УДК 518:517.948

С. М. Шахно, О. М. Макух

ПРО ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ В УМОВАХ НЕПЕРЕРВНОСТІ ЗА ГЕЛЬДЕРОМ ПОДІЛЕНИХ РІЗНИЦЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Проведено дослідження двох ітераційних методів ньютонівського типу, які використовують апроксимацію похідної Фреше від нелінійного оператора поділеними різницями або їх лінійною комбінацією. При цьому вивчено локальну та напівлокальну збіжність методів в умовах неперервності за Гельдером поділених різниць другого порядку. Встановлено залежність порядку збіжності методів від константи Гельдера. Наведено числовий приклад.

1. Вступ. Широковживаними методами розв'язування нелінійних операторних рівнянь є ітераційно–різницеві методи. Перевагою цих методів є те, що вони не потребують аналітично заданих похідних. У даній праці розглядатимемо два таких методи — метод лінійної інтерполяції [1] і метод з порядком збіжності 1.839... [4]. Раніше їх дослідження проводились при накладанні умов Ліпшиця на поділені різниці другого порядку від нелінійного оператора F [2, 4], а в праці [1] — при умові обмеженості третьої похідної. Дослідимо ці методи з використанням слабших умов — умов Гельдера зі сталою $p \in (0,\ 1]$ на поділені різниці другого порядку від оператора F.

Для розв'язування нелінійного операторного рівняння

$$F(x) = 0, \tag{1}$$

де F — нелінійний оператор, визначений у відкритій області D банахового простору X зі значеннями в банаховому просторі Y, розглядатимемо такі ітераційно–різницеві методи: метод Курчатова [1]

$$x_{n+1} = x_n - [F(2x_n - x_{n-1},\ x_{n-1})]^{-1} F(x_n), \quad n = 0,\ 1,\ \dots\ , \tag{2}$$

і метод, розглянутий в роботі [4],

$$x_{n+1} = x_n - [F(x_n,\ x_{n-1}) + F(x_{n-2},\ x_n) - F(x_{n-2},\ x_{n-1})]^{-1} F(x_n), \tag{3}$$

$n = 0,\ 1,\ \dots .$ Тут $F(\cdot,\cdot)$ — поділена різниця першого порядку від оператора F. Зауважимо, що метод (2) вимагає двох початкових наближень $x_0,\ x_{-1}$, а метод (3) — трьох початкових наближень $x_0,\ x_{-1},\ x_{-2}$.

Наведемо означення поділених різниць першого та другого порядків від оператора F.

Лінійний оператор з X в Y, позначуваний через $F(x,\ y)$, називається поділеною різницею від F за точками x і y, якщо він задовольняє умову

$$F(x,\ y)(x - y) = F(x) - F(y). \tag{4}$$

У випадку $x = y$ будемо вважати, що $F(x, x) = F'(x)$, де F' — похідна Фреше нелінійного оператора F.

Поділеною різницею другого порядку від F за точками x, y та z називатимемо оператор $F(x,\ y,\ z)$, який задовольняє умову

$$F(x,\ y,\ z)(y - z) = F(x,\ y) - F(x,\ z). \tag{5}$$

2. Локальна збіжність методів.

Теорема 1 (про локальну збіжність методу (2)). *Нехай $F : D \subset X \to Y$ — нелінійний оператор, де X, Y — банахові простори. Припустимо, що рівняння (1) має розв'язок x_* в області D, для якого існує оборотна похідна Фреше $F'(x_*)$. Нехай поділені різниці $F(x,\ y)$ та $F(x,\ y,\ z)$ визначені на множині $V = \{x: \ \|x - x_*\| \le 3r_*\} \subset D$ і задовольняють такі умови:*

$$\left\|F'(x_*)^{-1}\left(F(x,\ y) - F(u,\ v)\right)\right\| \le p_*\left(\|x-u\| + \|y-v\|\right), \tag{6}$$

$$\left\|F'(x_*)^{-1}\left(F(u,\ x,\ y) - F(v,\ x,\ y)\right)\right\| \le q_*\|u-v\|^p, \quad p \in (0,\ 1]. \tag{7}$$

Тоді для $x_0, x_{-1} \in U = \{x: \ \|x - x_*\| \le r_*\}$, де r_* є розв'язком рівняння $2^{p+2}q_*r^{p+1} + 3p_*r - 1 = 0$, ітераційний процес (2) є коректно визначеним і послідовність $\{x_n\}_{n\ge 0}$, яка належить U, збігається до x_* і задовольняє нерівність

$$\|x_{n+1} - x_*\| \le \frac{p_*\|x_n - x_*\| + q_*\|x_n - x_{n-1}\|^{p+1}}{1 - 2p_*\|x_n - x_*\| - q_*\|x_n - x_{n-1}\|^{p+1}}\|x_n - x_*\|. \tag{8}$$

Д о в е д е н н я. Введемо позначення $A_n = F(2x_n - x_{n-1},\ x_{n-1})$. Очевидно, якщо $x_n,\ \ x_{n-1} \in U$, то $2x_n - x_{n-1},\ x_{n-1} \in V$. Тоді A_n є оборотний і виконується нерівність

$$\left\|A_n^{-1}F'(x_*)\right\| \le \frac{1}{1 - 2p_*\|x_n - x_*\| - q_*\|x_n - x_{n-1}\|^{p+1}}. \tag{9}$$

Дійсно, з використанням формул (6) і (7) отримаємо

$$||I - F'(x_*)^{-1}A_n|| = ||F'(x_*)^{-1}\left(F(x_*, x_*) - F(x_n, x_*) + F(x_n, x_*) - \right.$$

$$\left. - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})\right)|| \le p_*||x_n - x_*|| + ||F'(x_*)^{-1}\left(F(x_n, x_*) - F(x_n, x_n) + \right.$$

$$\left. + F(x_n, x_n) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})\right)|| \le 2p_*||x_n - x_*|| + ||F'(x_*)^{-1}\left(F(x_n, x_n) - \right.$$

$$\left. - F(x_n, x_{n-1}) + F(x_n, x_{n-1}) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1})\right)|| \le 2p_*||x_n - x_*|| +$$

$$+ ||F'(x_*)^{-1}(F(x_n, x_{n-1}, x_n) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}, x_n))(x_n - x_{n-1})|| \le$$

$$\le 2p_*||x_n - x_*|| + q_*||x_n - x_{n-1}||^{p+1}.$$

З означення r_* маємо

$$2p_*r_* + 2^{p+1}q_*r_*^{p+1} = 1 - p_*r_* - 2^{p+1}q_*r_*^{p+1} < 1. \tag{10}$$

Скориставшись теоремою Банаха, отримаємо формулу (9). Оскільки A_n є оборотний, то можна записати

$$||x_{n+1} - x_*|| = ||x_n - x_* - A_n^{-1}(F(x_n) - F(x_*))|| = || - A_n^{-1}\left(F(x_n, x_*) - \right.$$
$$\left. - A_n\right)(x_n - x_*)|| \le ||A_n^{-1}F'(x_*)||\,||F'(x_*)^{-1}(F(x_n, x_*) - A_n)||\,||x_n - x_*||. \tag{11}$$

Згідно з умовами теореми маємо

$$\left\|F'(x_*)^{-1}\left(F(x_n,\ x_*) - A_n\right)\right\| = \left\|F'(x_*)^{-1}\left(F(x_n,\ x_*) - F(x_n,\ x_n) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + F(x_n,\ x_n) - F(x_n,\ x_{n-1}) + F(x_n,\ x_{n-1}) - F(2x_n - x_{n-1},\ x_{n-1})\right)\right\| \le$$

$$\le p_*||x_n - x_*|| + ||F'(x_*)^{-1}(F(x_n, x_{n-1}, x_n) - F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}, x_n))(x_n - x_{n-1})|| \le$$

$$\le p_*\|x_n - x_*\| + q_*\|x_n - x_{n-1}\|^{p+1}.$$

З (9), (11) видно, що виконується (8). З (8) і (10) отримуємо $\|x_{n+1} - x_*\| < $ $< \|x_n - x_*\| < r_*,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Тому ітераційний процес є добре визначений і послідовність, яку він породжує, належить U. З останньої нерівності і оцінки (8) отримуємо $\lim\limits_{x \to 0} \|x_n - x_*\| = 0$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Наслідок 1. *Порядок збіжності методу* (2) *дорівнює единому додатному кореню рівняння* $m^2 - m - (p+1) = 0:\ m_{\text{К}} = \dfrac{1 + \sqrt{4p+5}}{2}$.

З оцінки (8) випливає, що існують така невід'ємна константа C і натуральне N, для яких виконується умова

$$\|x_{n+1} - x_*\| \le C\|x_{n-1} - x_*\|^{p+1}\|x_n - x_*\|, \quad n \ge N.$$

А з цієї нерівності отримуємо рівняння для визначення порядку збіжності методу. $\diamondsuit$

Теорема 2 (про локальну збіжність методу (3)). *Нехай* $F : D \subset X \to Y$ — *нелінійний оператор, де* X, Y — *банахові простори. Припустимо, що рівняння* (1) *має розв'язок* x_* *в області* D, *для якого існує оборотна похідна Фреше* $F'(x_*)$. *Нехай* F *має поділену різницю першого порядку, яка задовольняє умову Ліпшиця* (6) *та поділену різницю другого порядку, що задовольняє умову Гельдера* (7). *Тоді для довільних* $x_0, x_{-1}, x_{-2} \in U = \{x : ||x - x_*|| \le r_*\} \subset D$, *де* r_* *є розв'язком рівняння* $2^{p+1} q_* r^{p+1} + 3p_* r - 1 = 0$, *ітераційний процес* (3) *є коректно визначеним і послідовність* $\{x_n\}_{n \ge 0}$, *яка належить* U, *збігається до* x_* *і задовольняє нерівність*

$$\|x_{n+1} - x_*\| \le$$
$$\le \frac{p_*\|x_n - x_*\| + q_*\left(\|x_n - x_*\| + \|x_{n-2} - x_*\|\right)^p \|x_{n-1} - x_*\|}{1 - 2p_*\|x_n - x_*\| - q_*\left(\|x_n - x_*\| + \|x_{n-2} - x_*\|\right)^p \|x_{n-1} - x_*\|}\|x_n - x_*\|. \tag{12}$$

Д о в е д е н н я проводиться аналогічно, як у теоремі 1.

Наслідок 2. *Порядок збіжності ітераційного процесу* (3) *є коренем рівняння* $m^3 - m^2 - m - p = 0$.

З оцінки (12) маємо, що існують $C \ge 0$ і натуральне N такі, що виконується нерівність $||x_{n+1} - x_*|| \le C||x_n - x_*||\,||x_{n-1} - x_*||\,||x_{n-2} - x_*||^p,\ n \ge N$. Звідси отримуємо рівняння, корінь $m_{\text{П}}$ якого є порядком збіжності методу (3). $\diamondsuit$

Для порівняння у табл. 1 наведено залежність порядку збіжності розглянутих методів від параметра p.

Таблиця 1:

p	$m_{\text{К}}$	$m_{\text{П}}$
0.0010	1.6184	1.6183
0.0625	1.6456	1.6350
0.1250	1.6726	1.6513
0.2500	1.7247	1.6826
0.5000	1.8228	1.7399
0.7500	1.9142	1.7917
1.0000	2	1.8392

Зауважимо, що у випадку $p = 1$ отримані результати співпадають з отриманими у працях [2, 4].

3. Напівлокальна збіжність методів.

Теорема 3 (про напівлокальну збіжність методу (2)). *Нехай $F : D \subset \subset X \to Y$ — нелінійний оператор, де X, Y — банахові простори, $F(x,y)$ і $F(x,y,z)$ — відповідно перша та друга поділені різниці від F на множині $V_0 = \{x : \|x - x_0\| \le 3r_0\} \subset D$. Припустимо, що лінійний оператор*

$$A_0 = F(2x_0 - x_{-1},\ x_{-1}),$$

де $x_0,\ x_{-1} \in U_0 = \{x :\ \|x - x_0\| \le r_0\}$, є оборотним та існують невід'ємні числа a, c такі, що

$$\|x_0 - x_{-1}\| \le a, \quad \left\|A_0^{-1} F(x_0)\right\| \le c. \tag{13}$$

Нехай виконуються умови

$$\left\|A_0^{-1}\left(F(x,\ y) - F(u,\ v)\right)\right\| \le p_0\left(\|x - u\| + \|y - v\|\right), \tag{14}$$

$$\left\|A_0^{-1}\left(F(u,\ x,\ y) - F(v,\ x,\ y)\right)\right\| \le q_0\|u - v\|^p, \quad p \in (0,\ 1]. \tag{15}$$

Невід'ємне число r_0 задовольняє умови

$$r_0 \ge \frac{c}{1-\gamma}, \quad r_0 < \frac{1 - 2q_0a^{p+1} - p_0c}{2p_0}, \tag{16}$$

де $\gamma = \dfrac{p_0c + q_0a^{p+1}}{1 - q_0a^{p+1} - 2p_0r_0}$ і $0 \le \gamma < 1$. Дійсна послідовність $\{t_n\}_{n \ge -1}$, визначена як

$$t_{-1} = r_0 + a, \quad t_0 = r_0, \quad t_1 = r_0 - c \tag{17}$$

і для $k \ge 0$

$$t_{k+1} - t_{k+2} = \frac{p_0(t_k - t_{k+1}) + q_0(t_{k-1} - t_k)^{p+1}}{1 - q_0a^{p+1} - 2p_0(t_0 - t_{k+1})}\left(t_k - t_{k+1}\right) = B_{k+2}\left(t_k - t_{k+1}\right) \tag{18}$$

— невід'ємна, спадна і збігається до деякого $t_* \in R$ так, що $r_0 - \dfrac{c}{1-\gamma} \le t_* < < t_{-1}$. Тоді ітераційний процес (2) добре визначений і збігається до розв'язку $x_* \in U_0$ рівняння (1). Крім того, справедливі такі оцінки:

$$\|x_n - x_*\| \le t_n - t_* \tag{19}$$

і для $n \ge 1$

$$\|x_n - x_*\| \le \frac{p_0(t_{n-1} - t_n) + q_0(t_{n-2} - t_{n-1})^{p+1}}{1 - q_0a^{p+1} - p_0[(t_0 - t_n) + (t_0 - t_*)]}(t_{n-1} - t_n). \tag{20}$$

Д о в е д е н н я. За допомогою методу математичної індукції доведемо, що для всіх $n \ge 0$ виконується

$$\begin{aligned} &t_{n+1} \ge t_{n+2} \ge r_0 - c\left(1 + \gamma + \gamma^2 + \cdots + \gamma^{n+1}\right) \ge r_0 - \frac{c}{1-\gamma} \ge 0, \quad B_{n+2} \le \gamma; \\ &t_{n+1} - t_{n+2} \le t_n - t_{n+1}. \end{aligned} \tag{21}$$

Використовуючи (18), для $k = 0$ маємо $t_2 \le t_1$, $t_2 \ge r_0 - c(1+\gamma) \ge \ge r_0 - \dfrac{c}{1-\gamma} \ge 0$, $B_2 \le \gamma$ і $t_1 - t_2 \le t_0 - t_1$, тобто виконується (21) при

$n=0$. Припустимо, що нерівності (21) виконуються для $k=0,1,\ldots,n-1$. Доведемо, що вони справджуються для $k=n$. Враховуючи (18), отримуємо $t_{k+1}\geq t_{k+2}$ і за припущенням індукції маємо

$$B_{k+2}=\frac{p_0(t_k-t_{k+1})+q_0(t_{k-1}-t_k)^{p+1}}{1-q_0a^{p+1}-2p_0(t_0-t_{k+1})}\leq$$
$$\leq\frac{p_0(t_{k-1}-t_k)+q_0(t_{k-2}-t_{k-1})^{p+1}}{1-q_0a^{p+1}-2p_0(t_0-t_k)}=B_{k+1}\leq\gamma,$$

а також $t_{k+1}-t_{k+2}\leq t_k-t_{k+1}$. Отже, з (18) і з припущення індукції одержуємо

$$t_{k+2}\geq r_0-c\left(1+\gamma+\gamma^2+\cdots+\gamma^{k+1}\right)=r_0-c\frac{1-\gamma^{k+2}}{1-\gamma}\geq r_0-\frac{c}{1-\gamma}\geq 0.$$

Доведемо за індукцією, що ітераційний процес (2) є добре визначений і що

$$\|x_n-x_{n+1}\|\leq t_n-t_{n+1}. \tag{22}$$

Використовуючи (2), (13), (17) отримаємо, що формула (22) справджується для $n=-1,0$. Нехай $k\in N$ і припустимо, що (22) виконується для всіх $n\leq k$. Нехай $A_{k+1}=F(2x_{k+1}-x_k,\ x_k)$. Тоді з (14) і (15) маємо

$$\left\|I-A_0^{-1}A_{k+1}\right\|=\left\|A_0^{-1}\left(A_0-A_{k+1}\right)\right\|=$$
$$=\left\|A_0^{-1}\left(F(2x_0-x_{-1},x_{-1})-F(2x_{k+1}-x_k,x_k)\right)\right\|\leq$$
$$\leq q_0\|x_0-x_{-1}\|^{p+1}+p_0\left(\|x_0-x_{k+1}\|+\|x_0-x_k\|+\|x_k-x_{k+1}\|\right)\leq$$
$$\leq q_0a^{p+1}+2p_0(t_0-t_{k+1})<1$$

при заданому виборі r_0. За теоремою Банаха A_{k+1} є оборотним і

$$\left\|A_{k+1}^{-1}A_0\right\|\leq\left(1-q_0a^{p+1}-p_0\left(\|x_0-x_{k+1}\|+\|x_0-x_k\|+\|x_k-x_{k+1}\|\right)\right)^{-1}. \tag{23}$$

Зокрема, маємо, що (2) добре визначений для $n=k+1$, а також

$$\|x_{k+1}-x_{k+2}\|=\left\|A_{k+1}^{-1}F(x_{k+1})\right\|=$$
$$=\left\|A_{k+1}^{-1}\left(F(x_{k+1})-F(x_k)-A_k(x_{k+1}-x_k)\right)\right\|\leq$$
$$\leq\left\|A_{k+1}^{-1}A_0\right\|\left\|A_0^{-1}\left(F(x_{k+1},\ x_k)-A_k\right)\right\|\|x_{k+1}-x_k\|.$$

Використовуючи (14) і (15), отримаємо

$$\left\|A_0^{-1}\left(F(x_{k+1},\ x_k)-A_k\right)\right\|\leq p_0\|x_{k+1}-x_k\|+q_0\|x_k-x_{k-1}\|^{p+1}. \tag{24}$$

З останніх трьох оцінок випливає

$$\|x_{k+1}-x_{k+2}\|\leq$$
$$\leq\frac{p_0\|x_{k+1}-x_k\|+q_0\|x_k-x_{k-1}\|^{p+1}}{1-q_0a^{p+1}-p_0\left(\|x_0-x_{k+1}\|+\|x_0-x_k\|+\|x_k-x_{k+1}\|\right)}\|x_{k+1}-x_k\|. \tag{25}$$

З (22) і (18) отримуємо $\|x_{k+1}-x_{k+2}\|\leq t_{k+1}-t_{k+2}$. Отже, доведено, що ітераційний процес (2) добре визначений і оцінка (22) справдхується для всіх n. Тому

$$\|x_n-x_k\|\leq t_n-t_k,\quad -1\leq n\leq k. \tag{26}$$

Отже, послідовність $\{x_n\}$ є фундаментальною в банаховому просторі X і збігається до деякого $x_* \in X$. Спрямовуючи k до нескінченності в (26), отримаємо (19). Елемент $x_* \in X$ є коренем рівняння (1). Дійсно, на підставі (2), (14), (15) запишемо

$$\left\|A_0^{-1}F(x_{k+1})\right\| = \left\|A_0^{-1}\left(F(x_{k+1},\ x_k) - F(2x_k - x_{k-1},\ x_{k-1})\right)(x_{k+1} - x_k)\right\| \leq$$

$$\leq p_0\|x_{k+1} - x_k\|^2 + q_0\|x_k - x_{k-1}\|^{p+1}\|x_{k+1} - x_k\| \to 0 \text{ при } \quad k \to \infty,$$

тобто $F(x_*) = 0$.

Покажемо тепер правильність (20). Використовуючи (14) і (15), знаходимо

$$\left\|I - A_0^{-1}F(x_n,\ x_*)\right\| \leq q_0 a^{p+1} + p_0\left(\|x_0 - x_n\| + \|x_0 - x_*\|\right) \leq$$

$$\leq q_0 a^{p+1} + p_0[(t_0 - t_n) + (t_0 - t_*)] < 1$$

при заданому виборі r_0. За теоремою Банаха $F(x_n,\ x_*)$ оборотний і

$$\left\|F(x_n,\ x_*)^{-1}A_0\right\| \leq \left(1 - q_0 a^{p+1} - p_0\left(\|x_0 - x_n\| + \|x_0 - x_*\|\right)\right)^{-1}. \qquad (27)$$

Використовуючи співвідношення

$$x_n - x_* = F(x_n,\ x_*)^{-1}\left(F(x_n) - F(x_*)\right) = \left(F(x_n,\ x_*)^{-1}A_0\right)A_0^{-1}F(x_n) \qquad (28)$$

та перейшовши до норм, одержимо оцінку (20). Теорему доведено. $\diamondsuit$

Теорема 4 (про напівлокальну збіжність методу (3)). *Нехай $F : D \subset \subset X \to Y$ — нелінійний оператор, де X, Y — банахові простори; $F(x, y)$ і $F(x, y, z)$ — відповідно перша та друга поділені різниці від F на D. Припустимо, що лінійний оператор*

$$A_0 = F(x_0,\ x_{-2}) + F(x_{-1},\ x_0) - F(x_{-2},\ x_{-1}),$$

де $x_0, x_{-1}, x_{-2} \in D$, є оборотним та існують невід'ємні числа a, b, c такі, що

$$\|x_0 - x_{-1}\| \leq a, \quad \|x_{-1} - x_{-2}\| \leq b, \quad \left\|A_0^{-1}F(x_0)\right\| \leq c. \qquad (29)$$

Нехай виконуються умови (14), (15). Невід'ємне число r_0 задовольняє умови

$$r_0 \geq \frac{c}{1-\gamma}, \quad r_0 < \frac{1 - 2q_0 a(a+b)^p - p_0 c}{2p_0}, \qquad (30)$$

де $\gamma = \dfrac{p_0 c + q_0 a(a+b)^p}{1 - q_0 a(a+b)^p - 2p_0 r_0}$ і $0 \leq \gamma < 1$. Дійсна послідовність $\{t_n\}_{n \geq -2}$, визначена як

$$t_{-2} = r_0 + a + b, \quad t_{-1} = r_0 + a, \quad t_0 = r_0, \quad t_1 = r_0 - c, \qquad (31)$$

і для $k \geq 0$

$$t_{k+1} - t_{k+2} = \frac{p_0(t_k - t_{k+1}) + q_0(t_{k-2} - t_k)^p(t_{k-1} - t_k)}{1 - q_0 a(a+b)^p - 2p_0(t_0 - t_{k+1})}(t_k - t_{k+1}) \qquad (32)$$

— невід'ємна, спадна і збігається до деякого $t_* \in R$, так, що $r_0 - \dfrac{c}{1-\gamma} \leq t_* < < t_{-2}$. Тоді ітераційний процес (3) добре визначений і збігається до розв'язку $x_* \in U(x_0,\ r_0) = \{x :\ \|x - x_0\| \leq r_0\}$ рівняння (1). Крім того, справджуються оцінки:

$$\|x_n - x_*\| \leq t_n - t_* \qquad (33)$$

і для $n \geq 1$

$$\|x_n - x_*\| \leq \frac{p_0(t_{n-1} - t_n) + q_0(t_{n-3} - t_{n-1})^p(t_{n-2} - t_{n-1})}{1 - q_0 a(a+b)^p - p_0[(t_0 - t_n) + (t_0 - t_*)]}(t_{n-1} - t_n). \qquad (34)$$

Д о в е д е н н я аналогічне, як у теоремі 3.

4. Єдиність розв'язку.

Теорема 5 (про єдиність розв'язку для методу (2)). *Нехай* $F : D \subset$ $\subset X \to Y$ *— нелінійний оператор, де* X, Y *— банахові простори,* D *— відкрита опукла підмножина. Припустимо, що гіпотези теореми* 3 *справджуються і виконується умова*

$$r_0 < \frac{1 - 2q_0 a^{p+1}}{3p_0}. \tag{35}$$

Тоді ітераційний процес (2) *добре визначений в* $U(x_0, r_0)$ *і збігається до єдиного розв'язку* x_* *рівняння* (1).

Д о в е д е н н я. Існування розв'язку x_* рівняння (1) доведено в теоремі 3. Припустимо, що існує ще один розв'язок y_* цього рівняння в $U(x_0, r_0)$ з r_0, що задовольняє умови (16) і (35). Використовуючи (2), можемо записати

$$x_{n+1} - y_* = x_n - y_* - A_n^{-1} F(x_n) = A_n^{-1}\left(A_n(x_n - y_*) - F(x_n) + F(y_*)\right) =$$

$$= A_n^{-1} A_0 A_0^{-1}\left(F(2x_n - x_{n-1}, x_{n-1}) - F(x_n, y_*)\right)(x_n - y_*)\,.$$

Перейшовши до норми у цьому співвідношенні і використавши (14), (15), (22), (23), отримаємо

$$\|x_{n+1} - y_*\| \le \frac{q_0(t_{n-1} - t_n)^{p+1} + p_0\|x_n - y_*\|}{1 - q_0 a^{p+1} - 2p_0(t_0 - t_n)}\|x_n - y_*\| \le \ldots \le \alpha^{n+1}\|x_0 - y_*\|,$$

де α — верхня границя дробу і $0 < \alpha < 1$ при заданому виборі r_0. З нерівності маємо $y_* = \lim x_n = x_*$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Теорема 6 (про єдиність розв'язку для методу (3)). *Нехай* $F : D \subset$ $\subset X \to Y$ *— нелінійний оператор, де* X, Y *— банахові простори,* D *— відкрита опукла підмножина. Припустимо, що гіпотези теореми* 4 *справджуються і виконується умова*

$$r_0 < \frac{1 - 2q_0 a(a+b)^p}{3p_0}. \tag{36}$$

Тоді ітераційний процес (3) *добре визначений в* $U(x_0, r_0)$ *і збігається до єдиного розв'язку* x_* *рівняння* (1).

Д о в е д е н н я аналогічне, як у теоремі 5.

5. Числові експерименти.

Приклад. Розглянемо крайову задачу

$$\begin{aligned} &x'' + x^{2+p} = 0, \quad p \in (0,\ 1], \\ &x(0) = x(1) = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Для того щоб розв'язати цю задачу, введемо розбиття $t_i = ih$, $i = 0, \ldots, n+1$, де $h = \dfrac{1}{n+1}$, і апроксимуємо другу похідну стандартним різницевим співвідношенням. У результаті до розв'язування отримаємо систему нелінійних рівнянь

$$\begin{aligned} &2x_1 - x_2 - h^2 x_1^{2+p} = 0, \\ &-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} - h^2 x_i^{2+p} = 0, \quad i = 2,\ \ldots, n-1, \\ &-x_{n-1} + 2x_n - h^2 x_n^{2+p} = 0, \end{aligned} \tag{38}$$

яку запишемо у матрично–векторному вигляді $F(x) = Ax - H(x) = 0$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}, \; H(x) = h^2 \begin{pmatrix} x_1^{2+p} \\ \vdots \\ x_i^{2+p} \\ \vdots \\ x_n^{2+p} \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тоді $F'(x) = A - H(x) = A - h^2(2+p)\mathrm{diag}\Big\{x_1^{p+1}, x_2^{p+1}, \dots, x_n^{p+1}\Big\}$. Поділену різницю першого порядку визначаємо за формулою [4]

$$F(z,y)_{ij} = \frac{F(z_1, \dots, z_j, y_{j+1}, \dots, y_n) - F(z_1, \dots, z_{j-1}, y_j, \dots, y_n)}{z_j - y_j}.$$

Тоді

$$F(z,y) = A - h^2 \begin{pmatrix} \dfrac{z_1^{2+p} - y_1^{2+p}}{z_1 - y_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dfrac{z_2^{2+p} - y_2^{2+p}}{z_2 - y_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dfrac{z_n^{2+p} - y_n^{2+p}}{z_n - y_n} \end{pmatrix}.$$

При розв'язуванні цієї задачі початкове та додаткові наближення вибирались наступним чином: $x_0^{(i)} = 5\sin(\pi t_i)$, $x_{-1}^{(i)} = x_0^{(i)} - 10^{-4}$, $x_{-2}^{(i)} = x_0^{(i)} - 2 \cdot 10^{-4}$. Тут верхній індекс i $(i = 1, 2, \dots, n)$ вказує на i–ту компоненту відповідного вектора наближень. Обчислення проводились з точністю $\varepsilon = 10^{-12}$. У випадку $n = 9$ і $p = \dfrac{1}{2}$ розв'язок нелінійної крайової задачі (38) був знайдений за п'ять ітерацій обома методами. Нижче наведено початкове наближення і отриманий розв'язок:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0,000000000000 \\ 1{,}545084971874 \\ 2{,}938926261462 \\ 4{,}045084971874 \\ 4{,}755282581475 \\ 5{,}000000000000 \\ 4{,}755282581475 \\ 4{,}045084971874 \\ 2{,}938926261462 \\ 1{,}545084971874 \\ 0{,}000000000000 \end{pmatrix}, \quad x_5 = \begin{pmatrix} 0,000000000000 \\ 1{,}452151195022 \\ 2{,}878890931592 \\ 4{,}165005508273 \\ 5{,}097090993740 \\ 5{,}442625226296 \\ 5{,}097090993740 \\ 4{,}165005508273 \\ 2{,}878890931592 \\ 1{,}452151195022 \\ 0{,}000000000000 \end{pmatrix}.$$

Відзначимо, що гіпотези теорем з праць [1, 2, 4], на яких базується розв'язування рівняння $F(x) = 0$, для задачі (37) не виконуються.

1. *Курчатов В. А.* Об одном методе линейной интерполяции решения функциональных уравнений// Докл. АН СССР. – 1971. – **198**, № 3. – С. 524–526.
2. *Шахно С., Макух О.* Локальна збіжність ітераційно–різницевих методів розв'язування нелінійних операторних рівнянь// Вісн. Львів. ун–ту. Сер. прикл. матем. інформ., – 2003. – Вип. 7. – С. 124–131.
3. *Argyros I. K.* On an iterative algorithm for solving nonlinear operator equations// Zeitschrift für Anal. und ihre Anwendungen. – 1991. – **10**, No 1. – P. 83–92.

4. *Potra F. A.* On an iterative algorithm of order 1.839... for solving nonlinear operator equations// Numer. Funct. Anal. and Optimiz. – 1984–1985. – **7**, No 1. – P. 75–106.

ОБ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДАХ В УСЛОВИЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПО ГЁЛЬДЕРУ РАЗДЕЛЕННЫХ РАЗНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Исследованы два итерационные метода ньютоновского типа, использующие аппроксимацию производной Фреше оператора нелинейного уравнения разделенными разностями или их линейной комбинацией. При этом изучены локальная и полулокальная сходимость методов в условиях непрерывности по Гёльдеру разделенных разностей второго порядка. Показана зависимость порядка сходимости методов от константы Гёльдера. Приведен численный пример.

ABOUT ITERATIVE METHODS IN CONDITIONS OF HÖLDER CONTINUITY OF THE DIVIDED DIFFERENCES OF THE SECOND ORDER

Two iterative methods of the Newton type using approximation by the Frechet derivative of operator of the nonlinear equation by divided differences or their linear combination are investigated. At the same time local and semilocal convergences of methods in conditions of Hölder continuity of the divided differences of the second order are studied. The dependence convergence order of methods from a Hölder constant is shown. The numerical example is given.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
27.01.05