УДК 517.95

О. М. Бугрій, О. Т. Панат

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ ЗІ ЗМІННИМ СТЕПЕНЕМ НЕЛІНІЙНОСТІ

У обмеженій області розглянуто нелінійну параболічну варіаційну нерівність, в якій степінь нелінійності одного з доданків є функцією просторових змінних. Встановлено умови існування, єдиності та стабілізації розв'язку цієї нерівності.

Вступ. Узагальнені простори Лебега та Соболєва були введені в роботі [9], питання про існування та єдиність розв'язків варіаційних нерівностей в таких просторах досліджувались в роботі [4]. Скінченність часу стабілізації розв'язку параболічної варіаційної нерівності з $\Delta_{p(x)}$–лапласіаном встановлена в статті [3]. У цій праці в обмеженій циліндричній області розглянуто нелінійні параболічні варіаційні нерівності з початковою умовою. Використовуючи методику робіт [1, 7], отримуємо існування, єдиність та деякі властивості розв'язків цих нерівностей.

Нехай $n \in \mathbb{N}, T > 0$ — фіксовані числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$, $\Omega_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega, t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$, $p \in (1,2)$, $q \in L^\infty(\Omega)$,

$$1 < \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} q(x) \le q(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} q(x) < +\infty.$$

Вважатимемо, що межа $\partial\Omega$ області Ω складається з двох кусково–гладких гіперповерхонь Γ_1, Γ_2 ($\overline{\partial\Omega} = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$); можливо, міра однієї з них дорівнює нулеві. Через X позначимо множину тих функцій $v \in W^{1,p}(\Omega)$, які дорівнюють нулеві на Γ_1.

Нехай $L^{q(x)}(\Omega)$ — узагальнений простір Лебега [9], тобто $L^{q(x)}(\Omega) = \Big\{z = z(x) : \int\limits_\Omega |z(x)|^{q(x)}dx < +\infty\Big\}$. Відомо, що цей простір є банаховим простором, якщо на ньому означити норму за допомогою формули $||z; L^{q(x)}(\Omega)|| = \inf\Big\{\lambda > 0 : \int\limits_\Omega |z(x)/\lambda|^{q(x)}dx \le 1\Big\}$. Так само означимо і простір $L^{q(x)}(Q_{0,T})$.

Нехай $V = X \cap L^{q(x)}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Тоді $V \subset L^2(\Omega) \subset V^*$. Означимо простір U та множину K так:

$$U = L^p(0,T;X) \cap L^{q(x)}(Q_{0,T}) \cap L^2(Q_{0,T}),$$

$$K = \{v : \Omega \to \mathbb{R} \mid \psi_1(x) \le v(x) \le \psi_2(x) \quad \text{майже для всіх} \quad x \in \Omega\}.$$

Через $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ позначатимемо скалярні добутки між просторами V^* і V та U^* і U відповідно.

Нехай $a_1, \ldots, a_n, b : \Omega \times (0,T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ — деякі наперед задані функції, $u : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — деяка функція, $\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$. Там, де це не викликатиме двозначності, замість $f(x,t)$, $u_0(x)$, $a_i(x,t,u(x,t),\nabla u(x,t))$, $i = 1,...,n$, $b(x,t,u(x,t),\nabla u(x,t))$, $u(x,t)$ писатимемо просто f, u_0, $a_i(u,\nabla u)$, $i = 1,...,n$, $b(u,\nabla u)$, u, а замість $u(\cdot,t)$ — просто $u(t)$.

Означення. Розв'язком параболічної варіаційної нерівності

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}} \Bigg[v_t(v-u) + \sum_{i=1}^{n} a_i(u, \nabla u)(v_{x_i} - u_{x_i}) + b(u, \nabla u)(v-u) -$$

$$- f(v-u) \Bigg] dxdt \geq \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} |v-u|^2 dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} |v-u_0|^2 dx \qquad (1)$$

називається функція $u \in U \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$, $u(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$, яка задовольняє (1) для всіх чисел $\tau \in (0,T]$ та всіх функцій $v \in U \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$ таких, що $v_t \in U^*$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$.

Вважатимемо, що виконуються такі умови:

(AB): $a_i(x,t,s,\xi)$, $i = 1,...,n$, $b(x,t,s,\xi)$ Означені на $\Omega \times (0,T) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ і задовольняють умову Каратеодорі, тобто є неперервними за (s,ξ) майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$ і вимірними за (x,t) для всіх $(s,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$; крім того, майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$ і для всіх $s, r \in \mathbb{R}$ та всіх $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ виконуються оцінки:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(x,t,s,\xi) - a_i(x,t,r,\eta))(\xi_i - \eta_i) \geq 0,$$

$$(b(x,t,s,\xi) - b(x,t,r,\eta))(s-r) \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,s,\xi)\xi_i \geq a_0 \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p, \quad a_0 > 0,$$

$$b(x,t,s,\xi)s \geq c_0|s|^2 + g_0|s|^{q(x)}, \quad c_0 \in \mathbb{R}, \quad g_0 > 0,$$

$$|a_i(x,t,s,\xi)| \leq a^1 |\xi_i|^{p-1}, \quad a^1 > 0, \quad i = 1,...,n,$$

$$|b(x,t,s,\xi)| \leq b^1(|s| + |s|^{q(x)-1}), \quad b^1 > 0;$$

(F): $f \in L^2(Q_{0,T})$;

(Ψ): $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\Omega)$, $\psi_1(x) \leq 0 \leq \psi_2(x)$ майже для всіх $x \in \Omega$;

(U): $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in K$.

Теорема 1 (єдиність розв'язку). *Нехай коефіцієнти нерівності* (1) *задовольняють умови* **(AB)**–**(U)**. *Тоді параболічна варіаційна нерівність* (1) *не може мати більше одного розв'язку.*

Д о в е д е н н я. Припускаємо, що існують принаймні два розв'язки u^1, u^2 $(u^1 \neq u^2)$ нерівності (1). Розглядаємо сім'ю задач

$$\eta v_t^\eta + v^\eta = (u^1 + u^2)/2, \quad v^\eta(0) = u_0, \quad \eta > 0.$$

Відомо [2, 8], що при кожному фіксованому $\eta > 0$ існує розв'язок цієї задачі — функція $v^\eta \in U \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$, $v_t^\eta \in U$, $v^\eta(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$, і, крім того, $v^\eta \to (u^1 + u^2)/2$ слабко в U та сильно в $L^2(Q_{0,T})$ при $\eta \to +0$. Покладаємо в (1) спочатку $u = u^1$, $v = v^\eta$, потім $u = u^2$, $v = v^\eta$, і додаємо отримані нерівності. Перейшовши до границі при $\eta \to +0$ та використавши умови теореми, одержимо оцінку

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} |u^1 - u^2|^2 dx + c_0 \int\limits_{Q_{0,\tau}} |u^1 - u^2|^2 dxdt \leq 0, \quad \tau \in (0,T),$$

з якої випливає, що $u^1 = u^2$ майже скрізь в $Q_{0,T}$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Теорема 2 (існування розв'язку). *Нехай коефіцієнти* (1) *задовольняють умови* **(AB)**–**(U)**, *і, крім того, майже для всіх* $x \in \Omega$ *та для всіх* $t_1, t_2 \in \in (0,T)$, $(s,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *виконуються оцінки*

$$|a_i(x,t_1,s,\xi) - a_i(x,t_2,s,\xi)| \le h(|t_1-t_2|)|\xi_i|^{p-1}, \quad i=1,...,n,$$

$$|b(x,t_1,s,\xi) - b(x,t_2,s,\xi)| \le \mu(|t_1-t_2|)(|s|+|s|^{q(x)-1}),$$

де $h, \mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ — *неперервні функції,* $h(0)=\mu(0)=0$. *Тоді нерівність* (1) *має розв'язок* u, *для якого виконується оцінка*

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \left[\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^p + |u|^2 + |u|^{q(x)}\right] dxdt \le C_1 \mathtt{F}, \tag{2}$$

де $\mathtt{F} = \int\limits_{\Omega} |u_0|^2 dx + \int\limits_{Q_{0,T}} |f|^2 dxdt$, *стала* C_1 *не залежить від* f, u_0, u.

Д о в е д е н н я. Використаємо метод штрафу [7]. Сім'ю операторів $\{A(t) : V \to V^*, \quad t \in (0,T)\}$ означимо рівністю

$$\langle A(t)w, v\rangle = \int\limits_{\Omega_t} \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(w, \nabla w) v_{x_i} + b(w, \nabla w) v\right] dx, \ w, v \in V, \ t \in (0,T).$$

Нехай $B : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ — оператор штрафу, який діє за таким правилом: $(Bw)(x) = -(w(x)-\psi_1(x))^- + (w(x)-\psi_2(x))^+$, $w \in L^2(\Omega)$. Означимо оператор $\mathtt{A} : U \to U^*$ так:

$$\langle\langle \mathtt{A}w, v\rangle\rangle = \int\limits_0^T \langle A(t)w(t), v(t)\rangle dt, \quad w, v \in U.$$

Розглянемо сім'ю задач зі штрафом

$$u_t^k(t) + A(t)u^k(t) + kBu^k(t) = f(t), \quad t \in (0,T), \tag{3}$$

$$u^k|_{t=0} = u_0, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{4}$$

Відомо, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує розв'язок задачі (3), (4) в сенсі розподілів такий, що $u^k \in U \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$, $u_t^k \in U^*$. Помножимо (3) скалярно на $u^k(t)$ та проінтегруємо за $t \in (0,\tau)$, де $\tau \in (0,T]$. Одержимо

$$\int\limits_0^\tau \langle u_t^k(t) + A(t)u^k(t) + kBu^k(t), u^k(t)\rangle dt = \int\limits_0^\tau \langle f(t), u^k(t)\rangle dt.$$

Використовуючи умови теореми, нерівність Юнга та лему Гронуола, з останньої рівності отримуємо оцінки

$$\sup_{\tau \in (0,T)} \int\limits_{\Omega_\tau} |u^k|^2 dx + \int\limits_{Q_{0,T}} \left[\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^k|^p + |u^k|^2 + |u^k|^{q(x)}\right] dxdt \le C_2 \mathtt{F},$$

$$\int\limits_0^T \langle Bu^k(t), u^k(t)\rangle dt \le \frac{C_2 \mathtt{F}}{k}, \qquad ||\mathtt{A}u^k; U^*|| \le C_3, \tag{5}$$

де C_2, C_3 не залежать від k. Ці оцінки та теорема 5.9 [5, с. 20] гарантують існування такої підпослідовності $\{u^{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \{u^k\}_{k\in\mathbb{N}}$, що

$$u^{k_l} \underset{k_l\to\infty}{\longrightarrow} u \quad * -\text{слабко в} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

$$u^{k_l} \underset{k_l\to\infty}{\longrightarrow} u \;\; \text{слабко в} \;\; U, \qquad \mathtt{A}u^{k_l} \underset{k_l\to\infty}{\longrightarrow} \chi \;\; \text{слабко в} \;\; U^*.$$

Нехай $v \in U \cap C([0,T];L^2(\Omega))$, $v_t \in U^*$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$. Розглядаємо (3) на підпослідовності $\{u^{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$, множимо скалярно на $v(t) - u^{k_l}(t)$, інтегруємо за $t \in (0,\tau)$, де $0 < \tau \le T$, та перший доданок інтегруємо частинами. Оскільки $Bv(t) = 0$ майже для всіх $t \in (0,T)$ і оператор B монотонний, то

$$\int\limits_0^\tau \langle v_t(t) + A(t)u^{k_l}(t) - f(t), v(t) - u^{k_l}(t)\rangle dt \ge \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau} |v - u^{k_l}|^2 dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} |v - u_0|^2 dx. \quad (6)$$

Використовуючи (6) та умови теореми, так само, як в [2, 4], встановлюємо рівність $\chi = \mathtt{A}u$ і те, що з послідовності $\{u^{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$ можна виділити підпослідовність (яку знову позначимо через $\{u^{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}}$), збіжну в просторі $C([0,T];L^2(\Omega))$.

Взявши нижню границю при $k_l \to \infty$ з обох частин (6), отримаємо, що u задовольняє нерівність (1). Покажемо, що $u(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$. Для цього означимо множини

$$\Psi_1 = \{(x,t) \in Q_{0,T} : u(x,t) - \psi_1(x) \ge 0\},$$

$$\Psi_2 = \{(x,t) \in Q_{0,T} : u(x,t) - \psi_2(x) \le 0\}.$$

Використавши оцінки (5), лему 5.3 [5, с. 20] та лему 4.1 [6, с. 98], отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} [|(u-\psi_1)^-|^2 + |(u-\psi_2)^+|^2] dxdt \le$$

$$\le \varliminf_{k_l\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} [|(u^{k_l}-\psi_1)^-|^2 + |(u^{k_l}-\psi_2)^+|^2] dxdt =$$

$$= \varliminf_{k_l\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} [(u^{k_l}-\psi_1)^-(u^{k_l}-\psi_1)^- + (u^{k_l}-\psi_2)^+(u^{k_l}-\psi_2)^+] dxdt =$$

$$= \varliminf_{k_l\to\infty} \left\{ \int\limits_{Q_{0,T}\setminus\Psi_1} (u^{k_l}-\psi_1)^-(\psi_1 - u^{k_l}) dxdt + \int\limits_{Q_{0,T}\setminus\Psi_2} (u^{k_l}-\psi_2)^+(u^{k_l}-\psi_2) dxdt \right\} \le$$

$$\le \varliminf_{k_l\to\infty} \left\{ \int\limits_{Q_{0,T}\setminus\Psi_1} -(u^{k_l}-\psi_1)^- u^{k_l} dxdt + \int\limits_{Q_{0,T}\setminus\Psi_2} (u^{k_l}-\psi_2)^+ u^{k_l} dxdt \right\} \le$$

$$\le \varliminf_{k_l\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} [-(u^{k_l}-\psi_1)^- u^{k_l} + (u^{k_l}-\psi_2)^+ u^{k_l}] dxdt =$$

$$= \varliminf_{k_l\to\infty} \int\limits_{Q_{0,T}} Bu^{k_l} u^{k_l} dxdt \le \varliminf_{k_l\to\infty} \frac{C_2}{k_l} = 0.$$

Остання оцінка доводить, що $u(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$, а, отже, функція u є шуканим розв'язком нерівності (1). Теорему доведено. $\diamondsuit$

Вважатимемо скрізь далі, що $\Gamma_1 = \partial\Omega$, $p \in (1,2)$, $p \geq \dfrac{2n}{n+2}$. Тоді $X = W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, тому $V = W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)$, $U = L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^{q(x)}(Q_{0,T})$.

Зауваження 1. При додаткових умовах на вихідні дані задачі одержимо, що розв'язок нерівності (1) — функція u — задовольняє вкладення $u_t, \mathtt{A}u \in L^2(Q_{0,T})$. Тому функція u задовольнятиме параболічну варіаційну нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \left(u_t - \sum_{i=1}^{n}(a_i(u,\nabla u))_{x_i} + b(u,\nabla u) - f\right)(v-u)dxdt \geq 0 \tag{7}$$

для всіх $t_1, t_2 \in (0,T)$, $t_1 < t_2$, та для всіх функцій $v \in L^2(Q_{0,T})$, $v(t) \in K$ майже для всіх $t \in (0,T)$, а також початкову умову

$$u|_{t=0} = u_0. \tag{8}$$

Діючи так само, як в роботі [1], встановимо деякі властивості розв'язків варіаційної нерівності (1).

Теорема 3 (скінченність часу стабілізації розв'язку). *Нехай нерівність* (1) *має розв'язок* u, *який задовольняє* (7), (8), *і* $u_t, \mathtt{A}u \in L^2(Q_{0,T})$. *Якщо виконуються умови* **(AB)**, **(Ψ)**, **(U)**, *і, крім того,* $c_0 \geq 0$, $f \equiv 0$ *та* $||u_0; L^2(\Omega)|| > 0$, *то існує такий досить великий момент часу* t_0, *що*

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad t \geq t_0, \quad x \in \Omega.$$

Д о в е д е н н я. Візьмемо в (7) $v = 0$ та проінтегруємо другий доданок частинами. Після перетворень отримаємо нерівність

$$\int\limits_{Q_{t_1,t_2}} u_t u \, dxdt + a_0 \int\limits_{Q_{t_1,t_2}} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^p \, dxdt \leq 0, \quad 0 \leq t_1 < t_2 \leq T. \tag{9}$$

Нехай $y(t) = \int\limits_{\Omega} |u(x,t)|^2 dx$, $t \in (0,T)$. Умови теореми забезпечують виконання співвідношення $||u; L^2(\Omega)|| \leq C_4 ||\nabla u; L^p(\Omega)||$. Тому з (9) отримуємо, що $y'(t) + C_5 y^{\frac{p}{2}}(t) \leq 0$, $t \in (0,T)$. Звідси для $\tau \in (0,T]$ одержимо оцінки

$$\int\limits_0^{\tau} \frac{y'(t)}{y^{\frac{p}{2}}(t)} dt + C_5 \tau \leq 0,$$

$$y^{1-\frac{p}{2}}(\tau) \leq y^{1-\frac{p}{2}}(0) - \frac{(2-p)C_5\tau}{2} = ||u_0; L^2(\Omega)||^{2-p} - \frac{(2-p)C_5\tau}{2}.$$

Візьмемо $t_0 \equiv \dfrac{2}{C_5(2-p)} \cdot ||u_0; L^2(\Omega)||^{2-p}$. Тоді для всіх $\tau \geq t_0$ отримаємо, що $y(\tau) = 0$. Отже, $u = 0$ майже скрізь в $Q_{t_0,T}$. Теорему доведено. ◇

Теорема 4 (скінченність швидкості поширення збурень від початкової умови). *Нехай нерівність* (1) *має розв'язок* u, *який задовольняє* (7), (8), *і* $u_t, \mathtt{A}u \in L^2(Q_{0,T})$. *Якщо виконуються умови* **(AB)**, **(Ψ)**, **(U)**, $c_0 \geq 0$, $f \equiv 0$, $||u_0; L^2(\Omega)|| > 0$ *та існують такі* $x_0 \in \Omega$, $R_0 > 0$, *що* $B_{R_0}(x_0) \subset \Omega$, *де* $B_{R_0}(x_0)$ — *куля в* $\mathbb{R}^n$ *радіуса* R_0 *з центром в* x_0, *і*

$$u_0(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in B_{R_0}(x_0), \tag{10}$$

то для кожного $R \in (0, R_0)$ *існує таке досить мале* t_0, *що* $u(x,t) = 0$ *при* $t \in (0,t_0)$, $x \in B_R(x_0)$.

Д о в е д е н н я. Нехай $R_1 \in (0, R_0)$ — довільне число. Для кожного $t_0 \in (0, T]$ з (7) отримаємо

$$\int\limits_0^{t_0} \int\limits_{B_{R_1}(x_0)} u_t u \, dxdt + \int\limits_0^{t_0} \int\limits_{B_{R_1}(x_0)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i(u, \nabla u)}{\partial x_i} \, u \, dxdt +$$
$$+ \int\limits_0^{t_0} \int\limits_{B_{R_1}(x_0)} b(u, \nabla u) u \, dxdt \leq 0. \tag{11}$$

З того, що виконується умова **(AB)**, та оцінок $c_0 \geq 0$, $g_0 > 0$, дістаємо, що $b(u, \nabla u)u \geq c_0|u|^2 + g_0|u|^{q(x)} \geq 0$. До другого доданка в нерівності (11) застосовуємо формулу Гріна. Враховуючи умову **(AB)**, після нескладних перетворень матимемо

$$\frac{1}{2} \int\limits_{B_{R_1}(x_0)} |u(t_0)|^2 dx + a_0 \int\limits_0^{t_0} \int\limits_{B_{R_1}(x_0)} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^p dxdt \leq$$
$$\leq \frac{1}{2} \int\limits_{B_{R_1}(x_0)} |u_0|^2 dx + \int\limits_0^{t_0} \int\limits_{\partial B_{R_1}(x_0)} \sum_{i=1}^{n} a_i(u, \nabla u) u \cos(\nu, x_i) \, d\Gamma dt, \tag{12}$$

де ν — зовнішня одинична нормаль до $\partial B_{R_1(x_0)}$. Позначимо праву частину (12) через J. З (10) випливає, що $J = \int\limits_0^{t_0} \int\limits_{\partial B_{R_1}(x_0)} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(u, \nabla u) u \cos(\nu, x_i) \, d\Gamma dt.$

Зрозуміло, що для всіх $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \geq 0$ виконується оцінка

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)^\beta \leq (n \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\})^\beta \leq n^\beta (\alpha_1^\beta + \ldots + \alpha_n^\beta). \tag{13}$$

Умова **(AB)**, нерівності Гельдера і (13) дають можливість отримати наступну оцінку

$$J \leq |J| \leq a^1 \int\limits_0^{t_0} \int\limits_{\partial B_{R_1}(x_0)} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^{p-1} \cdot |u| \, d\Gamma dt \leq$$
$$\leq a^1 \left(\int\limits_0^{t_0} \int\limits_{\partial B_{R_1}(x_0)} \left(\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^{p-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} d\Gamma dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int\limits_0^{t_0} \int\limits_{\partial B_{R_1}(x_0)} |u|^p \, d\Gamma dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$
$$\leq C_6 \left(\int\limits_0^{t_0} \int\limits_{\partial B_{R_1}(x_0)} \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^p \, d\Gamma dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \cdot \left(\int\limits_0^{t_0} \int\limits_{\partial B_{R_1}(x_0)} |u|^p \, d\Gamma dt \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{14}$$

Продовжуємо оцінювати J зверху. Відомо [1, с. 115], що для довільного $v \in \in W^{1,p}(\Omega)$ виконується оцінка

$$||v||^p_{L^p(\partial B_{R_1}(x_0))} \leq C_7 (||\nabla v||_{L^p(B_{R_1}(x_0))} + ||v||_{L^2(B_{R_1}(x_0))})^{\lambda p} \cdot ||v||^{(1-\lambda)p}_{L^2(B_{R_1}(x_0))},$$

де $\lambda = \dfrac{2 + (p-2)n}{2 + (p-2)n + 2(p-1)}$, стала C_7 не залежить від v. Враховуючи останнє співвідношення і оцінку (13), можемо записати наступне:

$$\left(\int\limits_0^{t_0} \int\limits_{\partial B_{R_1}(x_0)} |u|^p \, d\Gamma dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq C_8\left(\int\limits_0^{t_0}(||\nabla u||_{L^p(B_{R_1}(x_0))}+||u||_{L^2(B_{R_1}(x_0))})^{\lambda p}\cdot||u||^{(1-\lambda)p}_{L^2(B_{R_1}(x_0))}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq C_9\left(\int\limits_0^{t_0}(||\nabla u||^{\lambda p}_{L^p(B_{R_1}(x_0))}+||u||^{\lambda p}_{L^2(B_{R_1}(x_0))})\cdot||u||^{(1-\lambda)p}_{L^2(B_{R_1}(x_0))}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\leq$$

$$\leq C_{10}\left(\int\limits_0^{t_0}\left[\left(\int\limits_{B_{R_1}(x_0)}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^p\,dx\right)^{\lambda}\cdot\left(\int\limits_{B_{R_1}(x_0)}|u|^2\,dx\right)^{\frac{(1-\lambda)p}{2}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\int\limits_{B_{R_1}(x_0)}|u|^2\,dx\right)^{\frac{p}{2}}\right]dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{15}$$

Враховуючи оцінки (14)–(15), нерівність (12) перетвориться до вигляду

$$\frac{1}{2}\int\limits_{B_{R_1}(x_0)}|u(t_0)|^2dx+a_0\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{B_{R_1}(x_0)}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^pdxdt\leq$$

$$\leq C_{11}\left(\int\limits_0^{t_0}\int\limits_{\partial B_{R_1}(x_0)}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^p\,d\Gamma dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\cdot\left(\int\limits_0^{t_0}\left[\left(\int\limits_{B_{R_1}(x_0)}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^p\,dx\right)^{\lambda}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\int\limits_{B_{R_1}(x_0)}|u|^2\,dx\right)^{\frac{(1-\lambda)p}{2}}+\left(\int\limits_{B_{R_1}(x_0)}|u|^2\,dx\right)^{\frac{p}{2}}\right]dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{16}$$

Фіксуємо довільне t_1 з проміжку $(t_0,T]$ і беремо супремум за всіма $t_0\in(0,t_1)$ від обох частин (16). Оскільки $\lambda\in(0,1)$, то $\dfrac{1}{\lambda}\in(1,+\infty)$ і тоді з нерівності Гельдера отримуємо, що $\int\limits_0^{t_1}z^{\lambda}(t)\;dt\;\leq\;\left(\int\limits_0^{t_1}z^{\lambda\cdot\frac{1}{\lambda}}(t)dt\right)^{\lambda}\cdot\left(\int\limits_0^{t_1}1^{\frac{1}{1-\lambda}}dt\right)^{1-\lambda}=$ $=\left(\int\limits_0^{t_1}z(t)\,dt\right)^{\lambda}\cdot t_1^{1-\lambda}$. Тому

$$\frac{1}{2}\sup_{0<t_0<t_1}\int\limits_{B_{R_1}(x_0)}|u(t_0)|^2dx+a_0\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{B_{R_1}(x_0)}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^pdxdt\leq$$

$$\leq C_{11}\left(\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{\partial B_{R_1}(x_0)}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^pd\Gamma dt\right)^{\frac{p-1}{p}}\cdot\left[\left(\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{B_{R_1}(x_0)}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^pdxdt\right)^{\lambda}\times\right.$$

$$\left.\times\sup_{0<t_0<t_1}\left(\int\limits_{B_{R_1}(x_0)}|u|^2dx\right)^{\frac{(1-\lambda)p}{2}}\cdot t_1^{1-\lambda}+\sup_{0<t_0<t_1}\left(\int\limits_{B_{R_1}(x_0)}|u|^2dx\right)^{\frac{p}{2}}\cdot t_1\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{17}$$

$t_1\in(0,T)$. Введемо позначення: $g_1,g_2:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$,

$$g_1(R_1)\overset{\text{def}}{=}\sup_{0<t_0<t_1}\int\limits_{B_{R_1}(x_0)}|u|^2dx,\qquad g_2(R_1)\overset{\text{def}}{=}\int\limits_0^{t_1}\int\limits_{B_{R_1}(x_0)}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}|^pdxdt,$$

$R_1 \in (0, R_0)$. Очевидно, що

$$\int\limits_0^{t_1} \int\limits_{\partial B_{R_1}(x_0)} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^p d\Gamma dt = \frac{d}{dR_1}\left(\int\limits_0^{t_1} dt \int\limits_0^{R_1} dr \int\limits_{\partial B_r(x_0)} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^p d\Gamma\right) = g_2'.$$

Тепер запишемо (17), використовуючи введені позначення та співвідношення. Отримаємо

$$\frac{1}{2}g_1 + a_0 g_2 \le C_{11} {g_2'}^{\frac{p-1}{p}} (g_2^\lambda g_1^{\frac{(1-\lambda)p}{2}} t_1^{1-\lambda} + g_1^{\frac{p}{2}} t_1)^{\frac{1}{p}}. \tag{18}$$

Далі будемо перетворювати праву частину останньої нерівності до простішого вигляду. Оскільки $g_i \le g_1 + g_2$, $i = 1, 2$, то поклавши $t_1^\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \max\{t_1^{1-\lambda},\ t_1\}, \gamma > 0$,

$(g_1 + g_2)^\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \max\{(g_1 + g_2)^{\frac{(1-\lambda)p}{2} + \lambda},\ (g_1 + g_2)^{\frac{p}{2}}\}$, $0 < \kappa < 1$, одержимо оцінку $(g_2^\lambda g_1^{\frac{(1-\lambda)p}{2}} t_1^{1-\lambda} + g_1^{\frac{p}{2}} t_1)^{\frac{1}{p}} \le t_1^{\frac{\gamma}{p}} (g_2^\lambda g_1^{\frac{(1-\lambda)p}{2}} + g_1^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{p}} \le 2^{\frac{1}{p}} t_1^{\frac{\gamma}{p}} (g_1 + g_2)^{\frac{\kappa}{p}}$. Тоді (18) матиме вигляд $\dfrac{1}{2}g_1 + a_0 g_2 \le 2^{\frac{1}{p}} C_{11} {g_2'}^{\frac{p-1}{p}} (g_1 + g_2)^{\frac{\kappa}{p}} t_1^{\frac{\gamma}{p}}$. Використавши нерівність Юнга, отримаємо $g_1 + 2a_0 g_2 \le \varepsilon(g_1 + g_2) + C_{12} {g_2'}^{\frac{p-1}{p-\kappa}} t_1^{\frac{\gamma}{p-\kappa}}$, тобто $(1-\varepsilon)g_1 + $ $+(2a_0 - \varepsilon)g_2 \le C_{12} {g_2'}^{\frac{p-1}{p-\kappa}} t_1^{\frac{\gamma}{p-\kappa}}$. Зафіксувавши досить мале $\varepsilon > 0$, одержимо $C_{13} g_2 \le {g_2'}^{\frac{1}{\beta}} t_1^{\frac{\mu}{\beta}}$, де $\mu = \dfrac{\gamma}{p-1} > 0$, $\beta = \dfrac{p-\kappa}{p-1} \in (0, 1)$. Тоді

$$C_{13}^\beta t_1^{-\mu} - g_2^{-\beta}(R_1) g_2'(R_1) \le 0. \tag{19}$$

Нехай $R \in (0, R_0)$. Проінтегруємо (19) за R_1 на проміжку (R, R_0). Отримаємо наступні оцінки: $C_{13}^\beta t_1^{-\mu} \int\limits_R^{R_0} dR_1 - \int\limits_R^{R_0} g_2^{-\beta}(R_1) g_2'(R_1)\, dR_1 \le 0$,

$$C_{13}^\beta t_1^{-\mu}(R_0 - R) - \frac{g_2^{1-\beta}(R_0)}{1-\beta} + \frac{g_2^{1-\beta}(R)}{1-\beta} \le 0.$$

Скориставшись оцінкою (2) та умовами теореми, звідси отримаємо

$$g_2^{1-\beta}(R) \le g_2^{1-\beta}(R_0) - C_{14} t_1^{-\mu}(R_0 - R) \le \left(\int\limits_{Q_{0,T}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^p dxdt\right)^{1-\beta} -$$

$$- C_{14} t_1^{-\mu}(R_0 - R) \le ||u_0; L^2(\Omega)||^{1-\beta} - C_{14} t_1^{-\mu}(R_0 - R).$$

Тому, якщо вибрати $t_2 = (C_{14}(R_0 - R)/||u_0; L^2(\Omega)||^{1-\beta})^{\frac{1}{\mu}}$, то для $t_1 \in (0, t_2]$ виконується нерівність $g_2^{1-\beta}(R) \le 0$, тобто $u(x,t) = 0$ в кулі $B_R(x_0)$, коли $t \le t_2$, $R \in (0, R_0)$. Теорему доведено. $\diamondsuit$

Зауваження 2. Нехай $q_1, q_2 \in (1, +\infty)$, область Ω задовольняє умови: $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Найпростішим представником функції b з (1) є така функція: $b(x,t,s,\xi) = \begin{cases} s + |s|^{q_1 - 2}s, & x \in \Omega_1,\ t \in (0,T),\ (s,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}, \\ s + |s|^{q_2 - 2}s, & x \in \Omega_2,\ t \in (0,T),\ (s,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1}. \end{cases}$

У цьому випадку (1) моделює, зокрема, поширення тепла в тілі Ω, яке складається з двох частин Ω_1, Ω_2, які мають різні теплові властивості, за умови ідеального контакту на стику Ω_1 з Ω_2.

Висновки. У статті розглянуто параболічну варіаційну нерівність, степінь нелінійності одного з доданків якої є функцією від просторових змінних. Отримано умови існування та єдиності розв'язку цієї нерівності. При додаткових умовах на цей розв'язок доведено, що з деякого моменту часу він стає нульовим. Крім того, якщо при $t = 0$ розв'язок варіаційної нерівності дорівнює нулеві в деякій кулі, то в „меншій" кулі він ще певний час залишається нульовим.

1. *Антонцев С. Н.* О характере возмущений, описываемых решениями многомерных вырождающихся параболических уравнений // Динамика жидкости со свободными границами. – 1979. – Вып. 40. – С. 114–121.
2. *Бугрій О. М.* Параболічні варіаційні нерівності в узагальнених просторах Лебега // Наук. зап. Вінницьк. держ. пед. ун–ту імені М. Коцюбинського. Сер. фіз.–мат. – 2002. – Вип. 1. – С. 310–321.
3. *Бугрій О. М.* Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності // Мат. студії. – 2005. – (подано до друку).
4. *Бугрій О. М., Лавренюк С. П.* Параболічна варіаційна нерівність, що узагальнює рівняння політропної фільтрації // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 7. – С. 867–878.
5. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва, 1978. – 336 с.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
7. *Лионс Ж. –Л.* Некоторые методы решения нелинейних краевых задач. – Москва, 1972. – 608 с.
8. *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально–операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1985. – 184 с.
9. *Kovacik O., Rakosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J. – 1991. – **41**, (116). – P. 592–618.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ С ПЕРЕМЕННОЙ СТЕПЕНЬЮ НЕЛИНЕЙНОСТИ

В ограниченной области рассмотрено нелинейное параболическое вариационное неравенство. Степень нелинейности одного коэффициента неравенства является функцией от пространственных переменных. Получены условия существования, единственности и стабилизации решения этого неравенства.

SOME PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF A PARABOLIC VARIATIONAL INEQUALITIES WITH VARIABLE EXPONENT OF NONLINEARITY

We consider a nonlinear parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity. Existance, uniqueness and stabilizations properties of the solutions this problem are investigate.

Одержано

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

06.07.05