УДК 539.3

Е. В. Алтухов

ОДНОРОДНЫЕ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА ДИАФРАГМЫ

Рассматривается трехмерная задача связанных термоупругих колебаний изотропных пластин. Плоские грани пластин покрыты диафрагмой и поддерживаются при нулевой температуре или теплоизолированы. Методом И. И. Воровича получены однородные решения для данного класса задач теории упругости. Решение задачи сведено к интегрированию счетного множества метагармонических уравнений.

Обзор исследований в области обобщенной динамической теории термоупругости изотропных и анизотропных тел приведен в монографиях [3–6]. Для решения трехмерных задач теории упругости, в том числе рассматриваемых ниже, одним из эффективных является метод однородных решений. В работе [2] получены дисперсионные уравнения в задаче связанных термоупругих колебаниях изотропной пластины, плоские грани которой свободны от напряжений. Символическим методом А. И. Лурье в статье [7] задача сведена к двумерной и приведены известные приближенные уравнения для тонких пластин. Другие варианты граничных условий на плоских гранях пластины для данного класса задач в рамках методов однородных решений не рассматривались.

Здесь получены однородные решения связанных уравнений термоупругости для изотропных пластин, плоские грани которых покрыты диафрагмой.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластину толщиной $2h$, ослабленную цилиндрическими полостями и ограниченную плоскими гранями и цилиндрическими поверхностями полостей. Выберем прямоугольную систему координат $o\tilde{x}_1\,\tilde{x}_2\,\tilde{x}_3$ так, чтобы срединная плоскость пластины $\tilde{x}_3 = 0$ совпадала с координатной плоскостью $o\tilde{x}_1\,\tilde{x}_2$. Наряду с координатами $\tilde{x}_i$ $(i = 1, \ldots, 3)$ введем безразмерные прямоугольные координаты

$$x_1 = \tilde{x}_1/R, \quad x_2 = \tilde{x}_2/R, \quad x_3 = \lambda^{-1}\tilde{x}_3/R, \quad \lambda = h/R,$$

где R – характерный размер пластины.

На торцах пластины $x_3 = \pm 1$ будем предполагать заданными следующие механические:

$$\sigma_{33}(x_1,\ x_2,\ \pm 1) = 0, \quad u_j(x_1,\ x_2,\ \pm 1) = 0 \quad (j = 1, 2), \tag{1}$$

и тепловые граничные условия:

$$u_4(x_1,\ x_2,\ \pm 1) = 0 \tag{2}$$

или

$$\partial_3 u_4(x_1,\ x_2,\ \pm 1) = 0, \tag{3}$$

где u_j, σ_{33}, u_4 — амплитудные значения перемещений, напряжений и температуры; ∂_3 — производная по переменной x_3. Условия (1) соответствуют случаю, когда плоские грани пластины связаны с диафрагмой, жесткой в своей плоскости и гибкой в перпендикулярном к ней направлении. Физический смысл граничных условий (2), (3) понятен.

Задача построения однородных решений сводится к интегрированию системы уравнений [5]

$$\partial_3^2 u_i + (\lambda^2 D^2 + \omega_1^2)\, u_i + \lambda^2 \nu_1 \partial_i(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) + \lambda \nu_1 \partial_i \partial_3 u_3 = \lambda^2 (3\nu_1 - 1)\partial_i u_4,$$

$$(1+\nu_1)\partial_3^2 u_3 + (\lambda^2 D^2 + \omega_1^2)\, u_3 + \lambda \nu_1 \partial_3(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) = \lambda(3\nu_1 - 1)\partial_3 u_4,$$

$$\partial_3 u_4 + (\lambda^2 D^2 + i\,\omega_2)\, u_4 + i\,\omega_3(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \lambda^{-1}\partial_3 u_3) = 0 \quad (i = 1,\ 2) \tag{4}$$

с учетом краевых условий (1), (2) или (1), (3) и уравнений Дюамеля–Неймана

$$\sigma_{11} = \nu\nu_1 e + \partial_1 u_1 - (1+\nu)\,\nu_1 u_4, \quad 2\sigma_{12} = \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2,$$

$$\sigma_{22} = \nu\nu_1 e + \partial_2 u_2 - (1+\nu)\,\nu_1 u_4, \quad 2\sigma_{13} = \partial_1 u_3 + \lambda^{-1}\partial_3 u_1,$$

$$\sigma_{33} = \nu\nu_1 e + \lambda^{-1}\partial_3 u_3 - (1+\nu)\,\nu_1 u_4, \quad 2\sigma_{23} = \partial_2 u_3 + \lambda^{-1}\partial_3 u_2. \tag{5}$$

Здесь

$$\partial_i = \partial/\partial x_i \quad (i = 1,2,3), \quad D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \nu_1 = (1-2\nu)^{-1},$$

$$e = \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \lambda^{-1}\partial_3 u_3, \quad u_i = \tilde{u}_i/R, \quad \sigma_{ij} = \tilde{\sigma}_{ij}/(2G),$$

$$u_4 = \alpha_t(T - T_0), \quad \omega_1^2 = \rho\omega^2 h^2 G^{-1}, \quad \omega_2 = \omega h^2\, æ^{-1}, \ \omega_3 = \omega h^2 \eta \alpha_t.$$

Другие обозначения совпадают с общепринятыми.

2. Метод решения. С учетом свойств векторного поля и в соответствии с полуобратным методом И. И. Воровича амплитудные значения вектора перемещений и температуры представим суммой вихревого и потенциального состояний

$$u_i = u_{iв} + u_{in} \quad (i = 1, ..., 4).$$

Вихревое решение имеет вид

$$u_{1в}(x_1, x_2, x_3) = p\,(x_3)\,\partial_2 B(x_1,\ x_2),$$

$$u_{2в} = -p\,(x_3)\,\partial_1 B(x_1,\ x_2),$$

$$u_{3в}(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad u_{4в}(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{6}$$

и совпадает с аналогичным, полученным в работе [1]. Поэтому из граничных условий (1), уравнений (4) и выражений (6) следует

$$u_{1в} = \sum_{k=1}^{\infty} P_k^{\pm}(x_3)\,\partial_2 B_k^{\pm}(x_1,\ x_2), \ \ u_{2в} = -\sum_{k=1}^{\infty} P_k^{\pm}(x_3)\,\partial_1 B_k^{\pm}(x_1,\ x_2),$$

$$u_{3в} = u_{4в} = 0. \tag{7}$$

Здесь функции $B_k^{\pm}$ являются метагармоническими

$$\lambda^2 D^2 B_k^{\pm}(x_1, x_2) = \left((\delta_k^-)^2 - \omega_1^2\right) B_k^{\pm}, \tag{8}$$

а собственные функции $P_k^{\pm}(x_3)$ имеют вид

$$P_k^+(x_3) = \cos\delta_k^+ x_3, \quad P_k^-(x_3) = \left(\sin\delta_k^- x_3\right)/\delta_k^-,$$

$$\delta_k^- = \pi\, k, \quad \delta_k^+ = (k - 0{,}5)\,\pi.$$

Знаки „+" и „–" относятся соответственно к симметричным и антисимметричным относительно срединной плоскости $x_3 = 0$ видам колебаний пластины.

Потенциальное решение будем находить, исходя из представлений

$$u_{1n} = n\,(x_3)\,\partial_1 C(x_1,\ x_2), \quad u_{2n} = n\,(x_3)\,\partial_2 C(x_1,\ x_2),$$

$$u_{3n} = q\,(x_3)\,C(x_1,\ x_2), \quad u_{4n} = \lambda^{-2} t\,(x_3)\,C(x_1,\ x_2). \tag{9}$$

Тогда из системы уравнений (4) с учетом соотношений (9) следует, что функция $C(x_1,\ x_2)$ является метагармонической

$$\lambda^2 D^2 C(x_1,\ x_2) - \gamma^2 C(x_1,\ x_2) = 0,$$

а функции $n(x_3)$, $q(x_3)$, $t(x_3)$ определяются из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} n'' + \left[(1+\nu_1)\,\gamma^2 + \omega_1^2\right] n + \lambda\nu_1\, q' - (3\nu_1 - 1)\, t = 0, \\ (1+\nu_1)\, q'' + \left(\gamma^2 + \omega_1^2\right)\, q + \lambda^{-1}\nu_1\,\gamma^2 n' - \lambda^{-1}(3\nu_1 - 1)\, t' = 0, \\ t'' + \left(\gamma^2 + i\omega_2\right)\, t + i\omega_3\gamma^2 n + i\lambda\omega_3\, q' = 0. \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь γ – параметр разделения переменных. Характеристическое уравнение системы (10) имеет вид

$$a_1 k^6 + a_2 k^4 + a_3 k^2 + a_4 = 0, \tag{11}$$

в котором

$$\begin{gathered} a_1 = (1+\nu_1); \quad a_2 = 3\gamma^2(1+\nu_1) + \omega_1^2(2+\nu_1) + i\,[\omega_2(1+\nu_1) + \omega_3(3\nu_1 - 1)]; \\ a_3 = 3\gamma^4(1+\nu_1) + 2\gamma^2\left[\omega_1^2(2+\nu_1) + i\,(\,\omega_2(1+\nu_1) + \right. \\ \left. + \,\omega_3(3\nu_1 - 1))\right] + \omega_1^4 + i\,\omega_1^2[\omega_2(2+\nu_1) + \omega_3(3\nu_1 - 1)]; \\ a_4 = \gamma^6(1+\nu_1) + \gamma^4\left[\omega_1^2(2+\nu_1) + i\ (\omega_2(1+\nu_1) + \omega_3(3\nu_1 - 1))\right] + \\ + \gamma^2\omega_1^2\left[\omega_1^2 + i\ (\omega_2(2+\nu_1) + \omega_3(3\nu_1 - 1))\right] + i\,\omega_1^2\omega_2. \end{gathered}$$

Решением системы (10) для различных по модулю корней k_i уравнения (11) являются функции

$$\begin{gathered} n^+(x_3) = H_1^+ \operatorname{ch} k_1 x_3 + H_2^+ \operatorname{ch} k_2 x_3 + H_3^+ \operatorname{ch} k_3 x_3, \\ n^-(x_3) = H_1^- \operatorname{sh} k_1 x_3 + H_2^- \operatorname{sh} k_2 x_3 + H_3^- \operatorname{sh} k_3 x_3, \\ q^+(x_3) = Q_1^+ \operatorname{sh} k_1 x_3 + Q_2^+ \operatorname{sh} k_2 x_3 + Q_3^+ \operatorname{sh} k_3 x_3, \\ q^-(x_3) = Q_1^- \operatorname{ch} k_1 x_3 + Q_2^- \operatorname{ch} k_2 x_3 + Q_3^- \operatorname{ch} k_3 x_3, \\ t^+(x_3) = T_1^+ \operatorname{ch} k_1 x_3 + T_2^+ \operatorname{ch} k_2 x_3 + T_3^+ \operatorname{ch} k_3 x_3, \\ t^-(x_3) = T_1^- \operatorname{sh} k_1 x_3 + T_2^- \operatorname{sh} k_2 x_3 + T_3^- \operatorname{sh} k_3 x_3. \end{gathered} \tag{12}$$

Коэффициенты $Q_i^\pm$ и $T_i^\pm$ в соотношениях (12) выражаются через основные $H_i^\pm$ следующим образом:

$$\begin{gathered} Q_i^\pm = \lambda^{-1} k_i H_i^\pm, \quad T_i^\pm = d_i H_i^\pm, \\ d_i = \frac{(1+\nu_1)(\gamma^2 + k_i^2)^2 + \omega_1^2\left((2+\nu_1)(\gamma^2 + k_i^2) + \omega_1^2\right)}{(3\nu_1 - 1)(\gamma^2 + k_i^2 + \omega_1^2)}. \end{gathered} \tag{13}$$

Из граничных условий (1), (2) и выражений (9) следует, что

$$n(\pm 1) = 0, \quad q'(\pm 1) = 0, \quad t(\pm 1) = 0. \tag{14}$$

Подставляя соотношения (12) в граничные условия (14), получим однородные системы уравнений для симметричных

$$H_1^+ \operatorname{ch} k_1 + H_2^+ \operatorname{ch} k_2 + H_3^+ \operatorname{ch} k_3 = 0,$$

$$H_1^+ k_1^2 \operatorname{sh} k_1 + H_2^+ k_2^2 \operatorname{sh} k_2 + H_3^+ k_3^2 \operatorname{sh} k_3 = 0,$$
$$H_1^+ d_1 \operatorname{ch} k_1 + H_2^+ d_2 \operatorname{ch} k_2 + H_3^+ d_3 \operatorname{ch} k_3 = 0; \tag{15}$$

и антисимметричных колебаний пластины

$$H_1^- \operatorname{sh} k_1 + H_2^- \operatorname{sh} k_2 + H_3^- \operatorname{sh} k_3 = 0,$$
$$H_1^- k_1^2 \operatorname{ch} k_1 + H_2^- k_2^2 \operatorname{ch} k_2 + H_3^- k_3^2 \operatorname{ch} k_3 = 0,$$
$$H_1^- d_1 \operatorname{sh} k_1 + H_2^- d_2 \operatorname{sh} k_2 + H_3^- d_3 \operatorname{sh} k_3 = 0. \tag{16}$$

Определители $\Delta^\pm$ систем (15), (16) имеют вид

$$\Delta^+ = [k_1^2(d_2 - d_3) + k_2^2(d_3 - d_1) + k_3^2(d_1 - d_2)] \operatorname{ch} k_1 \operatorname{ch} k_2 \operatorname{ch} k_3, \tag{17}$$

$$\Delta^- = [k_1^2(d_2 - d_3) + k_2^2(d_3 - d_1) + k_3^2(d_1 - d_2)] \operatorname{sh} k_1 \operatorname{sh} k_2 \operatorname{sh} k_3. \tag{18}$$

Из условия существования нетривиального решения систем (15), (16) и соотношений (17), (18) получим дисперсионные уравнения относительно значений параметра $\gamma^\pm$:

$$\operatorname{ch} k_1 \operatorname{ch} k_2 \operatorname{ch} k_3 = 0, \tag{19}$$

$$\operatorname{sh} k_1 \operatorname{sh} k_2 \operatorname{sh} k_3 = 0. \tag{20}$$

Счетные множества корней k_{1p}, k_{2p}, k_{3p} уравнений (19), (20) находятся в явном виде. Зависимость между квадратами корней k_i^2 бикубического уравнения (11) и γ может быть установлена, например, по формулам Кардано. В результате собственные значения $\gamma_p^\pm$ становятся известными.

Неизвестные коэффициенты $H_i^\pm$ найдем из системы (15), (16):

$$H_2^+ = H_1^+(k_1^2 - k_3^2)(\operatorname{ch} k_1 \ \operatorname{ch} k_3)/h_1^+,$$
$$H_3^+ = H_1^+(k_2^2 - k_1^2)(\operatorname{ch} k_1 \ \operatorname{ch} k_2)/h_1^+,$$
$$H_2^- = H_1^-(k_1^2 - k_3^2)(\operatorname{sh} k_1 \ \operatorname{sh} k_3)/h_1^-,$$
$$H_3^- = H_1^-(k_2^2 - k_1^2)(\operatorname{sh} k_1 \ \operatorname{sh} k_3)/h_1^-,$$
$$h_1^+ = (k_3^2 - k_2^2) \operatorname{ch} k_2 \operatorname{ch} k_3, \quad h_1^- = (k_3^2 - k_1^2) \operatorname{sh} k_2 \operatorname{sh} k_3.$$

Собственные функции $n^\pm(x_3)$, $q^\pm(x_3)$, $t^\pm(x_3)$ определяются с точностью до множителя $H_1^\pm$, отличного от нуля. Для определенности считаем, что $H_1^\pm = 1$.

Каждому корню $\gamma_p^\pm$ соответствуют величины $H_{ip}^\pm$, $d_{ip}^\pm$, $k_{ip}^\pm$, $h_{1p}^\pm$ $(i = 1, 2, 3)$ и собственные функции $n_p^\pm(x_3)$, $q_p^\pm(x_3)$, $t_p^\pm(x_3)$. Поэтому потенциальное решение в случае граничных условий (1), (2) имеет вид

$$u_{1n}^\pm(x_1,\ x_2,\ x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} n_p^\pm(x_3)\, \partial_1 C_p^\pm(x_1,\ x_2),$$

$$u_{2n}^\pm(x_1,\ x_2,\ x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} n_p^\pm(x_3)\, \partial_2 C_p^\pm(x_1,\ x_2),$$

$$u_{3n}^\pm(x_1,\ x_2,\ x_3) = \sum_{p=1}^{\infty} q_p^\pm(x_3) C_p^\pm(x_1,\ x_2),$$

$$u_{4n}^\pm(x_1,\ x_2,\ x_3) = \lambda^{-2} \sum_{p=1}^{\infty} t_p^\pm(x_3) C_p^\pm(x_1,\ x_2). \tag{21}$$

Здесь метагармонические функции $C_p^{\pm}(x_1, x_2)$ являются решением уравнения

$$D^2 C_p^{\pm} - \left(\gamma_p^{\pm}\right)^2 \lambda^{-2} C_p^{\pm} = 0. \tag{22}$$

В случае теплоизолированных плоских граней пластины алгоритм получения потенциального решения не изменяется.

Полученные однородные решения удовлетворяют точно уравнениям установившихся термоупругих колебаний (4) и граничным условиям на плоских гранях пластины. Для удовлетворения краевым условиям на боковой поверхности пластины необходимо воспользоваться решением уравнений (8), (22) и известными приближенными численно-аналитическими методами, например, методом рядов Фурье.

1. *Алтухов Е. В., Панченко Ю. В., Богатчук А. Ю.* Коливання ізотропних пластин з урахуванням крайових умов типу плоского торця або діафрагми // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2000. – Вип. 1. – С. 41–45.
2. *Булгак В. А., Мысовская Р. М., Мысовский Ю. В., Сторожев В. И.* Однородные решения задачи о связаных термоупругих колебаниях толстых изотропных пластин // Теорет. и прикл. механика. – 1979. – Вып. 10. – С. 79–84.
3. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев. – Наук. думка, 1970. – 308 с.
4. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1976. – 664 с.
5. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. – Москва: Мир, 1970. – 256 с.
6. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 310 с.
7. *Швец Р. Н.* Применение операторного метода в динамических задачах термоупругости пластин постоянной толщины // Физ. – мех. поля в деформируемых средах. – Киев: Наук. думка, 1978. – С. 84–92.

ОДНОРІДНІ РОЗВ'ЯЗКИ ТРИВИМІРНИХ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИН ІЗ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ ТИПУ ДІАФРАГМИ

Розглядається тривимірна задача зв'язаних термопружних коливань ізотропних пластин. Плоскі грані пластин покриті діафрагмою і підтримуються при нульовій температурі або теплоізольовані. Методом І. І. Воровича отримано однорідні розв'язки для даного класу задач теорії пружності. Розв'язування задачі зведено до інтегрування зліченної множини метагармонічних рівнянь.

HOMOGENEOUS SOLUTIONS OF 3D DYNAMIC PROBLEMS OF ISOTROPIC PLATES WITH BOUNDARY CONDITIONS OF DIAPHRAGM TYPE

In article the three-dimensional problem connected thermoelastic oscillations of isotropic plates is considered. Flat sides of plates are covered with a diaphragm and supported at zero temperature or thermoisolated. Homogeneous solutions for the given class of problems of the theory of elasticity are received by I. I. Vorovich method. The solution of a problem is reduced to integration of countable set of the metaharmonious equations.

Донец. нац. ун-т, Донецк

Получено
28.05.05