УДК 517.53

М. В. Заболоцький, С. І. Тарасюк

ОЦІНКИ ЗНИЗУ ВЕЛИЧИН ТИПУ ТА НИЖНЬОГО ТИПУ δ–СУБГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ ПОРЯДКУ, МЕНШОГО ВІД ОДИНИЦІ

Отримано точні оцінки знизу величин типу та нижнього типу для важливого класу δ–субгармонічних в $\mathbb{R}^m, m \geq 2$, функцій $u = u_1 - u_2$ порядку ρ, $0 < \rho < 1$. Цей клас характеризується тим, що міри Рісса субгармонічних функцій u_1 та u_2 зосереджені відповідно на від'ємній та додатній півосях OX_1.

Нехай $u = u_1 - u_2$ δ–субгармонічна в $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, функція, μ_{u_j} — міра Рісса, асоційована з субгармонічною функцією u_j. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що функції u_j гармонічні в околі початку координат та $u_1(0) = u_2(0) = 0$. Будемо користуватися стандартними позначеннями неванліннівської теорії розподілу значень, наприклад, [4, с. 144–146]: $n(t, u_j) = \mu_{u_j}(\{z : |z| \leq t\})$, $N(r, u_j) = d_m \int\limits_0^r n(t, u_j) t^{1-m} dt$, де $d_m = m-2$ для $m \geq 3$, $d_2 = 1,$ — відповідно міра та усереднена міра Рісса замкненого круга субгармонічної функції u_j,

$$T(r, u) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int\limits_{S(0,r)} u^+(x) d\sigma(x) + N(r, u_2)$$

— неванліннівська характеристика функції $u = u_1 - u_2$, де $u^+ = \max\{u_1, u_2\}$, $S(0, r) = \{x : |x| = r\}$, $c_m = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$. Для $u = u_1 - u_2$ покладемо $N_1(r, u) = N(r, u_1) + N(r, u_2)$, $N_0(r, u) = \max\{N(r, u_1),\ N(r, u_2)\}$. Позначимо через $\delta SH(\rho; 1)$ сім'ю δ–субгармонічних в $\mathbb{R}^m$ функцій порядку $\rho < 1$, а через $\delta SH^*(\rho; 1)$ — підклас функцій $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ множини $\delta SH(\rho; 1)$, у яких міра Рісса субгармонічної функції u_1 зосереджена на від'ємній півосі OX_1, а міра Рісса субгармонічної функції u_2 — на додатній півосі OX_1. Якщо $u = u_1 - u_2 \in \delta SH(\rho; 1)$, то через $u' = u'_1 - u'_2$ позначатимемо функцію з класу $\delta SH^*(1)$ таку, що $N(r, u'_j) = N(r, u_j)$, $j = 1, 2$, при $0 < r < \infty$.

Нехай $u \in \delta SH(\rho; 1)$, $\rho(r)$ — уточнений порядок функції u, $W(r) = r^{\rho(r)}$. Числа

$$\Delta(T) = \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{T(r, u)}{W(r)}, \quad \delta(T) = \varliminf_{r \to +\infty} \frac{T(r, u)}{W(r)}$$

називають відповідно величинами типу та нижнього типу функції $T(r, u)$ або u. Добре відомо, що $0 < \Delta(T) < +\infty, 0 < \Delta(N_0) < +\infty$. Оскільки $N_0(r, u) \leq T(r, u)$, то $\Delta(T) \geq \Delta(N_0)$, $\delta(T) \geq \delta(N_0)$. Ці оцінки є точними і досягаються у випадку, коли функція u — субгармонічна. Так, у випадку $m = 2$ за функцію u можна взяти $\ln |g(z)|$, де $g(z)$ — ціла функція порядку ϱ, $0 < \varrho < 1$, для якої виконується $T(r, g) = \ln M(r, g) = N(r, 0, g) + O(1)$, $r \to +\infty$ [1].

У роботі [2] одержано точні оцінки зверху величин типу $\Delta(T)$ та нижнього типу $\delta(T)$ через величини типу $\Delta(N_0)$ та нижнього типу $\delta(N_0)$. При доведенні цих оцінок істотно використовувались наступні твердження.

Теорема А. *Якщо $u \in \delta SH(\rho; 1)$, то $T(r, u) \leq T(r, u')$.*

Теорема Б. *Нехай* $u = u_1 - u_2 \in \delta SH(\rho;1)$, $w = w_1 - w_2 \in \delta SH(\rho;1)$. *Якщо* $N(r,u_1) \le N(r,w_1), N(r,u_2) \le N(r,w_2)$, *то* $T(r,u') \le T(r,w')$.

З теорем **А** та **Б** випливає, що екстремальними функціями (функціями, при яких досягаються рівності) в оцінках, отриманих в роботі [2], є функції з класу $\delta SH^*(\rho;1)$. Тому актуальною є задача знаходження оцінок знизу величин типу та нижнього типу для функцій цього класу, тобто для δ–субгармонічних функцій u' порядку ρ, $0 < \rho < 1$, з ріссовськими мірами на прямій. У цій роботі такі оцінки нам вдалось отримати через величини типу $\Delta(N_1)$ та нижнього типу $\delta(N_1)$. Оцінки знизу величин типу $\Delta(T)$ та нижнього типу $\delta(T)$ через величини типу $\Delta(N_0)$ та нижнього типу $\delta(N_0)$ для функцій класу $\delta SH^*(\rho;1)$ встановити не вдалось. Головну роль при знаходженні таких оцінок буде відігравати таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $u = u_1 - u_2 \in \delta SH(\rho;1)$, $w = w_1 - w_2 \in \delta SH(\rho;1)$. *Якщо* $N_1(r,u) = N_1(r,w)$ *та* $N(r,w_1) = N(r,w_2)$, *то* $T(r,w') \le T(r,u')$ *і*

$$T(r,w') = \frac{c_{m-1}}{c_m} \int\limits_0^{+\infty} N_1(t,w) Q_m(t,r,\pi/2)\,dt. \tag{1}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $r = |x|$, $x_1 = r\cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi$,

$$P_m(t,r,\theta) = (m-1)r^3 t^{m-2}\cos\theta + r^2 t^{m-1}(m + (m-2)\cos^2\theta) + r t^m (m-1)\cos\theta,$$

$$Q_m(t,r,\phi) = \int\limits_0^{\phi} P_m(t,r,\theta)(\sin\theta)^{m-2}(t^2 + 2tr\cos\theta + r^2)^{-m/2-1}\,d\theta.$$

У роботі [2] показано що, якщо $u = u_1 - u_2 \in \delta SH(\rho;1)$, то

$$T(r,u') = \frac{c_{m-1}}{c_m} \max_{0\le\phi\le\pi} \left\{ \int\limits_0^{\infty} N(t,u_1') Q_m(t,r,\phi)\,dt + \int\limits_0^{\infty} N(t,u_2') Q_m(t,r,\pi-\phi)\,dt \right\}. \tag{2}$$

Оскільки для $x_1 = 0$ виконується $w_1'(x) = w_2'(x)$, то максимум у формулі (2) досягається при $\phi = \pi/2$, і тому отримуємо (1). Далі, враховуючи, що $N_1(r,u) = N_1(r,w)$, маємо

$$T(r,w') = \frac{c_{m-1}}{c_m} \int\limits_0^{+\infty} N_1(t,u) Q_m(t,r,\pi/2)\,dt = \frac{c_{m-1}}{c_m} \left(\int\limits_0^{+\infty} N(t,u_1') Q_m(t,r,\pi/2)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{+\infty} N(t,u_2') Q_m(t,r,\pi-\pi/2)\,dt \right) \le \max_{0\le\phi\le\pi} \frac{c_{m-1}}{c_m} \left(\int\limits_0^{+\infty} N(t,u_1') Q_m(t,r,\phi)\,dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^{+\infty} N(t,u_2') Q_m(t,r,\pi-\phi)\,dt \right) = T(r,u'),$$

що доводить теорему 1. $\diamondsuit$

Перед тим, як навести співвідношення між величинами типів та нижніх типів функцій $T(r,u)$ та $N_1(r,u)$, наведемо деякі допоміжні результати. Нехай $f(x) = x^{-n} + nx^{-n-1}(x-1) - R$, $0 < x < +\infty$, де $0 \le R \le 1$, $n > 0$. Покажемо, що рівняння $f(x) = 0$, $0 < x < +\infty$, має два корені.

Маємо $f(x) \to -\infty$ при $x \to 0+$, $f(x) \to -R$ при $x \to +\infty$, $f(1) = 1 - R \ge 0$, $f'(x) = -n(n+1)x^{-n-2}(x-1)$. Отже, рівняння $f(x) = 0$ має два корені $\nu = \nu(R, n)$ і $\varkappa = \varkappa(R, n)$, $\nu > 1$, $0 < \varkappa < 1$, при $0 < R < 1$. У випадку $R = 1$ маємо $\nu = \varkappa = 1$, при $R = 0$ покладаємо $\nu(0, n) = +\infty$.

Розглянемо рівняння $Te^x = x + 1$, $-\infty < x < +\infty$, де $0 \le T \le 1$. При $0 < T < 1$ це рівняння має два корені $\tau = \tau(T)$ і $\sigma = \sigma(T)$, $\tau > 0$, $\sigma < 0$. При $T = 1$ маємо $\tau = \sigma = 0$, при $T = 0$ покладаємо $\tau(0) = +\infty$.

При $0 < x < +\infty$ покладемо

$$\psi_1(x) = \psi_1(x; R, n) = \int\limits_{x\varkappa^{n/\rho}}^{x\nu^{n/\rho}} \Big\{x^\rho - nx^\rho\Big(\Big(\frac{t}{x}\Big)^{-\rho/n} - 1\Big) - Rx^\rho\Big\} Q_m\Big(t, 1, \frac{\pi}{2}\Big)\, dt, \quad m \ge 3, \tag{3}$$

$$\psi_2(x) = \psi_2(x; T) = \int\limits_{x\exp(\sigma/\rho)}^{x\exp(\tau/\rho)} \Big\{\rho x^\rho \ln\frac{t}{x} + x^\rho - Tx^\rho\Big\} Q_2\Big(t, 1, \frac{\pi}{2}\Big)\, dt. \tag{4}$$

Зауважимо, що $Q_2(t, 1, \pi/2) = (t^2 + 1)^{-1}$. Легко побачити, що $\psi_1(x; 1, n) = \psi_2(x; 1) \equiv 0$. При фіксованому R, $0 < R < 1$, або T, $0 < T < 1$, неважко показати, що підінтегральні вирази в інтегралах (3) та (4) невід'ємні, отже, $\psi_j(x) > 0$ при $0 < x < +\infty$, $j = 1, 2$. Враховуючи, що $Q_m\Big(t, 1, \dfrac{\pi}{2}\Big) = O(t^{-2})$ при $t \to +\infty$, $Q_m\Big(t, q, \dfrac{\pi}{2}\Big) = O(t^{m-2})$ при $t \to 0$, отримуємо, що $\psi_j(x) \to 0$ при $x \to 0$ і $x \to +\infty$, $j = 1, 2$.

Оскільки при $R = 0$ ($T = 0$) маємо $\nu = +\infty$ ($\tau = +\infty$), то $\psi_1(x : 0, n) \to 0$ ($\psi_2(x, 0) \to 0$) при $x \to +\infty$. Нехай

$$\Omega(\rho, m) = \frac{2c_{m-1}}{c_m} \int\limits_0^{+\infty} t^\rho Q_m\Big(t, 1, \frac{\pi}{2}\Big)\, dt,$$

$$\Phi_m(P) = \begin{cases} \max\{\psi_1(x; P, \rho/(m-2) : 0 < x < +\infty\}, & \text{якщо } m \ge 3, \\ \max\{\psi_2(x; P) : 0 < x < +\infty\}, & \text{якщо } m = 2. \end{cases}$$

Теорема 2. *Нехай* $u \in \delta SH(\rho, 1)$, $0 < \rho < 1$, $\Delta(N) = K$, $\delta(N) = L$. *Тоді*

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{T(r, u')}{W(r)} \ge \frac{L}{2}\Omega(\varrho, m), \tag{5}$$

$$\varlimsup_{r\to+\infty} \frac{T(r, u')}{W(r)} \ge \frac{L}{2}\Omega(\varrho, m) + \frac{2c_{m-1}}{c_m} K\Phi_m\left(\frac{L}{K}\right) \tag{6}$$

та існують функції, для яких в (5) *та* (6) *мають місце знаки рівності.*

Д о в е д е н н я. Нехай $w = w_1 - w_2$ — δ–субгармонічна функція така, що $N(r, w_1) = N(r, w_2)$ і $N_1(r, w) = N_1(r, u)$. Тоді за теоремою 1 маємо

$$T(r, u') \ge T(r, w') = \frac{c_{m-1}}{c_m} \int\limits_0^{+\infty} N(t, w) Q_m\Big(t, r, \frac{\pi}{2}\Big)\, dt. \tag{7}$$

Якщо $L = 0$, то нерівність (5) очевидна. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $\rho(r) \equiv \rho$ і $N(r, u) \ge (L - \varepsilon)r^\rho$ для всіх $r > 0$, $0 < \varepsilon < L$. Тоді з (7) отримуємо

$$T(r,u') \geq \frac{c_{m-1}}{c_m}(L-\varepsilon)\int\limits_0^{+\infty} t^\rho Q_m\Big(t,r,\frac{\pi}{2}\Big)\,dt =$$

$$= \frac{L-\varepsilon}{2} r^\rho \frac{2c_{m-1}}{c_m}\int\limits_0^{+\infty} s^\rho Q_m\Big(s,1,\frac{\pi}{2}\Big)\,ds = \frac{L-\varepsilon}{2} r^\rho \Omega(\rho,m).$$

Отже, $\varliminf\limits_{r\to\infty}\dfrac{T(r,u')}{r^\rho} \geq \dfrac{L-\varepsilon}{2}\Omega(\rho,m)$, і спрямовуючи ε до нуля, отримуємо (5).

Доведемо оцінку (6). У випадку $L=K$ нерівність (6) випливає з (5), бо $\Phi_m(1)=0$.

Нехай $L<K$, $0<\varepsilon<K-L$, $L_1=(L-\varepsilon)^+$, $K_1=K-\varepsilon$, $\rho(r)\equiv\rho$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що $N_1(r,u)\geq L_1 r^\rho$ для всіх $r>0$ і існує послідовність (r_k), $r_k\to+\infty$ при $k\to+\infty$, така, що $N_1(r_k,u)=K_1 r_k^\rho$.

1^0. Випадок $m\geq 3$. Покладемо $r^{2-m}=t$, $\rho/(m-2)=n$. Тоді $N_1(t^{1/(2-m)},u)\geq L_1 t^{-n}$, $0<t<+\infty$, $N_1(t_k^{1/(2-m)},u)=K_1 t_k^{-n}, t_k=r_k^{2-m}$. Проведемо з точки $(t_k, K_1 t_k^{-n})$ дотичну до графіка функції $y=K_1 t^{-n}$. Рівнянням цієї дотичної є $y=-K_1 n t_k^{-n-1}(t-t_k)+K_1 t_k^{-n}$. Абсциси точок перетину цієї дотичної з кривою $y=L_1 t^{-n}$ такі: t_k/ν, $t_k/\varkappa$, де $\nu = =\nu(L_1/K_1)$, $\varkappa=\varkappa(L_1/K_1)$. Враховуючи, що функція $N_1(t^{1/(2-m)},u)$ опукла відносно t, одержуємо

$$N_1(r,u)\geq\begin{cases} L_1 r^\rho, & 0\leq r\leq r_k\varkappa^{n/\rho},\\ K_1 r_k^\rho - K_1 n r_k^\rho((r/r_k)^{-\rho/n}-1), & r_k\varkappa^{n/\rho}\leq r\leq r_k\nu^{n/\rho},\\ L_1 r_\rho, & r_k\nu^{n/\rho}\leq r<+\infty.\end{cases}$$

З (7) дістаємо

$$T(r,u')\geq\frac{c_{m-1}}{c_m}\Big(\int\limits_0^{+\infty} L_1 t^\rho Q_m(t,r,\pi/2)\,dt + \int\limits_{r_k\varkappa^{n/\rho}}^{r_k\nu^{n/\rho}}\Big\{\Big(K_1 r_k^\rho - K_1 n r_k^\rho\Big(\Big(\frac{t}{r_k}\Big)^{-\rho/n}\Big)-$$

$$-1\Big)-L_1 t^\rho\Big\}Q_m(t,r,\pi/2)\,dt\Big) = \frac{L_1}{2}\Omega(\rho,m)r^\rho + K_1\frac{c_{m-1}}{c_m}r^\rho\int\limits_{(r_k/r)\varkappa^{n/\rho}}^{(r_k/r)\nu^{n/\rho}}\Big\{\Big(\frac{r_k}{r}\Big)^\rho-$$

$$-n\Big(\frac{r_k}{r}\Big)^\rho\Big(\Big(\frac{sr}{r_k}\Big)^{-\rho/n}-1\Big)-\frac{L_1}{K_1}s^\rho\Big\}Q_m(s,1,\pi/2)ds = \frac{L_1}{2}\Omega(\rho,m)r^\rho+$$

$$+K_1\frac{c_{m-1}}{c_m}r^\rho\psi_1\Big(\frac{r_k}{r},\frac{L_1}{K_1},\frac{\rho}{m-2}\Big).$$

2^0. Випадок $m=2$. Покладемо $t=\ln r, t_k=\ln r_k$. Проведемо з точки $(t_k, K_1\exp(\rho t_k))$ дотичну до графіка функції $y=K_1\exp(\rho t)$, $-\infty<t<+\infty$. Рівняння дотичної має вигляд $y=K_1\exp(\rho t_k)(\rho(t-t_k)+1)$, а $t_k+\sigma/\rho$, $t_k+\tau/\rho$, де $\sigma=\sigma(L_1/K_1)$, $\tau=\tau(L_1/K_1)$ — абсциси точок перетину цієї дотичної з графіком функції $y=L_1\exp(\rho t)$.

Оскільки функція $N_1(e^t,u)$ опукла відносно t, отримуємо

$$N_1(r,u)=\begin{cases} L_1 r^\rho, & 0\leq r\leq r_k e^{\sigma/\rho},\\ K_1 r_k^\rho\Big(\rho\ln\dfrac{r}{r_k}+1\Big), & r_z e^{\sigma/\rho}\leq r\leq r_k e^{\tau/\rho},\\ L_1 r^\rho, & r_k e^{\tau/\rho}\leq r<+\infty.\end{cases}$$

З (6) маємо

$$T(r,u') \ge \frac{c_{m-1}}{c_m}\Bigg(\int\limits_0^{+\infty} L_1 t^\rho Q_2(t,r,\pi/2)\,dt + \int\limits_{r_k\exp(\sigma/\rho)}^{r_k\exp(\tau/\rho)} \Big\{\Big(K_1\rho\ln\frac{t}{r_k}+K_1\Big)r_k^\rho -$$

$$- L_1t^\rho\Big\}Q_2(t,r,\pi/2)\,dt\Bigg) = \frac{L_1}{2}\Omega(\rho,2)r^\rho + K_1r^\rho\frac{c_{m-1}}{c_m}\int\limits_{(r_k/r)\exp(\sigma/\rho)}^{(r_k/r)\exp(\tau/\rho)}\Big\{\rho\Big(\frac{r_k}{r}\Big)^\rho\ln\frac{sr}{r_k}+$$

$$+\Big(\frac{r_k}{r}\Big)^\rho - \frac{L_1}{K_1}s^\rho\Big\}Q_2(s,1,\pi/2)\,ds = \frac{L_1}{2}\Omega(\rho,2)r^\rho + K_1r^\rho\frac{c_{m-1}}{c_m}\psi_2\Big(\frac{r_k}{r};\frac{L_1}{K_1}\Big). \quad (8)$$

Нехай $r = r_k/x$, $0 < x < +\infty$. Тоді з (7) і (8) маємо

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{T(r,u')}{r^\rho} \ge \frac{L}{2}\Omega(\rho,2) + \frac{c_{m-1}}{c_m}K\Phi_m\Big(L_1/K_1\Big).$$

Спрямовуючи ε до нуля, отримуємо (6). Перехід до загального випадку робиться, як в роботі [3]. Приклади, які вказують на непокращуваність оцінок (5) та (6), будуються подібно, як при доведенні теорем у статті [2]. Теорему 2 повністю доведено. ♢

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* О производных и первообразных целых функций вполне регулярного роста // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – Харьков, 1973. – Вып. 18. – С. 70–81.
2. *Заболоцкий Н. В.* Некоторые соотношения для неванлинновских характеристик дельта–субгармонических функций порядка меньше 1 // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – Харьков, 1983. – Вып. 39. – С. 49–56.
3. *Кондратюк А. А.* Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями// Лит. мат. сб. – 1967. – **7**, № 1. – С. 79–117.
4. *Хейман У., Кенneди П.* Субгармонические функции. – Москва: Мир, 1980. – 304 с.

ОЦЕНКИ СНИЗУ ВЕЛИЧИН ТИПА И НИЖНЕГО ТИПА δ–СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОРЯДКА, МЕНЬШЕГО ЕДИНИЦЫ

Получены точные оценки снизу величин типа и нижнего типа важного класса δ–субгармонических в $\mathbb{R}^m, m \ge 2$, функций $u = u_1 - u_2$ порядка $\rho, 0 < \rho < 1$. Этот класс характеризуется тем, что меры Рисса субгармонических функций u_1 и u_2 сосредоточены соответственно на отрицательной и положительной полуосях OX_1.

LOWER ESTIMATES FOR THE QUANTITY TYPE AND LOWER TYPE δ–SUBHARMONIC FUNCTIONS OF ORDER LESS THAN 1

We obtain sharp lower estimates for the quantity of type and lower type for an important class of δ–subharmonic $\mathbb{R}^m, m \ge 2$, functions $u = u_1 - u_2$ of order $\rho, 0 < \rho < 1$. This class is characterized by the condition that Riesz masses of subharmonic u_1 and u_2 are concentrated on the negative and positive rays OX_1 respectively.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано 23.09.05