УДК: 519.6

Б. М. Подлевський

ЧИСЕЛЬНИЙ АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ БАГАТОПАРАМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ

Багатопараметричній спектральній задачі у скінченновимірному дійсному гільбертовому просторі ставиться у відповідність варіаційна задача на мінімум деякого функціонала. Доведено еквівалентність спектральної та варіаційної задач. На базі градієнтної процедури запропоновано чисельний алгоритм знаходження її власних значень і власних векторів.

Узагальнені задачі на власні значення $T(\lambda)x = 0$ з операторнозначною функцією $T: C \to X(H)$ ($X(H)$ — множина лінійних обмежених операторів, що діють у скінченновимірному гільбертовому просторі H), яка лінійно або нелінійно залежить від декількох спектральних параметрів λ, мають своїм джерелом класичний аналіз. Зокрема, вони виникають при розв'язуванні крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними методом відокремлення змінних. Цим значною мірою пояснюється інтерес як до різних аспектів спектральної теорії, так і до чисельних методів розв'язування таких задач.

Дана робота є узагальненням результатів роботи [2] на випадок багатопараметричної задачі на власні значення. Багатопараметрична спектральна задача заміняється еквівалентною варіаційною задачею на мінімум деякого квадратичного функціонала. У основі чисельного алгоритму мінімізації функціонала лежить варіант градієнтної процедури як метод чисельного знаходження власного вектора, а набір власних значень задачі знаходиться однозначно з системи лінійних рівнянь, побудованої за знайденим наближенням до власного вектора.

1. Узагальнені власне значення та власний вектор лінійної багатопараметричної спектральної задачі. Нехай $H = E^n$ — дійсний скінченновимірний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$, а $A,\ B_i : H \to H$, $i = 1, 2, \ldots, n$,— обмежені лінійні оператори. Багатопараметрична лінійна задача на власні значення, яка асоціюється з цими операторами, полягає у знаходженні такого набору спектральних параметрів $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}^n$, при якому існує нетривіальний розв'язок $x \neq 0$ рівняння

$$A x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i B_i x\,. \tag{1}$$

Такий набір спектральних параметрів λ назвемо узагальненим власним значенням або власним набором, а розв'язок x — узагальненим власним вектором задачі (1). Узагальнене власне значення $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ назвемо простим власним значенням задачі (1), якщо $R\Big(A - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i B_i\Big) \cap M_\lambda = \{0\}$, де $M_\lambda = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i B_i x \ :\ \alpha_i \in \mathbb{R},\ \ x \in N\Big(A - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i B_i\Big)\Big\}$. Тут $R(T_\lambda)$ та $N(T_\lambda)$ — відповідно область значень і власний підпростір оператора $T_\lambda = A - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i B_i$.

Отже, нехай x^* — власний вектор, якому відповідає власний набір спектральних параметрів $\lambda^* = \{\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*\}$, тобто справджується рівність

$$A\,x^* \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* B_i x^* \,. \tag{2}$$

Якщо помножити скалярно обидві частини співвідношення (2) на $B_i x^*$, $i = 1,\ \ldots\ ,\ n$, то отримаємо систему лінійних рівнянь відносно λ^* :

$$\alpha_i(x^*) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{i\,j}(x^*)\,\lambda_j^*\,, \qquad i = 1,\ \ldots\ ,\ n. \tag{3}$$

Надалі будемо вважати, що $\beta^{-1}(x^*)$ існує для будь–якого x^* (це еквівалентно тому, що для $\forall\, x^* \in H \backslash \{0\}$ вектори $B_i x^*$, $i = 1, ..., n$, є лінійно незалежними). Цим ми виключаємо вироджений випадок, у якому $A\,x^* = 0$ і будь–який набір скалярів $\lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ є власним. Отже, для власного вектора x^* набір власних значень $\lambda^* = \{\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*\}$ визначається однозначно з системи (3).

Оскільки A, B_i, $i = 1, \ldots, n$, — обмежені оператори, то $\beta^{-1}(x)$ існує для всіх x з деякого околу власного вектора x^*.

Зроблене припущення дозволяє для x, близьких до x^*, обчислити

$$\alpha_i(x) = (\,Ax,\, B_i x)\,, \quad i = 1, ..., n, \qquad \beta_{ij}(x) = (\,B_i x,\, B_j x), \quad i,\, j = 1, ..., n,$$

і за $\alpha_i(x)$, $i = 1,\ \ldots\ ,\ n$, та $\beta_{i\,j}(x)$, $i, j = 1,\ \ldots\ ,\ n$, побудувати відповідно вектор $\alpha(x) = \{\,\alpha_1(x),\ \alpha_2(x)\,\}$ та матрицю $\beta(x) = \{\,\beta_{ij}(x)\,\}_{i,j=1}^{n}$, а набір параметрів $\lambda(x) \;= \{\,\lambda_1(x),\ \ldots\ ,\ \lambda_n(x)\,\}$ визначити як розв'язок системи $\alpha(x) =$ $= \beta(x) \cdot \Lambda(x)$, тобто

$$\lambda(x) \;=\; \beta^{-1}(x) \cdot \alpha\,(x). \tag{4}$$

2. Власні вектори як точки мінімуму. Розглянемо тепер задачу про знаходження такого набору параметрів $\lambda(x) \;= \{\,\lambda_1(x),\ \ldots\ ,\ \lambda_n(x)\,\}$ і таких векторів x, на яких функціонал

$$F(x) = \frac{1}{2}\left\| Ax - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) B_i x \right\|^2 \quad \forall\, x \;\in H \backslash \{0\} \tag{5}$$

набуває мінімального значення, тобто

$$F(x) \to \inf, \quad x \in U \subset H = \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Доведемо еквівалентність задач (1) та (6).

Лема 1. *Кожний власний вектор задачі* (1) *є стаціонарною точкою функціонала* (5) *і, навпаки, кожна стаціонарна точка функціонала* (5) *є власним вектором задачі* (1).

Д о в е д е н н я. Нехай $T_\lambda x = Ax - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) B_i x$, так що $F(x) = \dfrac{1}{2}\|\, T_\lambda\, x \,\|^2$. Розглянемо приріст функціонала $F(x+h) - F(x)$ для довільних x, $x+h \;\in U$, де U — деяка опукла множина з E^n. Після нескладних викладок отримуємо

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) = \Big(\; T_\lambda x\,,\; \Big[T_\lambda h \;-\; \sum_{i=1}^{n} d\lambda_i(x,h) B_i x \Big] \Big) + \\ + \frac{1}{2}\Big(\Big[T_\lambda h \;-\; \sum_{i=1}^{n} d\lambda_i(x,h) B_i x \Big],\; \Big[T_\lambda h \;-\; \sum_{i=1}^{n} d\lambda_i(x,h) B_i x \Big] \Big) \;+\; O(h^3). \end{aligned} \tag{7}$$

Отже, диференціал від $F(x)$ запишеться у вигляді $dF(x,h) = \Big(T_\lambda x\,,\ \Big[T_\lambda h - -\sum_{i=1}^{n} d\lambda_i(x,h)B_i x\Big]\Big)$. Оскільки $(B_i x,\, T_\lambda x) = \alpha_i(x) - \sum_{j=1}^{n}\lambda_i(x)\beta_{i\,j}(x) = 0$, то звідси випливає, що

$$dF(x,h) = (T_\lambda x\,,\ T_\lambda h\,), \tag{8}$$

а тому для градієнта функціонала (5) отримуємо зображення $\operatorname{grad} F(x) \equiv \equiv \nabla F(x) = T_\lambda^* T_\lambda x$. Отже, $(\nabla F(x), x) = 2F(x)$, так, що $\nabla F(x) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow F(x) = 0$. Це означає, що власний вектор задачі (1) є стаціонарною точкою функціонала (5) і, навпаки. Лему доведено. $\diamondsuit$

Лема 2. *Функціонал* (5) *є опуклим.*

Д о в е д е н н я. Згідно з означенням [1, с. 88] з формули (7) для другого диференціала функціонала (5) отримуємо зображення

$$d^2F(x,h) \equiv (F''(x)h,\ h) = \left\| \, T_\lambda h \; - \; \sum_{i=1}^{n} d\lambda_i(x,h)B_i x \, \right\|^2. \tag{9}$$

Оскільки $d^2F(x,h) \geq 0$ для всіх $x, h \neq 0$, то функціонал $F(x)$ є опуклим [1, с. 173]. Лему доведено. $\diamondsuit$

Тепер на основі лем 1 та 2 справджується така

Лема 3. *Кожний власний вектор задачі* (1) *є точкою мінімуму функціонала* (5) *і, навпаки, кожна точка мінімуму функціонала* (5) *є власним вектором задачі* (1).

Д о в е д е н н я. З леми 1 випливає, що кожний власний вектор задачі (1) є стаціонарною точкою функціонала (5) і, навпаки. Покажемо тепер, що стаціонарна точка є мінімумом функціонала (5). Дійсно, нехай $\lambda^* = \{\lambda_1^*, ..., \lambda_n^*\}$ та x^* — власний набір та власний вектор задачі (1). Тоді $T_{\lambda^*}x^* = 0$ і з формули скінченних приростів для $F(x):\ F(x^*+h) - F(x^*) = (\nabla F(x^*),\, h) + \frac{1}{2}(F''(x^*+ +\theta h)h,\, h),\ 0 < \theta < 1$, враховуючи рівність $\nabla F(x) = 0$ (лема 1) та нерівність (9) (лема 2), отримуємо, що $F(x^* + h) - F(x^*) \geq 0$, тобто $F(x^* + h) \geq F(x^*)$. Це означає, що x^* є точкою мінімуму функціонала $F(x)$. Лему доведено. $\diamondsuit$

Таким чином, розв'язування задачі (1) еквівалентне знаходженню стаціонарних точок функціонала (5), які є його точками мінімуму.

3. Чисельний алгоритм. Цей результат дозволяє побудувати градієнтну процедуру як метод чисельного знаходження власного вектора у вигляді

$$x_{k+1} = x_k - \gamma(x_k)\nabla F(x_k)\ ,\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ ..., \tag{10}$$

де константа $\gamma(x_k)$ на кожному кроці визначається з умови мінімуму функціонала (5) в напрямку (10). Таким чином, з необхідної умови мінімуму функціонала $\dfrac{\partial F}{\partial \gamma} = 0$ знаходимо, що $\gamma(x_k) = \dfrac{(\nabla F(x_k), \nabla F(x_k))}{(T_\Lambda \nabla F(x_k), T_\Lambda \nabla F(x_k))} = \dfrac{\|\nabla F(x_k)\|^2}{\|T_\Lambda \nabla F(x_k)\|^2}$.
Отже, ітераційний процес реалізується за допомогою формул

$$y_{k+1} = x_k - \gamma(x_k)\nabla F(x_k)\ ,\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ ..., \tag{11}$$

$$x_{k+1} = y_{k+1}/\|\, y_{k+1}\,\|, \tag{12}$$

$$\gamma(x_k) = \begin{cases} \dfrac{\|\nabla F(x_k)\|^2}{\|T_\Lambda \nabla F(x_k)\|^2}\,, & \text{якщо } \nabla F(x_k) \neq 0, \\ 0\ , & \text{якщо } \nabla F(x_k) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

При виборі початкового наближення, в певному сенсі близького до власного вектора, зокрема, з власного підпростору, ітераційний процес (11)–(13) збігається до власного вектора x^*, а власне значення $\lambda(x)$ знаходиться однозначно зі співвідношення (4) для $x = x^*$.

У випадку простого узагальненого власного значення задачі (1) для наведеного вище ітераційного процесу справджується така

Теорема. *Нехай* $\lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ *— просте узагальнене власне значення і* N_λ *— його власний підпростір. Тоді для послідовності* $\{x_k\}$, *отриманої за допомогою співвідношень* (11)–(13), *при будь–якому початковому наближенні* $x_0 \in E^n \backslash \{0\}$ $\lim\limits_{k \to \infty} \rho(x_k, N_\lambda) = 0$.

Д о в е д е н н я теореми проводиться за такою схемою. Показується, що для задачі (1) з простим узагальненим власним значенням відповідний їй функціонал (5) є двічі неперервно диференційовним і сильно опуклим, а його градієнт задавольняє умову Ліпшиця з деякою константою $L > 0$. Звідси випливає, що множина Лебега $M(x) = \{x \in E^n \ : \ F(x) \leq F(x_0)\}$ при довільному $x_0 \in E^n$ є опуклою, замкненою і обмеженою множиною, а множина точок мінімуму функціонала $F(x)$ є непустою і складається з єдиної точки мінімуму функціонала $F(x)$ на E^n, до якої збігається послідовність $\{x_n\}$, отримана за допомогою співвідношень (11)–(13) при будь–якому початковому наближенні $x_0 \in E^n \backslash \{0\}$. $\diamondsuit$

Запропонований алгоритм тестувався на прикладах двопараметричних матричних задач. Обчислення проводилися до досягнення точності (наприклад, $\varepsilon = 10^{-6}$) за вектором. Спостерігалася швидка збіжність послідовності до власних векторів для різних початкових наближень (навіть досить далеких від власних векторів).

1. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. – Москва: Наука, 1980. – 520 с.
2. *Подлевський Б. М.* Варіаційний підхід до розв'язування двопараметричних задач на власні значення // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 1. – С. 31–35.

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Многопараметрической спектральной задаче в конечномерном действительном гильбертовом пространстве ставится в соответствие вариационная задача на минимум некоторого функционала. Доказана эквивалентность спектральной и вариационной задач. На базе градиентной процедуры предложен численный алгоритм нахождения ее собственных значений и собственных векторов.

NUMERICAL ALGORITHM OF THE SOLUTION OF LINEAR MULTIPARAMETER EIGENVALUE PROBLEMS

In the finite–dimensional real Hilbert space of the multiparameter spectral problem is put in the correspondence the variational problem on a minimum of some functional. The equivalence of spectral and variational problems is proved. On the basis of gradient procedure the numerical algorithm of the determination of its eigenvalues and eigenvectors is offered.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.10.04