перше з рівнянь (3) є так званою тотожністю Б'янкі (L. Bianchi).

Скалярний добуток для $\mathrm{gl}(2,\mathbb{C})$-значних форм однакового порядку на T^4 задається так:

$$(\varphi, \psi) = \mathrm{tr}\int_{T^4} \varphi \wedge * \psi^*, \tag{4}$$

де зірочка над ψ означає комплексне спряження та транспонування компонент форми ψ. Позначимо через δ_A оператор, формально спряжений з d_A відносно скалярного добутку (4). Оператор δ_A має вигляд [6]

$$\delta_A = (-1)^p *^{-1} d_A *, \tag{5}$$

де p – порядок форми, на яку діє оператор, і $*^{-1}* = 1$. Розглянемо також оператор

$$-\Delta_A = \delta_A d_A + d_A \delta_A, \tag{6}$$

який будемо називати оператором типу лапласіана. Згідно з (6), якщо форма кривизни F задовольняє рівняння Янґа – Міллса (3), то вона задовольняє також рівняння типу Лапласа: $-\Delta_A F = 0$. У зв'язку з цим теорію Янґа – Міллса іноді називають нелінійним узагальненням теорії Годжа гармонічних форм [5].

У роботі, використовуючи схему дискретизації Дезіна [1], побудовано комбінаторну модель тору – 4-вимірний комплекс. Дискретні аналоги $\mathrm{gl}(2,\mathbb{C})$-значних диференціальних форм, зокрема, 1-форми зв'язності, розглядаються як $\mathrm{gl}(2,\mathbb{C})$-значні коланцюги – елементи дуального комплексу. Конструкція дуального комплексу дозволяє ввести дискретні аналоги операції зовнішнього множення, оператора Годжа, диференціала, кодиференціала та скалярного добутку (4) так, щоб зберігались основні геометричні властивості цих об'єктів. Виходячи з цих означень, побудовано дискретний аналог рівнянь Янґа – Міллса (3). Ці рівняння виписано також у різницевій формі. Значна увага у роботі приділяється вивченню дискретних аналогів оператора коваріантного диференціювання (2) та спряженого з ним оператора (5). Доведено, що дискретний аналог оператора типу Лапласа (6) є самоспряженим на комбінаторному торі.

Слід зазначити, що подібні схеми дискретизації були використані в працях [4, 7, 8], у яких досліджувалась калібрувальна інваріантність дискретних моделей рівнянь Янґа – Міллса в евклідовому просторі та в часопросторі Мінковського. У роботі [2] розглядалась модель класичних рівнянь Янґа – Міллса над найпростішим клітковим розбиттям двовимірного тору.

2. Комбінаторна модель 4-вимірного тору. Нехай тензорна степінь одновимірного комплексу C: $C(4) = C \otimes C \otimes C \otimes C$ є комбінаторною моделлю $\mathbb{R}^4$ (детальніше див. [1]). Введемо 1-вимірний комплекс C – комбінаторну пряму – таким чином. Нехай C^0 – дійсний лінійний простір 0-вимірних ланцюгів, які породжуються базисними елементами x_k (точками), $k \in \mathbb{Z}$. Введемо для зручності на множині індексів оператори зсуву τ, σ:

$$\tau k = k + 1, \qquad \sigma k = k - 1 .$$

Позначимо відкритий інтервал $(x_k, x_{\tau k})$ через e_k і будемо розглядати множину $\{e_k\}$ як множину базисних елементів дійсного лінійного простору C^1. Тоді одновимірний комплекс є прямою сумою введених просторів, тобто $C = C^0 \oplus C^1$. Граничний оператор ∂ на базисних елементах C задається так:

$$\partial x_k = 0, \qquad \partial e_k = x_{\tau k} - x_k . \tag{7}$$

На довільні ланцюги операція (7) поширюється за лінійністю.

Всі можливі тензорні добутки базисних елементів x_k, e_k дають нам базисні елементи $C(4)$. Нехай $s_k^{(p)}$, де $k = (k_1, k_2, k_3, k_4)$, $k_i \in \mathbb{Z}$, є p-вимірним базисним елементом комплексу $C(4)$. Надалі будемо вважати, що індекс (p) містить всю інформацію про кількість і місце розташування 1-вимірних «компонент» e_k в $s_k^{(p)}$. Наприклад, 1-вимірні e_k^i та 2-вимірні ε_k^{ij} базисні елементи $C(4)$ мають відповідно такий вигляд:

$$\begin{aligned}
e_k^1 &= e_{k_1} \otimes x_{k_2} \otimes x_{k_3} \otimes x_{k_4}, & e_k^2 &= x_{k_1} \otimes e_{k_2} \otimes x_{k_3} \otimes x_{k_4},\\
e_k^3 &= x_{k_1} \otimes x_{k_2} \otimes e_{k_3} \otimes x_{k_4}, & e_k^4 &= x_{k_1} \otimes x_{k_2} \otimes x_{k_3} \otimes e_{k_4},\\
\varepsilon_k^{12} &= e_{k_1} \otimes e_{k_2} \otimes x_{k_3} \otimes x_{k_4}, & \varepsilon_k^{13} &= e_{k_1} \otimes x_{k_2} \otimes e_{k_3} \otimes x_{k_4},\\
\varepsilon_k^{14} &= e_{k_1} \otimes x_{k_2} \otimes x_{k_3} \otimes e_{k_4}, & \varepsilon_k^{23} &= x_{k_1} \otimes e_{k_2} \otimes e_{k_3} \otimes x_{k_4},\\
\varepsilon_k^{24} &= x_{k_1} \otimes e_{k_2} \otimes x_{k_3} \otimes e_{k_4}, & \varepsilon_k^{34} &= x_{k_1} \otimes x_{k_2} \otimes e_{k_3} \otimes e_{k_4}.
\end{aligned}$$

Дія граничного оператора (7) переноситься на комплекс $C(4)$ за правилом

$$\partial(c^p \otimes c^q) = \partial c^p \otimes c^q + (-1)^p c^p \otimes \partial c^q .$$

де c^p, c^q – p-, q-вимірні ланцюги відповідно, які належать до комплексів довільної розмірності.

Будемо вважати, що комбінаторною моделлю 4-вимірного тору T^4 є комплекс C^4, базисні елементи якого задовольняють періодичні граничні умови вигляду

$$s^{(p)}_{k_1,\ldots \tau N_i,\ldots k_4} = s^{(p)}_{k_1,\ldots 1,\ldots k_4}, \qquad s^{(p)}_{k_1,\ldots 0,\ldots k_4} = s^{(p)}_{k_1,\ldots N_i,\ldots k_4}, \tag{8}$$

де $1 \le k_i \le N_i$ для всіх $i = 1, 2, 3, 4$.

Розглянемо тепер дуальний об'єкт − комплекс, спряжений з $C(4)$. Позначимо його через $K(4)$ і нехай це буде лінійний простір $\mathrm{gl}(2,\mathbb{C})$-значних функцій над $C(4)$. З іншого боку, $K(4)$ − комплекс $\mathrm{gl}(2,\mathbb{C})$-значних коланцюгів, який має таку саму структуру як $C(4)$, тобто $K(4) = K \otimes K \otimes K \otimes K$, де 1-вимірний комплекс K є спряженим з C. Для базисних елементів $\{x^k\}$, $\{e^k\}$ комплексу K означується операція спарення з відповідними базисними елементами C:

$$\langle x_j, x^k \rangle = \langle e_j, e^k \rangle = \delta_j^k , \tag{9}$$

де δ_j^k − символ Кронекера. Нехай $s^k_{(p)}$ − p-вимірний базисний елемент $K(4)$. Тоді p-вимірний коланцюг α має вигляд

$$\alpha = \sum_k \sum_{(p)} \alpha_k^{(p)} s^k_{(p)}, \tag{10}$$

де $\alpha_k^{(p)} \in \mathrm{gl}(2,\mathbb{C})$. Надалі будемо називати коланцюги формами, підкреслюючи їхню близкість з відповідними континуальними об'єктами − диференціальними формами.

Операція спарення (9) в очевидний спосіб переноситься на базисні елементи комплексів $C(4)$, $K(4)$ і для форми (10) маємо

$$\langle s_k^{(p)}, \alpha \rangle = \alpha_k^{(p)}. \tag{11}$$

Звідси безпосередньо випливає, що компоненти форм (10) на $C(4)$ задовольняють періодичні граничні умови вигляду (8), тобто

$$\alpha^{(p)}_{k_1,\ldots \tau N_i,\ldots k_4} = \alpha^{(p)}_{k_1,\ldots 1,\ldots k_4}, \qquad \alpha^{(p)}_{k_1,\ldots 0,\ldots k_4} = \alpha^{(p)}_{k_1,\ldots N_i,\ldots k_4}. \tag{12}$$

Граничний оператор ∂ породжує в спряженому комплексі $K(4)$ дуальну операцію d^c за правилом

$$\langle \partial a, \alpha \rangle = \langle a, d^c \alpha \rangle, \tag{13}$$

де $a \in C(4)$, $\alpha \in K(4)$. Когграничний оператор d^c будемо вважати дискретним аналогом операції зовнішнього диференціювання d.

Введемо операцію множення на дискретних формах, яку будемо вважати дискретним аналогом операції зовнішнього множення диференціальних форм. Позначимо цю операцію через $\cup$. В термінах теорії гомологій це так зване множення Уітні. Спочатку означимо $\cup$-множення на базисних елемента 1-вимірного комплексу K так:

$$x^k \cup x^k = x^k, \quad e^k \cup x^{\tau k} = e^k, \quad x^k \cup e^k = e^k,$$

припускаючи, що добуток рівний нуеві у всіх інших випадках. Тепер припустимо, що операція $\cup$-множення задана на комплексі $K(r)$, де $r = 1,2,3$. Нехай $s^k_{(p)}$ − p-вимірний базисний елемент $K(r)$. Запишемо базисний елемент комплексу $K(r+1)$ у вигляді $s^k_{(p)} \otimes s^k$, де s^k є або e^k, або x^k, $k \in \mathbb{Z}$. Тоді $\cup$-множення на базисних елементах $K(r+1)$ задається так:

$$(s^k_{(p)} \otimes s^k) \cup (s^k_{(q)} \otimes s^\mu) = Q(k,q)(s^k_{(p)} \cup s^k_{(q)}) \otimes (s^k \cup s^\mu), \tag{14}$$

де знакова функція $Q(k,q)$ дорівнює -1, якщо розмірність обидвох елементів s^k і $s^k_{(q)}$ є непарною, та $+1$ в усіх інших випадках. На форми (10) $\cup$-множення поширюється за лінійністю. Зазначимо, що коефіцієнти форм перемножуються як матриці. Відомо (див. [1]), що для довільних дискретних форм $\alpha, \beta \in K(4)$ виконується співвідношення

$$d^c(\alpha \cup \beta) = d^c\alpha \cup \beta + (-1)^r \alpha \cup d^c\beta, \qquad (15)$$

де r – порядок форми α. Зазначимо, що доведення формули (15), яке в [1] було проведене для дійснозначних форм, практично без змін переноситься на випадок матричнозначних форм.

Означимо дискретний аналог оператора Годжа за правилом

$$s^k_{(p)} \cup *s^k_{(p)} = V^k, \qquad (16)$$

де $V^k = e^{k_1} \otimes e^{k_2} \otimes e^{k_3} \otimes e^{k_4}$ – 4-вимірний базисний елемент $K(4)$. Операція $*$ за лінійністю поширюється на довільні дискретні форми.

3. Дискретний аналог рівнянь Янґа – Міллса. Нехай $A \in K(4)$ – дискретна 1-форма. Тоді A має вигляд

$$A = \sum_k \sum_{i=1}^{4} A^i_k e^k_i, \qquad (17)$$

де $A^i_k \in \mathrm{gl}(2, \mathbb{C})$ і e^k_i – 1-вимірний базисний елемент $K(4)$, $k = (k_1, k_2, k_3, k_4)$, $k_i = 1, 2, \ldots, N_i$. Згідно з (11) умови (8) породжують періодичні граничні умови для компонент форми A:

$$A^i_{k_1, \ldots \tau N_i, \ldots k_4} = A^i_{k_1, \ldots 1, \ldots k_4}, \qquad A^i_{k_1, \ldots 0, \ldots k_4} = A^i_{k_1, \ldots N_i, \ldots k_4}. \qquad (18)$$

Будемо вважати, що $\mathrm{gl}(2, \mathbb{C})$-значна 1-форма A вигляду (17) є дискретним аналогом форми зв'язності на T^4.

Означимо дискретну 2-форму кривизни $F \in K(4)$ (див. (1)) так:

$$F = d^c A + A \cup A. \qquad (19)$$

З іншого боку, довільна 2-форма $F \in K(4)$ має вигляд

$$F = \sum_k \sum_{i<j} F^{ij}_k \varepsilon^k_{ij}, \qquad (20)$$

де $F^{ij}_k \in \mathrm{gl}(2, \mathbb{C})$, ε^k_{ij} – 2-вимірний базисний елемент $K(4)$ і $1 \le i, j \le 4$.

Введемо для зручності оператори зсуву $\tau_i, \sigma_i, \tau_{ij}, \sigma_{ij}$, які на множині мультиіндексів $k = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ діють так: τ_i (σ_i) зсуває на одиницю вправо (вліво) i-ту компоненту k, а τ_{ij} (σ_{ij}) – i-ту та j-ту компоненти одночасно, причому $i \neq j$. Наприклад,

$$\tau_2 k = (k_1, \tau k_2, k_3, k_4), \qquad \sigma_{13} k = (\sigma k_1, k_2, \sigma k_3, k_4).$$

Враховуючи означення (13), (14) і співставляючи (19) з (20), отримаємо

$$F^{ij}_k = \Delta_{k_i} A^j_k - \Delta_{k_j} A^i_k + A^i_k A^j_{\tau_i k} - A^j_k A^i_{\tau_j k},$$

де $\Delta_{k_i} A^j_k = A^j_{\tau_i k} - A^j_k$. Очевидно, що компоненти F^{ij}_k задовольняють граничні умови вигляду (12).

Дискретний аналог оператора зовнішнього коваріантного диференціювання d_A (2) означимо за правилом

$$d^c_A \varphi = d^c \varphi + A \cup \varphi + (-1)^{p+1} \varphi \cup A, \qquad (21)$$

де φ – довільна p-форма вигляду (10). Тоді дискретні аналоги рівнянь Янґа – Міллса (3) мають вигляд

$$d_A^c F = 0, \qquad d_A^c * F = 0 . \tag{22}$$

Неважко показати, використовуючи формулу (15), що перше рівняння (22) є тотожністю (дискретний аналог тотожності Б'янкі).

Згідно з (9), (11), (13), (15), друге з рівнянь (22) можна розписати у різницевому вигляді так:

$$\Delta_{k_2} F^{12}_{\sigma_{12}k} + \Delta_{k_3} F^{13}_{\sigma_{13}k} + \Delta_{k_4} F^{14}_{\sigma_{14}k} + A^2_k F^{12}_{\sigma_1 k} + A^3_k F^{13}_{\sigma_1 k} +$$

$$+ A^4_k F^{14}_{\sigma_1 k} - F^{12}_{\sigma_{12}k} A^2_{\tau_{34}k} - F^{13}_{\sigma_{13}k} A^3_{\tau_{24}k} - F^{14}_{\sigma_{14}k} A^4_{\tau_{23}k} = 0 ,$$

$$\Delta_{k_1} F^{12}_{\sigma_{12}k} - \Delta_{k_3} F^{23}_{\sigma_{23}k} - \Delta_{k_4} F^{24}_{\sigma_{24}k} - A^3_k F^{23}_{\sigma_2 k} - A^4_k F^{24}_{\sigma_2 k} +$$

$$+ A^1_k F^{12}_{\sigma_2 k} + F^{23}_{\sigma_{23}k} A^3_{\tau_{14}k} + F^{24}_{\sigma_{24}k} A^4_{\tau_{13}k} - F^{12}_{\sigma_{12}k} A^1_{\tau_{34}k} = 0 ,$$

$$- \Delta_{k_1} F^{13}_{\sigma_{13}k} - \Delta_{k_2} F^{23}_{\sigma_{23}k} + \Delta_{k_4} F^{34}_{\sigma_{34}k} - A^1_k F^{13}_{\sigma_3 k} - A^2_k F^{23}_{\sigma_3 k} +$$

$$+ A^4_k F^{34}_{\sigma_3 k} + F^{13}_{\sigma_{13}k} A^1_{\tau_{24}k} + F^{23}_{\sigma_{23}k} A^2_{\tau_{14}k} - F^{34}_{\sigma_{34}k} A^4_{\tau_{12}k} = 0 ,$$

$$\Delta_{k_1} F^{14}_{\sigma_{14}k} + \Delta_{k_2} F^{24}_{\sigma_{24}k} + \Delta_{k_3} F^{34}_{\sigma_{34}k} + A^1_k F^{14}_{\sigma_4 k} + A^2_k F^{24}_{\sigma_4 k} +$$

$$+ A^3_k F^{34}_{\sigma_4 k} - F^{14}_{\sigma_{14}k} A^1_{\tau_{23}k} - F^{24}_{\sigma_{24}k} A^2_{\tau_{13}k} - F^{34}_{\sigma_{34}k} A^3_{\tau_{12}k} = 0 .$$

Тут різницеві рівняння згруповано за ознакою приналежності до одного з чотирьох типів 3-вимірних базисних елементів $K(4)$.

4. Оператор δ_A^c і дискретний аналог оператора типу лапласіана. Нехай $\varphi \in K(4)$ – p-форма вигляду (10). Через φ^* позначимо p-форму, компонентами якої є матриці, комплексно-спряжені та транспоновані до компонент форми φ, тобто $(\varphi_k^{(p)})^* = (\bar{\varphi}_k^{(p)})^\top$.

Введемо позначення

$$V = \sum_k V_k ,$$

де, нагадаємо, $V_k = e_{k_1} \otimes e_{k_2} \otimes e_{k_3} \otimes e_{k_4}$ – 4-вимірний базисний елемент $C(4)$ та $1 \le k_i \le N_i$. Відзначимо, що N_i – фіксовані натуральні числа – такі самі, як в умовах (8). Означимо для форм однакового порядку $\varphi \in K(4)$ та $\psi \in K(4)$ скалярний добуток (див. (4)) за правилом

$$(\varphi, \psi) = \mathrm{tr} \langle V, \varphi \cup *\psi^* \rangle . \tag{23}$$

Для форм різного порядку добуток (23) дорівнює нулеві за означенням. Враховуючи означення відповідних операцій, співвідношення (23) для p-форм можна переписати так:

$$(\varphi, \psi) = \mathrm{tr} \sum_k \sum_{(p)} \varphi_k^{(p)} (\psi_k^{(p)})^* .$$

Задання скалярного добутку (23) на лінійних просторах p-форм над V дозволяє розглядати їх як скінченновимірні гільбертові простори H^p, $p = 0, 1, 2, 3, 4$, з відповідними базисами $\{s^k_{(p)}\}$. Тоді кограничний оператор d^c діє за правилом

$$d^c : H^p \to H^{p+1} .$$

Твердження 1. Н*ехай* $\varphi \in H^p$ *та* $\psi \in H^{p+1}$. *Тоді*

$$(d^c\varphi, \psi) = (\varphi, \delta^c\psi)\,, \tag{24}$$

де

$$\delta^c = (-1)^{p+1} *^{-1} d^c * : H^{p+1} \to H^p\,. \tag{25}$$

Д о в е д е н н я. Використовуючи (13) і (15), маємо

$$(d^c\varphi, \psi) = \operatorname{tr}\langle V, d^c(\varphi \cup *\psi^*)\rangle - (-1)^p \operatorname{tr}\langle V, \varphi \cup d^c * \psi^*\rangle =$$

$$= \operatorname{tr}\langle \partial V, \varphi \cup *\psi^*\rangle + (-1)^{p+1}(\varphi, *^{-1} d^c * \psi)\,.$$

Оскільки вираз $\operatorname{tr}\langle \partial V, \varphi \cup *\psi^*\rangle$ складається з сум за всіма k та i виразів вигляду

$$\operatorname{tr}(\varphi^{(p)}_{k_1\ldots\tau N_i,\ldots k_4} \cdot (\psi^{(p+1)}_{k_1\ldots N_i,\ldots k_4})^* - \varphi^{(p)}_{k_1\ldots 1,\ldots k_4} \cdot (\psi^{(p+1)}_{k_1\ldots 0,\ldots k_4})^*)\,,$$

де індекси 1 та 0 знаходяться на i-му місці, то згідно з умовами (12) отримуємо $\operatorname{tr}\langle \partial V, \varphi \cup *\psi^*\rangle = 0$. ◊

Очевидно, оператор (25) можемо вважати дискретним аналогом кодиференціала − оператора, формально спряженого з d. Згідно з означеннями відповідних операцій дія оператора δ^c, наприклад, на довільну 1-форму $\psi \in H^1$ (17) виглядає так:

$$\delta^c\psi = \sum_k \sum_{i=1}^4 (-\Delta_{k_i} \psi^i_{\sigma_i k}) x^k\,,$$

де $x^k = x^{k_1} \otimes x^{k_2} \otimes x^{k_3} \otimes x^{k_4}$ − 0-вимірний базисний елемент H^0.

Отже, дискретний аналог оператора Лапласа має вигляд

$$-\Delta^c \equiv d^c\delta^c + \delta^c d^c : H^p \to H^p\,.$$

Твердження 2. *Для довільних форм* $\varphi, \psi \in H^p$ *виконується рівність*

$$(d^c\varphi, d^c\psi) + (\delta^c\varphi, \delta^c\psi) = (\varphi, -\Delta^c\psi)\,.$$

Д о в е д е н н я. Оскільки, очевидно, компоненти форм $d^c\psi, \delta^c\psi$ задовольняють умови (12), то згідно з (24) маємо

$$(d^c\varphi, d^c\psi) = (\varphi, \delta^c d^c\psi)$$

та

$$(\delta^c\varphi, \delta^c\psi) = \overline{(\delta^c\psi, \delta^c\varphi)} = \overline{(d^c\delta^c\psi, \varphi)} = (\varphi, d^c\delta^c\psi)\,. \qquad ◊$$

Наслідок 1. *Оператор* $-\Delta^c : H^p \to H^p$ *є самоспряженим.*

Тепер розглянемо дискретний аналог оператора зовнішнього коваріантного диференціювання $d^c_A : H^p \to H^{p+1}$ і займемося побудовою формально спряженого з ним оператора $\delta^c_A : H^{p+1} \to H^p$. Для цього нам буде потрібне таке твердження.

Твердження 3. *Нехай* $\varphi \in H^p$ *та* $\psi \in H^{4-p}$. *Тоді виконується співвідношення*

$$\operatorname{tr}\langle V, \varphi \cup \psi\rangle = \operatorname{tr}\langle V, \psi \cup * * \varphi\rangle\,. \tag{26}$$

Д о в е д е н н я. ***1°.*** Випадок $p = 0$. Нехай

$$\varphi = \sum_k \varphi_k x^k, \qquad \psi = \sum_k \psi_k V^k.$$

За означенням (15) маємо

$$\varphi \cup \psi = \sum_k (\varphi_k \psi_k) V^k .$$

Тоді

$$\operatorname{tr}\langle V, \varphi \cup \psi \rangle = \operatorname{tr} \sum_k \varphi_k \psi_k . \tag{27}$$

З іншого боку, оскільки згідно з означенням (16)

$$* * \varphi = \sum_k \varphi_k x^{\tau k} ,$$

то

$$\psi \cup * * \varphi = \sum_k (\psi_k \varphi_k) V^k .$$

Тут і надалі $\tau k = (\tau k_1, \tau k_2, \tau k_3, \tau k_4)$. Отже, отримуємо

$$\operatorname{tr}\langle V, \psi \cup * * \varphi \rangle = \operatorname{tr} \sum_k \psi_k \varphi_k . \tag{28}$$

Використовуючи факт, що для довільних матриць A, B виконується рівність $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, і співставляючи (28) з (27), отримуємо (26).

Аналогічно доводиться випадок $p = 4$.

2°. Випадок $p = 1$. Нехай

$$\varphi = \sum_k \sum_{i=1}^{4} \varphi_k^i e_i^k , \qquad \psi = \sum_k (\psi_k^{123} e_{123}^k + \psi_k^{124} e_{124}^k + \psi_k^{134} e_{134}^k + \psi_k^{234} e_{234}^k) .$$

Тоді, використовуючи (16), отримуємо

$$\operatorname{tr}\langle V, \varphi \cup \psi \rangle = \operatorname{tr} \sum_k (\varphi_k^1 \psi_{\tau_1 k}^{234} - \varphi_k^2 \psi_{\tau_2 k}^{134} + \varphi_k^3 \psi_{\tau_3 k}^{124} - \varphi_k^4 \psi_{\tau_4 k}^{123}) . \tag{29}$$

Легко переконатись, що за умов (12) для довільної p-форми α виконуються співвідношення

$$\alpha = \sum_k \alpha_k^{(p)} s_{(p)}^k = \sum_k \alpha_{\tau_i k}^{(p)} s_{(p)}^{\tau_i k} = \sum_k \alpha_{\sigma_i k}^{(p)} s_{(p)}^{\sigma_i k} \tag{30}$$

для $i = 1, 2, 3, 4$. Звідси, оскільки

$$* * \varphi = -\sum_k \sum_{i=1}^{4} \varphi_k^i e_i^{\tau k} = -\sum_k \sum_{i=1}^{4} \varphi_{\sigma k}^i e_i^k ,$$

то

$$\begin{aligned} \psi \cup * * \varphi &= \sum_k (-\psi_k^{123} \varphi_{\sigma_4 k}^4 + \psi_k^{124} \varphi_{\sigma_3 k}^3 - \psi_k^{134} \varphi_{\sigma_2 k}^2 + \psi_k^{234} \varphi_{\sigma_1 k}^1) V^k = \\ &= \sum_k (-\psi_{\tau_4 k}^{123} \varphi_k^4 V^{\tau_4 k} + \psi_{\tau_3 k}^{124} \varphi_k^3 V^{\tau_3 k} - \psi_{\tau_2 k}^{134} \varphi_k^2 V^{\tau_2 k} + \psi_{\tau_1 k}^{234} \varphi_k^1 V^{\tau_1 k}) . \end{aligned}$$

Отже, маємо

$$\operatorname{tr}\langle V, \psi \cup * * \varphi \rangle = \operatorname{tr} \sum_k (-\psi_{\tau_4 k}^{123} \varphi_k^4 + \psi_{\tau_3 k}^{124} \varphi_k^3 - \psi_{\tau_2 k}^{134} \varphi_k^2 + \psi_{\tau_1 k}^{234} \varphi_k^1) .$$

Враховуючи (29), отримуємо (26).

Подібно доводиться випадок $p = 3$.

3°. Випадок $p = 2$. Нехай тепер φ, ψ – 2-форми вигляду (20). У цьому випадку за означенням (16) маємо

$$\varphi \cup \psi = \sum_k (\varphi_k^{12} \psi_{\tau_{12} k}^{34} - \varphi_k^{13} \psi_{\tau_{13} k}^{24} + \varphi_k^{14} \psi_{\tau_{14} k}^{23} + \varphi_k^{23} \psi_{\tau_{23} k}^{14} - \varphi_k^{24} \psi_{\tau_{24} k}^{13} + \varphi_k^{34} \psi_{\tau_{34} k}^{12}) V^k .$$

Звідси

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\langle V, \varphi \cup \psi \rangle = \operatorname{tr} \sum_k (&\varphi_k^{12} \psi_{\tau_{12} k}^{34} - \varphi_k^{13} \psi_{\tau_{13} k}^{24} + \varphi_k^{14} \psi_{\tau_{14} k}^{23} + \\ &+ \varphi_k^{23} \psi_{\tau_{23} k}^{14} - \varphi_k^{24} \psi_{\tau_{24} k}^{13} + \varphi_k^{34} \psi_{\tau_{34} k}^{12}) . \end{aligned} \tag{31}$$

З іншого боку, оскільки

$$* * \varphi = \sum_k \sum_{i<j}^{4} \varphi_k^{ij} \varepsilon_{ij}^{\tau k}, \tag{32}$$

то, враховуючи (30), отримуємо

$$\psi \cup * * \varphi = \sum_k (\psi_k^{12} \varphi_{\sigma_{34}k}^{34} - \psi_k^{13} \varphi_{\sigma_{24}k}^{24} + \psi_k^{14} \varphi_{\sigma_{23}k}^{23} +$$

$$+ \psi_k^{23} \varphi_{\sigma_{14}k}^{14} - \psi_k^{24} \varphi_{\sigma_{13}k}^{13} + \psi_k^{34} \varphi_{\sigma_{12}k}^{12}) V^k =$$

$$= \sum_k (\psi_{\tau_{34}k}^{12} \varphi_k^{34} V^{\tau_{34}k} - \psi_{\tau_{13}k}^{13} \varphi_k^{24} V^{\tau_{24}k} + \psi_{\tau_{23}k}^{14} \varphi_k^{23} V^{\tau_{23}k} +$$

$$+ \psi_{\tau_{14}k}^{23} \varphi_k^{14} V^{\tau_{14}k} - \psi_{\tau_{13}k}^{24} \varphi_k^{13} V^{\tau_{13}k} + \psi_{\tau_{12}k}^{34} \varphi_k^{12} V^{\tau_{12}k}).$$

Отже,

$$\operatorname{tr} \langle V, \psi \cup * * \varphi \rangle = \operatorname{tr} \sum_k (\psi_{\tau_{34}k}^{12} \varphi_k^{34} - \psi_{\tau_{13}k}^{13} \varphi_k^{24} + \psi_{\tau_{23}k}^{14} \varphi_k^{23} +$$

$$+ \psi_{\tau_{14}k}^{23} \varphi_k^{14} - \psi_{\tau_{13}k}^{24} \varphi_k^{13} + \psi_{\tau_{12}k}^{34} \varphi_k^{12}).$$

Співставляючи отримане співвідношення з (31), маємо (26). ◊

Твердження 4. *Нехай* $A \in H^1$ *− дискретна форма зв'язності вигляду* (17), $\varphi \in H^p$ *та* $\psi \in H^{p+1}$. *Тоді*

$$(d_A^c \varphi, \psi) = (\varphi, \delta_A^c \psi), \tag{33}$$

де

$$\delta_A^c \psi = \delta^c \psi + *^{-1} (* \psi^* \cup * * A)^* + (-1)^{p+1} *^{-1} (A \cup * \psi^*)^*. \tag{34}$$

Д о в е д е н н я. Згідно з означенням (21)

$$(d_A^c \varphi, \psi) = (d^c \varphi, \psi) + (A \cup \varphi, \psi) + (-1)^{p+1} (\varphi \cup A, \psi). \tag{35}$$

Використовуючи означення скалярного добутку (23) та рівність (26), маємо

$$(A \cup \varphi, \psi) = \operatorname{tr} \langle V, A \cup \varphi \cup * \psi^* \rangle = \operatorname{tr} \langle V, \varphi \cup * \psi^* \cup * * A \rangle =$$

$$= (\varphi, *^{-1} (* \psi^* \cup * * A)^*).$$

Тут при останньому переході використано рівність $(\alpha^*)^* = \alpha$, яка справджується для довільних дискретних форм α. Подібно отримуємо рівність

$$(\varphi \cup A, \psi) = \operatorname{tr} \langle V, \varphi \cup A \cup * \psi^* \rangle = (\varphi, *^{-1} (A \cup * \psi^*)^*).$$

Підставляючи два останні співвідношення в (35) і враховуючи (24), отримаємо

$$(d_A^c \varphi, \psi) = (\varphi, \delta^c \psi) + (\varphi, *^{-1} (* \psi^* \cup * * A)^*) + (-1)^{p+1} (\varphi, *^{-1} (A \cup * \psi^*)^*) =$$

$$= (\varphi, \delta^c \psi + *^{-1} (* \psi^* \cup * * A)^* + (-1)^{p+1} *^{-1} (A \cup * \psi^*)^*),$$

звідки відразу випливає (33). ◊

Оператор вигляду

$$-\Delta_A^c \equiv d_A^c \delta_A^c + \delta_A^c d_A^c : H^p \to H^p \tag{36}$$

будемо називати дискретним аналогом оператора типу лапласіана (6).

Твердження 5. *Оператор* (36) *є самоспряженим, тобто*

$$(-\Delta_A^c \varphi, \psi) = (\varphi, -\Delta_A^c \psi).$$

Д о в е д е н н я. Підставляючи в співвідношення (33) замість ψ форму $d_A^c\psi$ і вважаючи, що тепер ψ є p-формою, отримуємо

$$(d_A^c\varphi, d_A^c\psi) = (\varphi, \delta_A^c d_A^c\psi)\,.$$

Це можна зробити, оскільки компоненти $d_A^c\psi$ (див. (21)) задовольняють умови вигляду (12) (для A див. також (18)). Міркуючи подібно та використовуючи твердження 2, отримуємо, що виконується також рівність

$$(\delta_A^c\varphi, \delta_A^c\psi) = (\varphi, d_A^c\delta_A^c\psi)\,.$$

Отже,

$$(d_A^c\varphi, d_A^c\psi) + (\delta_A^c\varphi, \delta_A^c\psi) = (\varphi, (\delta_A^c d_A^c + d_A^c\delta_A^c)\psi)\,,$$

а звідси безпосередньо випливає самоспряженість оператора (36). ◊

Повертаючись до дискретних рівнянь Янґа – Міллса (22), слід відмітити, що з рівності $\delta_A^c F = 0$ (див. (34)) не випливає безпосередньо рівність $d_A^c * F = 0$, як це відбувається в континуальному випадку. Це є наслідком означення дискретного аналога оператора Годжа (16). У континуальному випадку дія оператора Годжа на 2-форми є інволютивною, тобто $*^2 F = F$, в той же час у дискретному випадку оператор $*^2$ зсуває на одиницю вправо всі компоненти дискретної 2-форми (див. (32)). Можливість інволютивного задання дискретного аналога оператора Годжа розглядалась в [3].

1. *Дезин А. А.* Многомерный анализ и дискретные модели. – Москва: Наука, 1990. – 238 с.
2. *Дезин А. А.* Модели, порождаемые уравнениями Янга – Миллса // Дифференц. уравнения. – 1993. – **29**, № **5.** – С. 846–851.
3. *Сущ В. Н.* Дискретні моделі на двовимірній сфері // Доп. НАН України. – 2000. – № **2.** – С. 27–32.
4. *Сущ В. Н.* Калибровочно-инвариантные дискретные модели уравнений Янга – Миллса // Мат. заметки. – 1997. – **61**, № **5** – С. 742–754.
5. *Фрид Д., Уленбек К.* Инстантоны и четырехмерные многообразия. – Москва: Мир, 1988. – 271 с.
6. *Nash C., Sen S.* Topology and geometry for physicists. – London: Acad. Press, 1989. – 311 p.
7. *Sushch V.* Discrete model of Yang – Mills equations in Minkowski space // Cubo A. Math. J. – 2004. – **6,** No. **2.** – P. 35–50.
8. *Sushch V.* Discrete models of the self-dual and anti-self-dual equations // Нелинейные граничные задачи. – 2004. – **14.** – С. 112–117.

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ ОПЕРАТОРОВ, ПОРОЖДАЕМЫЕ УРАВНЕНИЯМИ ЯНГА – МИЛЛСА НА 4-МЕРНОМ ТОРЕ

Построены дискретные аналоги уравнений Янга – Миллса, оператора внешнего ковариантного дифференцирования и сопряженного с ним оператора на комбинаторном 4-мерном торе. Доказано самосопряженность дискретного аналога оператора типа лапласиана.

DISCRETE MODELS OF OPERATORS GENERATED BY THE YANG – MILLS EQUATIONS ON 4-DIMENSIONAL TORUS

The discrete analogs of the Yang – Mills equations, of the exterior covariant differential operator, and of the adjoint operator of one are constructed on the combinatorial 4-dimensional torus. Self-adjointness of a discrete analog of the Laplace type operator is proved.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
Політехніка Кошалінська, Кошалін, Польща

Одержано
27.12.05