УДК 519.21

Т. Д. Боднар

СТАТИСТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ДВОВИМІРНОГО ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ

Досліджено поведінку оцінок оптимальних ваг для заданого стану зовнішнього середовища у випадку вибірки за припущення, що матриця повернень цінних паперів має матричний еліптичний розподіл; отримано формулу для вищих моментів у випадку двовимірного портфеля.

Проблема прийняття оптимального рішення за умови ризику розглядалася багатьма дослідниками. Марковіц [6] розвинув середньоваріаційні принципи для пошуку оптимального портфеля за умов невизначеності. Запропоновані принципи визначають поведінку інвестора, яка пов'язана із його функцією корисності. Застосування квадратичної функції корисності в портфельному аналізі, перш за все, пояснюється співпаданням відповідного оптимального портфеля, який будується на основі розв'язку оптимізаційної задачі, та середньоваріаційного оптимального портфеля [1–3, 10]. Крол, Леві та Марковіц [5] зауважили, що середньоваріаційний оптимальний портфель має максимальне значення функції корисності або близьке до нього.

Оскільки параметри розподілу повернень цінних паперів є переважно невідомими величинами, то динамічні моделі формування оптимального портфеля не можуть бути застосовані на практиці. Для формування портфеля інвесторові потрібно спочатку оцінити невідомі параметри. Основною проблемою, розглянутою в даній статті, є вплив оцінок вектора середніх та коваріаційної матриці на поведінку ваг оптимального портфеля.

Припустимо, що зовнішнє середовище може перебувати в одному із N можливих станів $\theta = (\theta_1, ..., \theta_N)$. У випадку, коли зовнішнє середовище перебуває в стані θ_j, позначимо k-вимірний вектор очікуваних повернень цінних паперів портфеля через μ_j, а через Σ_j — його коваріаційну матрицю розмірності $k \times k$. Нехай матриця Σ_j є додатно визначена. Тоді оптимальні портфельні ваги в сенсі максимізації очікуваної квадратичної функції корисності мають вигляд

$$w_{EU,j} = \frac{\Sigma_j^{-1} 1_k}{1_k' \Sigma_j^{-1} 1_k} + \alpha^{-1} S_j \mu_j, \tag{1}$$

де

$$S_j = \Sigma_j^{-1} - \frac{\Sigma_j^{-1} 1_k 1_k' \Sigma_j^{-1}}{1_k' \Sigma_j^{-1} 1_k}, \quad j = 1, 2, ..., N, \tag{2}$$

$1_k = (1, ..., 1)'$ — k-вимірний вектор, коефіцієнт α визначає схильність інвестора до ризику. Випадок $\alpha = \infty$ означає, що інвестор повністю намагається уникнути ризику.

Оптимальний портфель, що визначається вагами (1), називається оптимальним портфелем в сенсі максимізації очікуваної квадратичної функції корисності.

Однією з найбільших проблем, із якою доводиться мати справу інвестору на практиці, є залежність оптимальних портфельних ваг, що визначаються формулами (1) і (2), від невідомих параметрів μ_j і Σ_j. Ці параметри повинні бути оцінені на основі попередніх спостережень. Оцінки оптимальних портфельних ваг отримаємо, якщо замінимо невідомі параметри у формулах (1) і (2) на їх відповідні оцінки. Ці оцінки були розглянуті у роботі [9]. Середнє значення і варіація оцінок були встановлені за припущення, що повернення цінних паперів мають еліптичний розподіл. Проте, виходячи із властивостей розподілу Вішарда [8], дані результати не можуть бути застосовані для оптимального портфеля з двома типами цінних паперів.

У статті розглядається поведінка оцінок оптимальних ваг у випадку вибірки для заданого стану зовнішнього середовища за припущення, що матриця повернень цінних паперів має матричний еліптичний розподіл. Для двовимірного портфеля отримана формула для вищих моментів.

Розглянемо портфель з двома цінними паперами. Вектор повернень в момент часу t позначимо через $X_t = (X_{1t}, X_{2t})'$. Припустимо, що випадкові вектори X_j, $j = 1, ..., n$, є некорельованими й однаково розподіленими з середніми μ_j і коваріаційними матрицями Σ_j в стані θ_j. Позначимо $\hat{\mu}_{\theta_j} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} X_{p|\theta_j} p_p(\theta_j) = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} Y_p(\theta_j)$, де $Y_p(\theta_j)$ — вектор повернень портфельних цінних паперів в момент часу p у θ_j стані зовнішнього середовища, $p_p(\theta_j) = \Pr_p(\theta = \theta_j)$ — ймовірність перебування зовнішнього середовища в стані θ_j в момент часу p, оскільки перехідні ймовірності можуть змінюватися з часом і $Y_p(\theta_j) = X_{p|\theta_j} p_p(\theta_j)$. Тоді оцінка середнього повернення запишеться наступним чином:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} X_p = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{j=1}^{N} X_{p|\theta_j} p_p(\theta_j) = \sum_{j=1}^{N} \hat{\mu}_{\theta_j}.$$

Ваги оптимальних портфелів для даного стану зовнішнього середовища θ_j обчислюються шляхом використання матриці $Y(\theta_j) = (Y_1(\theta_j), ..., Y_n(\theta_j))$ замість матриці $X_{\theta_j} = (X_{1|\theta_j}, ..., X_{n|\theta_j})$. З умови $X_{\theta_j} \sim E_{k\times n}(\mu_j \otimes 1'_n, \Sigma_j, \varphi)$, яка означає, що матриця X_{θ_j} має $k\times n$ –вимірний еліптичний розподіл з середнім $\mu_j \otimes 1'_n$, з коваріаційною матрицею Σ_j і з характеристичною функцією φ, і з властивостей еліптичних розподілів отримуємо $Y(\theta_j) \sim E_{k\times n}(\mu_j \otimes v'_j, \Sigma_j \otimes \Phi_j, \varphi)$, де $v_j = (p_1(\theta_j), ..., p_n(\theta_j))$ і $\Phi_j = \mathrm{diag}(p_1(\theta_j), ..., p_n(\theta_j))$.

Для спрощення позначень надалі індекс j у формулах опускаємо. Вибіркові оцінки невідомих параметрів μ і Σ визначатимемо за відповідними формулами: $\hat{\mu} = Y\dfrac{\Phi^{-1}v}{v'\Phi^{-1}v} = \bar{Y}$ і $\hat{\Sigma} = \dfrac{E(R^2_{(\mathrm{nor})})}{(n-1)E(R^2)} Y\left(\Phi^{-1} - \dfrac{\Phi^{-1}vv'\Phi^{-1}}{v'\Phi^{-1}v}\right)Y'$, де $Y = Y(\theta_j)$; $R^2_{(\mathrm{nor})}$ і R^2 — так звані генеруючі випадкові величини відповідно для нормального і еліптичного розподілів. Зауважимо, що із стохастичного зображення еліптичного випадкового вектора випливає, що генеруюча випадкова величина повністю визначає тип розподілу.

Позначимо $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$, $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ і $\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \end{pmatrix}$, $\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1^2 & \hat{\sigma}_{12} \\ \hat{\sigma}_{12} & \hat{\sigma}_2^2 \end{pmatrix}$ відповідно. Тоді маємо таку оптимальну портфельну вагу:

$$\hat{w}_{EU} = \frac{(\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1)\alpha^{-1} + \hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_{12}}{\hat{\sigma}_1^2 + \hat{\sigma}_2^2 - 2\hat{\sigma}_{12}} =$$

$$= \frac{\alpha^{*-1}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_{2i} - \sum_{i=1}^{n} Y_{1i}\right) + \sum_{i=1}^{n}(Y_{1i} - \bar{Y}_1)^2 - \sum_{i=1}^{n}(Y_{1i} - \bar{Y}_1)(Y_{2i} - \bar{Y}_2)}{\sum_{i=1}^{n}(Y_{1i} - \bar{Y}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_{2i} - \bar{Y}_2)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(Y_{1i} - \bar{Y}_1)(Y_{2i} - \bar{Y}_2)}, \tag{3}$$

де $\alpha^* = \alpha\dfrac{n}{n-1}\dfrac{(nk+2)}{E(R^2)}$. Виведемо моменти оцінок оптимальних ваг для двовимірного випадку. Для цього позначимо

$$d_k = \alpha^{*-k} \sum_{j=\left[\,^{(k+1)}/_{2}\right]}^{k} n^j E(R^{-2j})(nk-2)...(nk-2j)C_{k-j}^{j}\frac{1}{j!}\times$$

$$\times\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}{2}\right)^{k-j}(\mu_2-\mu_1)^{2j-k}, \tag{4}$$

$$\alpha_{j,k} = C_{k-j}^{j}\frac{k!}{j!}r^{k-j}q^{2j-k}, \tag{5}$$

де

$$q = 2(\sigma_1^2-\sigma_{12}), \quad r = \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_{12}. \tag{6}$$

Лема 1. *Нехай дві випадкові величини* X, Y *мають спільну функцію твірних моментів* $g(t_1,t_2) = E\left(e^{t_1X+t_2Y}\right)$. *Тоді існує* $E\left(\frac{X^k}{Y^m}\right)$ *і*

$$E\left(\frac{X^k}{Y^m}\right) = \frac{1}{\Gamma(m)}\int\limits_0^\infty t_2^{m-1}\left(\frac{\partial^k}{\partial t_1^k}g(t_1,-t_2)|_{t_1=0}\right)dt_2, \quad 0\le k\le m. \tag{7}$$

Д о в е д е н н я. Позначимо через Q довільну випадкову величину, що не залежить від X і Y, для якої існує $E(Q^j)$, а через $g_1(.)$ — її функцію твірних моментів. Тоді

$$E\left(\left(\frac{Q+X}{Y}\right)^m\right) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k E\left(\frac{X^k}{Y^m}\right)E(Q^{m-k}). \tag{8}$$

З [7] випливає, що $E\left(\left(\frac{Q+X}{Y}\right)^m\right) = \frac{1}{\Gamma(m)}\int\limits_0^\infty t_2^{m-1}\left(\frac{\partial^k}{\partial t_1^k}\tilde{g}(t_1,-t_2)|_{t_1=0}\right)dt_2$, де $\tilde{g}(.)$ — спільна функція твірних моментів випадкових змінних $Q+X$ і Y. Використовуючи формулу Лейбніца, отримаємо

$$E\left(\left(\frac{Q+X}{Y}\right)^m\right) = \frac{1}{\Gamma(m)}\int\limits_0^\infty t_2^{m-1}\left(\frac{\partial^k}{\partial t_1^k}g_1(t_1)g(t_1,-t_2)|_{t_1=0}\right)dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)}\int\limits_0^\infty t_2^{m-1}\left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k\frac{\partial^k}{\partial t_1^k}g(t_1,-t_2)\frac{\partial^{m-k}}{\partial t_1^{m-k}}g_1(t_1)|_{t_1=0}\right)dt_2 =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k\frac{1}{\Gamma(m)}\int\limits_0^\infty t_2^{m-1}\left(\frac{\partial^k}{\partial t_1^k}g(t_1,-t_2)|_{t_1=0}\right)dt_2 E(Q^{m-k}). \tag{9}$$

Оскільки Q — довільна випадкова величина, то прирівнявши відповідні коефіцієнти біля $E(Q^{m-k})$ у формулах (8) і (9), отримаємо твердження леми. $\diamondsuit$

Лема 2. *Нехай* $Y_1,...,Y_n$ — *незалежні випадкові вектори і* $Y_i \sim N_2(\mu,\Sigma)$, $i=1,...,n$, *і нехай* Σ — *додатно визначена. Тоді для довільних* $n, n>2m+1$, *і* $k, 0\le k\le m$, *справджується рівність*

$$E\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\bar{Y}_1)^2 - \sum\limits_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\bar{Y}_1)(Y_{2i}-\bar{Y}_2)}{\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\bar{Y}_1)^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_{2i}-\bar{Y}_2)^2-2\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\bar{Y}_1)(Y_{2i}-\bar{Y}_2)}\right) =$$

$$= (\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12})^{-m} \sum_{j=\left[\,{}^{(k+1)}/_2\right]}^{k} \frac{\alpha_{j,k}}{2^j \prod\limits_{l=j+1}^{m}(n+2j-1-2l)},$$

де d_k *і* $\alpha_{j,k}$ *визначаються співвідношеннями* (4) *і* (5) *відповідно.*

Д о в е д е н н я. Позначимо

$$\xi_{k,m}=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\bar{Y}_1)^2-\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\bar{Y}_1)(Y_{2i}-\bar{Y}_2)\right)^k}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\bar{Y}_1)^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_{2i}-\bar{Y}_2)^2-2\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_{1i}-\bar{Y}_1)(Y_{2i}-\bar{Y}_2)\right)^m}.$$

Нехай U — $n\times n$ ортогональна матриця, всі елементи першого рядка якої дорівнюють $n^{-\,{}^1/_2}$, а також $\tilde{Y}_1=U(Y_{11},...,Y_{1n})'=(\tilde{Y}_{11},...,\tilde{Y}_{1n})'$ і $\tilde{Y}_2=U(Y_{21},...,Y_{2n})'=(\tilde{Y}_{21},...,\tilde{Y}_{2n})'$. Тоді $\tilde{Y}_1\sim N_n\left(\begin{pmatrix}\sqrt{n}\mu_1\\0\end{pmatrix},\sigma_1 I_n\right)$, $\tilde{Y}_2\sim$ $\sim N_n\left(\begin{pmatrix}\sqrt{n}\mu_2\\0\end{pmatrix},\sigma_2 I_n\right)$ і, отже, $\xi_{k,m}=\dfrac{\left(\sum\limits_{i=2}^{n}\tilde{Y}_{1i}^2-\sum\limits_{i=2}^{n}\tilde{Y}_{1i}\tilde{Y}_{2i}\right)^k}{\left(\sum\limits_{i=2}^{n}\tilde{Y}_{1i}^2+\sum\limits_{i=2}^{n}\tilde{Y}_{2i}^2-2\sum\limits_{i=2}^{n}\tilde{Y}_{1i}\tilde{Y}_{2i}\right)^m}=\dfrac{Q_1^k}{Q_2^m}.$

Згідно з [9] твірна функція випадкових величин Q_1 і Q_2 має вигляд $E(e^{t_1Z_2+t_2Z})=(1-2\tilde{t}_1\tau-(1-\tau^2)\tilde{t}_1^2-2\tilde{t}_2)^{-\,{}^{(n-1)}/_2}$, де $\tilde{t}_1=t_1\sigma_1\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}$ і $\tilde{t}_2=t_2(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12})$, $\tau=\dfrac{\sigma_1^2-\sigma_{12}}{\sigma_1\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}}$ — коваріація випадкових величин $\tilde{Q}_1=\dfrac{\tilde{Y}_1}{\sigma_1}$ і $\tilde{Q}_2=\dfrac{\tilde{Y}_1-\tilde{Y}_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}}$, які мають стандартний нормальний розподіл. Тому [9]

$$\frac{\partial^k}{\partial t_1^k}(p-qt_1-rt_1^2)^{-\beta}|_{t_1=0}=\sum_{j=\left[\,{}^{(k+1)}/_2\right]}^{k} C_{k-j}^j k! s_j r^{k-j}q^{2j-k}p^{-(j+\beta)}=$$

$$=\sum_{j=\left[\,{}^{(k+1)}/_2\right]}^{k} j!\alpha_{j,k}s_j p^{-(j+\beta)},$$

де $\alpha_{j,k}=C_{k-j}^j\dfrac{k!}{j!}r^{k-j}q^{2j-k}$.

Використовуючи лему 1, отримуємо твердження леми 2. $\diamondsuit$

Теорема. *Нехай* $Y=Y(\theta_j)\sim E_{k\times n}(\mu\otimes v',\Sigma\otimes\Phi,\varphi)$, *де* $v=(p_1(\theta_j),...,p_n(\theta_j))$ *і* $\Phi=\mathrm{diag}(p_1(\theta_j),...,p_n(\theta_j))$, Σ *додатно визначена та існують моменти* $E(R^2)$ *і* $E(R^{-2j}), j=1,...,m$. *Тоді для* $n>2m+1$ *маємо*

$$E(\hat{w}_{EU}^m)=(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12})^{-m}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!}d_{m-k}\sum_{j=\left[\,{}^{(k+1)}/_2\right]}^{k}\frac{\alpha_{j,k}}{2^j\prod\limits_{l=j+1}^{m}(n+2j-1-2l)}.$$

Д о в е д е н н я. Із властивостей еліптичних розподілів [4] випливає, що $(Y_{i1},...,Y_{in})\sim E_n(\mu_i 1_n,\sigma_{ii}I_n,\varphi)$, де $R^*=Rb_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}\Leftrightarrow\varphi\in\Phi_n$, $i=1,2$.

Нехай U є $n\times n$ ортогональна матриця, елементи першого рядка якої дорівнюють $n^{-1/2}$. Нехай $\tilde{Y}_1 = U(Y_{11},...,Y_{1n})' = (\tilde{Y}_{11},...,\tilde{Y}_{1n})'$ і $\tilde{Y}_2 = U(Y_{21},...,Y_{2n})' = (\tilde{Y}_{21},...,\tilde{Y}_{2n})'$. Тоді з теореми 2.6.3 [4] випливає, що $\tilde{Y}_1 \sim E_n\left(\begin{pmatrix}\sqrt{n}\mu_1\\0\end{pmatrix}, \sigma_1 I_n, \varphi\right)$ і $\tilde{Y}_2 \sim E_n\left(\begin{pmatrix}\sqrt{n}\mu_2\\0\end{pmatrix}, \sigma_2 I_n, \varphi\right)$. Отже, $\hat{w}_{EU} =$

$$= \frac{\alpha^{*-1}\sqrt{n}(\tilde{Y}_{21}-\tilde{Y}_{11}) + \alpha^{*-1}\sqrt{n}(\mu_2-\hat{\mu}_1) + \sum_{i=2}^{n}\tilde{Y}_{1i}^2 - \sum_{i=2}^{n}\tilde{Y}_{1i}\tilde{Y}_{2i}}{\sum_{i=2}^{n}\tilde{Y}_{1i}^2 + \sum_{i=2}^{n}\tilde{Y}_{2i}^2 - 2\sum_{i=2}^{n}\tilde{Y}_{1i}\tilde{Y}_{2i}} = \frac{Z_1+Z_2+Z_3}{Z},$$

де $Z_1 = \alpha^{*-1}\sqrt{n}(\tilde{Y}_{2i} - \tilde{Y}_{1i})$, $Z_2 = \alpha^{*-1}\sqrt{n}(\mu_2 - \hat{\mu}_1)$, $Z_3 = \sum_{i=2}^{n}\tilde{Y}_{1i}^2 - \sum_{i=2}^{n}\tilde{Y}_{1i}\tilde{Y}_{2i}$ і $Z = \sum_{i=2}^{n}\tilde{Y}_{1i}^2 + \sum_{i=2}^{n}\tilde{Y}_{2i}^2 - 2\sum_{i=2}^{n}\tilde{Y}_{1i}\tilde{Y}_{2i}$. Тоді

$$\hat{w}_{EU}^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \frac{Z_3^k}{Z^m}\sum_{i=0}^{m-k} C_{m-k}^i Z_1^{m-k-i} Z_2^i.$$

Після елементарних обчислень отримуємо

$$E(\hat{w}_{EU}^m) = \sum_{k=0}^{m} C_m^k \sum_{i=0}^{m-k} C_{m-k}^i Z_2^i E\left(Z_1^{m-k-i}\frac{Z_3^k}{Z^m}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k E\left(\frac{Z_{3,(\mathrm{nor})}^k}{Z_{(\mathrm{nor})}^m}\right)\sum_{i=0}^{m-k} C_{m-k}^i Z_2^i E\left(Z_{1,(\mathrm{nor})}^{m-k-i}\right)\frac{E(R^{-i-m+k})}{E(R_{(\mathrm{nor})}^{-i-m+k})},$$

де індекс (nor) означає нормальний розподіл відповідної випадкової величини.

Оскільки $Z_{1,(\mathrm{nor})} \sim N(0, \sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12})$, то

$$E\left(Z_{1,(\mathrm{nor})}^l\right) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad l = 2p+1,\\ (2p-1)!!n^p(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}) & \text{при} \quad l = 2p.\end{cases}$$

Помінявши індекси і враховуючи рівність $E(R_{(\mathrm{nor})}^{-2j}) = \frac{1}{(nk-2)...(nk-2j)}$, отримуємо, що твердження теореми випливає з леми 2. Теорему доведено. $\diamondsuit$

У вигляді ілюстрації запишемо формули для деяких моментів оптимальних портфельних ваг

$$E(\hat{w}_{EU}) = \frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}}\left(\alpha^{-1}\frac{E(R^2)E(R^{-2})}{2(n-3)}(\mu_2-\mu_1) + \sigma_1^2 - \sigma_{12}\right),$$

$$E(\hat{w}_{EU}^2) = \frac{1}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12})^2}\left(\alpha^{-2}\frac{(E(R^2))^2E(R^{-4})}{4n(n-3)(n-5)}(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}) + \right.$$
$$+\alpha^{-2}\frac{(E(R^2))^2E(R^{-4})}{4(n-3)(n-5)}(\mu_2-\mu_1)^2 + \alpha^{-1}\frac{E(R^2)E(R^{-2})}{(n-3)}(\sigma_1^2-\sigma_{12})(\mu_2-\mu_1) +$$
$$\left.+\frac{1}{(n-3)}(\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2 + (\sigma_1^2-\sigma_{12})^2)\right),$$

$$E((\hat{w}_{EU}-E(\hat{w}_{EU}))^2) = \frac{1}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12})^2}\left(\alpha^{-2}\frac{(E(R^2))^2E(R^{-4})}{4n(n-3)(n-5)}(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12}) + \right.$$
$$\left.+\alpha^{-2}\frac{(E(R^2))^2E(R^{-4})}{2(n-3)^2(n-5)}E(R^{-4})(\mu_2-\mu_1)^2 + \frac{1}{(n-3)}(\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2)\right),$$

$$E((\hat{w}_{EU}- E(\hat{w}_{EU}))^3) = \frac{1}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12})^3}\left(\alpha^{-3}\frac{2(E(R^2))^3E(R^{-6})}{(n-3)^3(n-5)(n-7)}(\mu_2-\mu_1)^3+\right.$$

$$+\alpha^{-3}\frac{3(E(R^2))^3E(R^{-6})E(R^{-2})}{2n(n-3)^2(n-5)(n-7)}(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_{12})(\mu_2-\mu_1)+$$

$$\left.+\alpha^{-1}\frac{3E(R^2)E(R^{-2})}{(n-3)^2(n-5)}(\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2)(\mu_2-\mu_1)+\frac{3}{2(n-3)}(\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2)(\sigma_1^2-\sigma_{12})\right).$$

1. *Єлейко Я. І., Боднар Т. Д.* Про використання векторів функцій розподілів стратегій для пошуку оптимальних рішень // Економічна кібернетика. – 2002. – **5**–**6**. – С. 49–56.
2. *Anderson T. W., Fang K. T.* Statistical inference in elliptically contoured and related distributions. – New York: Allerton Press, 1990. – 498 p.
3. *Constandinidis G. M., Maliaris A. G.* Portfolio theory // Handbooks in operations research and managemnet science. – 1995. – **9**. – P. 1–30.
4. *Fang K. T., Zhang Y. T.* Generalized multivariate analysis. – Berlin: Springer–Verlag, 1990. – 220 p.
5. *Kroll Y., Levy H., Markowitz H. M.* Mean–variance versus direct utility maximization // The Journal of Finance. – 1984. – **39**. – P. 47–61.
6. *Markowitz H.* Portfolio selection // The Journal of Finance. – 1952. – **7**. – P. 77–91.
7. *Mathai A. M., Provost S. B.* Quadratic forms in random variables. – Marcel Dekker, 1992. – 367 p.
8. *Okhrin Ya., Schmid W.* Distributional properties of portfolio weights // EUV Working Paper. – 2002. – **9**. – 32 p.
9. *Muirhead R. J.* Aspects of Multivariate Statistical Theory. – NewYork: Wiley, 1982. – 673 p.
10. *Samuelson P. A.* The fundamental approximation theorem of portfolio analysis in terms of means, variances, and higher moments // Review of Economical Studies. – 1970. – **36**. – P. 537–542.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДВУХМЕРНОГО ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ

Исследовано поведение оценок оптимальных весов заданного состояния внешней среды в случае выборки в предположении, что матрица возвращений ценных бумаг имеет матричное эллиптическое распределение; получена формула для высших моментов в случае двухмерного портфеля.

STATISTICAL PROPERTIES OF A TWO DIMENSIONAL OPTIMAL PORTFOLIO

We study the estimator for the optimal portfolio weights in a given state of the external environment assuming asset returns to be matrix elliptically contoured distributed. Higher moments of the estimator are obtained in case of a two dimensional portfolio.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано 27.12.05