

Р. В. Гудзь, Л. М. Журавчак, А. Т. Петльований

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛОСКОЇ СТАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ
ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО-НЕОДНОРІДНОГО
ТІЛА ПОЄДНАННЯМ МЕТОДІВ ГРАНИЧНИХ,
ПРИГРАНИЧНИХ ТА СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Запропоновано методу розв'язування задачі термопружності для тіла з локальними областями неоднорідності матеріалу, в яких коефіцієнти теплопровідності і Ляме залежать від координат. Підхід базується на адитивному розщепленні операторів рівнянь задачі та поєднанні в локальних областях неоднорідності матеріалу непрямих методів граничних та приграничних елементів з методом скінчених елементів.

Розробка нових підходів та їх застосування до розрахунку температурного поля й напружено-деформованого стану тіл із залежними від координат у локальних областях тепловими та фізико-механічними характеристиками має значний теоретичний та практичний інтерес у контексті вимог щодо зниження матеріалоємності сучасних конструкційних елементів споруд і механізмів.

У зв'язку з тим, що аналітичні розв'язки задач термопружності можна побудувати лише для порівняно вузького класу однорідних об'єктів канонічної та квазіканонічної форми, під час математичного моделювання температурних та механічних процесів у неоднорідних об'єктах складної форми широко застосовують методи скінчених елементів (МСЕ), граничних елементів (МГЕ) [1] та приграничних елементів (МПГЕ) [4]. Для кожного з цих методів існують класи задач, де їх використання є близьким до оптимального за точністю, необхідними ресурсами та ефективністю програмної реалізації. Як відомо, МГЕ та МПГЕ мають переваги у випадку розв'язування задач термопружності в однорідних тілах, а МСЕ, як і метод скінчених різниць, добре враховує геометричні та фізичні неоднорідності середовищ. Аналіз переваг та недоліків цих методів привів дослідників до ідеї спільного їх використання [2, 3, 6].

У даній статті розширено область застосування непрямого методу граничних елементів (НМГЕ) [1] та непрямого методу приграничних елементів (НМПГЕ) [4] на двовимірні задачі термопружності, ускладнені наявністю в тілі сукупності локальних областей неоднорідності матеріалу (ЛОНМ). У ній розроблено алгоритм моделювання розв'язку плоскої змішаної крайової задачі термопружності, який ґрунтується на операціях методу адитивного розщеплення операторів і поєднанні НМГЕ або НМПГЕ з ермітовими скінченими елементами.

Формулювання задачі. Розглянемо тіло, що займає область Ω із краєм Γ . Нехай коефіцієнт теплопровідності $\lambda_t(x)$ та коефіцієнти Ляме $\lambda(x)$, $\mu(x)$ матеріалу тіла описуються неперервними функціями, які набувають сталих значень скрізь у Ω , за винятком локальних областей неоднорідності $\Omega_m \subset \Omega$ ($m = 1, \dots, M$), $\Omega_m \cap \Omega_l = \emptyset$ ($m \neq l$), де вони залежать від декартових координат $x = (x_1, x_2)$, а саме:

$$\lambda_t(x) = \lambda_{t0} + \sum_{m=1}^M \lambda_{tm}(x) \cdot \chi_m(x), \lambda(x) = \lambda_0 + \sum_{m=1}^M \lambda_m(x) \cdot \chi_m(x),$$

$$\mu(x) = \mu_0 + \sum_{m=1}^M \mu_m(x) \cdot \chi_m(x). \quad (1)$$

Тут $\chi_m(x)$ — характеристична функція області Ω_m ; λ_t , λ_0 , μ_0 — коефіцієнти в $\Omega \setminus \cup_{m=1}^M \Omega_m$; $\lambda_{t0} + \lambda_{tm}(x)$, $\lambda_0 + \lambda_m(x)$, $\mu_0 + \mu_m(x)$ — коефіцієнти області Ω_m , причому $\lambda_{tm}(x)|_{\Gamma_m} = 0$, $\lambda_m(x)|_{\Gamma_m} = 0$, $\mu_m(x)|_{\Gamma_m} = 0$, де Γ_m — край області Ω_m .

Підставивши у рівняння теплопровідності та рівняння рівноваги в переміщеннях вирази (1), співвідношення Дюгамеля–Неймана

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(x) = & \lambda_0 \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(x) + 2\mu_0 \varepsilon_{ij}(x) - \beta_0 \theta \delta_{ij} + \sum_{m=1}^M [\lambda_m(x) \delta_{ij} \varepsilon_{kk}(x) + \\ & + 2\mu_m(x) \varepsilon_{ij}(x) - \beta_m(x) \theta(x) \delta_{ij}] \chi_m(x), \quad i, j = 1, 2, \end{aligned}$$

та співвідношення Коші, одержимо систему диференційних рівнянь [4, 5]

$$\Delta \theta = -f_\theta, \quad (2)$$

$$\mu_0 u_{i,jj} + (\lambda_0 + \mu_0) u_{j,ji} = -f_{ij,j} + (\beta \theta)_{,i}, \quad (3)$$

де Δ — оператор Лапласа; $f_\theta = f_\theta(\theta, i) = \sum_{m=1}^M \chi_m \lambda_{tm,i} \theta_{,i} / \lambda_{tm}$; $f_{ij} = f_{ij}(\varepsilon) =$

$$= \sum_{m=1}^M [\lambda_m \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu_m \varepsilon_{ij}] \chi_m; \quad \beta_0 = (2\mu_0 + 3\lambda_0) \alpha; \quad \beta_m(x) = (2\mu_m(x) + 3\lambda_m(x)) \alpha;$$

$$\beta(x) = \beta_0 + \sum_{m=1}^M \beta_m(x) \chi_m(x); \quad \sigma_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} — \text{компоненти відповідно тензора на-}$$

пружень та тензора деформацій; u_i — компоненти вектора переміщень; θ — стаціонарне температурне поле; α — коефіцієнт теплового розширення матеріалу; δ_{ij} — символ Кронекера. Тут і надалі кома перед індексом означає похідну за змінною, яка відповідає цьому індексу, тобто $f_{,j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}$, $f_{,ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, при цьому використовується німе підсумовування за індексами, які повторюються.

Вважатимемо, що на P_1 , P_2 задані температура й тепловий потік

$$\theta|_{P_1} = \theta_p, \quad q|_{P_2} = q_p, \quad (4)$$

а також переміщення та поверхневі зусилля

$$u_i|_{P_1} = u_{pi}, \quad t_i|_{P_2} = t_{pi}, \quad (5)$$

де $P_1 \cup P_2 = \Gamma$; $P_1 \cap P_2 = \emptyset$; $q = -\lambda_t \frac{\partial \theta}{\partial n}$; $t_i = \sigma_{ij} n_j$; n_j — компоненти одиничного вектора однозначно визначеної зовнішньої нормалі $n(x)$ до краю Γ . Отже, для визначення температурних переміщень u_i маємо незв'язану змішану крайову задачу (2)–(5).

Апроксимувавши невідомі температуру θ та компоненти тензора деформацій ε_{ij} в областях Ω_m функціями θ^m , ε_{ij}^m і використавши їх у f_θ , $f_{ij,j}$, перейдемо від крайової задачі відносно θ, u до крайової задачі відносно θ^*, u^*

$$\Delta \theta^* = -f_\theta, \quad (6)$$

$$\theta^*|_{P_1} = \theta_p, \quad q^*|_{P_2} = q_p, \quad (7)$$

$$\mu_0 u_{i,jj}^* + (\lambda_0 + \mu_0) u_{j,ji}^* = -f_{ij,j}(\varepsilon^*) + (\beta \theta^*)_{,i}, \quad (8)$$

$$u_i^*|_{P_1} = u_{pi}, \quad t_i^*|_{P_2} = t_{pi}. \quad (9)$$

Інтегральні зображення розв'язків. Для побудови розв'язків задачі (6)–(9) застосуємо НМГЕ, а також НМПГЕ у поєднанні з ермітовими скінченними елементами в областях локальних неоднорідностей. З цією метою розглянемо таку область $B \subset \mathbb{R}^2$, що $\Omega \subset B$, $\partial\Omega \cap \partial B = \emptyset$. Позначимо приграничну область $G = B \setminus \Omega$. Розв'язки рівнянь (6), (8) зобразимо у вигляді

$$\theta^{*\gamma}(x) = \int_{\gamma} U(x, y) \phi_{\theta}^{\gamma}(x) d\gamma(y) + \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} U(x, y) f_{\theta}(\theta_i^{\gamma m}(y)) d\Omega_m(y) + C_{\theta}, \quad (10)$$

$$u_i^{*\gamma}(x) = \int_{\gamma} E_{ij}(x, y) \phi_j^{\gamma}(x) d\gamma(y) + \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} E_{ij}(x, y) f_{ik,k}(\varepsilon^{\gamma m}(y)) d\Omega_m(y) - \int_{\Omega} E_{ij}(x, y) [\beta(y) \theta^{\gamma}(y)]_{,j} d\Omega(y) + C_i, \quad (11)$$

де $\gamma \in \{G, \Gamma\}$. Застосувавши до (10), (11) теорему Гріна інтегрування частинами, одержимо зображення для температури та компонент вектора переміщень:

$$\theta^{*\gamma}(x) = \int_{\gamma} U(x, y) \phi_{\theta}^{\gamma}(x) d\gamma(y) - \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} U_{,i}(x, y) f_{\theta}(\theta^{\gamma m}(y)) d\Omega_m(y) + C_{\theta}, \quad (12)$$

$$u_i^{*\gamma}(x) = \int_{\gamma} E_{ij}(x, y) \phi_j^{\gamma}(x) d\gamma(y) - \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} E_{ij,k}(x, y) f_{jk}(\varepsilon^{\gamma m}(y)) d\Omega_m(y) + \Phi_{\theta}(x, E_{ij}, E_{ij,j}, \beta, \theta^{\gamma}), \quad (13)$$

і на основі них — інтегральні зображення теплового потоку та компонент деформацій, напружень і поверхневих зусиль:

$$q^{*\gamma}(x) = \int_{\gamma} Q(x, y) \phi_{\theta}^{\gamma}(x) d\gamma(y) + \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} Q_{,i}(x, y) f_{\theta}(\theta^{\gamma m}(y)) d\Omega_m(y), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ij}^{*\gamma}(x) \\ \sigma_{ij}^{*\gamma}(x) \\ t_i^{*\gamma}(x) \end{Bmatrix} &= \int_{\gamma} \begin{Bmatrix} B_{ijk}(x, y) \\ T_{ijk}(x, y) \\ F_{ik}(x, y) \end{Bmatrix} \phi_k^{\gamma}(y) d\gamma(y) + f_{ij}(\varepsilon^{\gamma m}(x)) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ n_j \end{Bmatrix} - \\ &- \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} \begin{Bmatrix} B_{ijk,l}(x, y) \\ T_{ijk,l}(x, y) \\ F_{ik,l}(x, y) \end{Bmatrix} f_{kl}(\varepsilon^{\gamma m}(y)) d\Omega_m(y) + \\ &+ \Phi_{\theta} \left(x, \begin{Bmatrix} B_{ijk} \\ T_{ijk} \\ F_{ik} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} B_{ijk,k} \\ T_{ijk,k} \\ F_{ik,k} \end{Bmatrix}, \beta, \theta^{\gamma} \right) - \beta \theta \delta_{ij} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ n_j \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_{\theta}(x, D_{ij}, D_{ij,j}, \beta, \theta^{\gamma}) &= - \int_{\Gamma} D_{ij}(x, y) \beta(y) \theta^{\gamma}(y) n_j(y) d\Gamma(y) + \\ &+ \int_{\Omega} \theta^{\gamma} D_{ij,j}(x, y) \beta(y) d\Omega(y), \end{aligned}$$

$U(x, y) = -\frac{1}{2\pi\lambda_{t0}} \ln \left| \frac{r}{r_0} \right|$ – фундаментальний розв’язок стаціонарного рівняння теплопровідності, $Q(x, y) = -\lambda_{t0} \frac{\partial U(x, y)}{\partial n}$, $E_{ij}(x, y) = E_{ij} = \frac{\lambda_0 + \mu_0}{4\pi\mu_0(\lambda_0 + 2\mu_0)} \times$
 $\times \left\{ -\frac{\lambda_0 + 3\mu_0}{\lambda_0 + \mu_0} \ln r \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right\}$ – фундаментальний розв’язок системи рівнянь задачі пружності; $y = (y_1, y_2)$, y_1, y_2 – система координат, що співпадає зі системою x_1, x_2 і використовується для опису точки, в якій діють невідомі фіктивні джерела тепла ϕ_θ^γ чи прикладені компоненти невідомих фіктивних поверхневих зусиль ϕ_j^Γ чи масових сил ϕ_j^G ; $r^2 = (x_i - y_i)(x_i - y_i)$; C_θ, C_i – невідомі сталі; $B_{ijk}(x, y) = B_{ijk} = \frac{1}{2}(E_{ik,j} + E_{jk,i})$; $T_{ijk}(x, y) = T_{ijk} = \lambda_0 \delta_{ij} B_{llk} + 2\mu_0 B_{ijk}$; $F_{ij}(x, y) = F_{ij} = T_{ijk} n_k$.

Дискретизація геометрії тіла. У приграничній області G і на ділянках краю P_1, P_2 введемо відповідно приграничні G_ν та граничні $\Gamma_\nu = \partial G_\nu \cap \Omega$ ($\nu = 1, \dots, V$) елементи, причому $\text{mes} G_\nu = 2$, $\cup_{\nu=1}^V G_\nu = G$, $G_\nu \cap G_w = \emptyset$, $\Gamma_\nu \cap \Gamma_w = \emptyset$ при $\nu \neq w$, $\cup_{\nu=1}^{V_1} \Gamma_\nu = P_1$, $\cup_{\nu=V_1+1}^V \Gamma_\nu = P_2$. Геометрію приграничних і граничних елементів моделюємо за допомогою вектора ψ інтерполяційних функцій у локальній системі координат. Уздовж кожного з елементів Γ_ν та по площі елемента G_ν здійсимо апроксимацію невідомих функцій $\phi_\theta^\gamma, \phi_j^\Gamma$ за допомогою інтерполяційних поліномів $\phi_\theta^\gamma(\eta) |_{\Gamma_\nu} = \psi^T(\eta) \cdot \phi_{\theta\nu}^\gamma$, $\phi_j^\Gamma(\eta) |_{\Gamma_\nu} = \psi^T(\eta) \cdot \phi_{j\nu}^\Gamma$, де $\phi_{\theta\nu}^\gamma, \phi_{j\nu}^\Gamma$ – вектори невідомих вузлових апроксимацій функції $\phi_\theta^\gamma, \phi_j^\Gamma$ на ν -му елементі.

Області Ω_m дискретизуємо системою ермітових скінчених елементів Ω_{ms} ($s = 1, \dots, S_m$), зобразивши функції $\theta^{\gamma m}, \varepsilon_{ij}^{\gamma m}$ на кожному з них пробними функціями $\theta_{ij}^{\gamma m} |_{\Omega_{ms}} = \xi^T(\zeta_1, \zeta_2) \cdot \theta_{ij}^{\gamma ms}$, $\varepsilon_{ij}^{\gamma m} |_{\Omega_{ms}} = \xi^T(\zeta_1, \zeta_2) \cdot \varepsilon_{ij}^{\gamma ms}$, де $\theta^{\gamma ms}, \varepsilon_{ij}^{\gamma ms}$ – вузлові вектори значень температури $\theta^{\gamma m}$ та компоненти $\varepsilon_{ij}^{\gamma m}$ тензора деформацій на s -му елементі, ξ – вектор базових функцій у локальній системі координат.

На основі таких апроксимацій одержимо дискретні аналоги (12)–(15):

$$\theta^{*\gamma}(x) = U^{\gamma\nu}(x) \cdot \phi_{\theta\nu}^\gamma + U_\theta^{ms}(x) \cdot \theta^{\gamma ms} + C_\theta,$$

$$q^{*\gamma}(x) = Q^{\gamma\nu}(x) \cdot \phi_{\theta\nu}^\gamma + Q_\theta^{ms}(x) \cdot \theta^{\gamma ms}, \quad (16)$$

$$u_i^{*\gamma}(x) = E_{ij}^{\gamma\nu}(x) \cdot \phi_{j\nu}^\gamma + E_i^{\lambda ms}(x) \cdot \varepsilon_{kk}^{\gamma ms} + E_{ijl}^{\mu ms}(x) \cdot \varepsilon_{jl}^{\gamma ms} + \Phi_\theta(x, E_{ij}, E_{ij,j}, \beta, \theta^\gamma) + C_i, \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_{ij}^{*\gamma} \\ \sigma_{ij}^{*\gamma} \\ t_i^{*\gamma} \end{array} \right\} (x) = \left\{ \begin{array}{c} B_{ijk}^\nu \\ T_{ijk}^\nu \\ F_{ik}^\nu \end{array} \right\} (x) \cdot \phi_{k\nu}^\gamma + \left\{ \begin{array}{c} B_{ij}^{\lambda ms} \\ T_{ij}^{\lambda ms} \\ F_i^{\lambda ms} \end{array} \right\} (x) \cdot \varepsilon_{kk}^{\gamma ms} + \left\{ \begin{array}{c} B_{ijkl}^{\mu ms} \\ T_{ijkl}^{\mu ms} \\ F_{ikl}^{\mu ms} \end{array} \right\} (x) \cdot \varepsilon_{kl}^{\gamma ms} + \Phi_\theta(x, \left\{ \begin{array}{c} B_{ijk} \\ T_{ijk} \\ F_{ik} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} B_{ijk,k} \\ T_{ijk,k} \\ F_{ik,k} \end{array} \right\}, \beta, \theta^\gamma) - \beta \theta \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \delta_{ij} \\ n_i \end{array} \right\}, \quad (18)$$

$$\text{де } \left\{ \begin{array}{c} U^{\Gamma_\nu} \\ Q^{\Gamma_\nu} \end{array} \right\} (x) = \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{c} U \\ Q \end{array} \right\} \psi^T J_{\Gamma_\nu} d\eta, \quad \left\{ \begin{array}{c} U^{G_\nu} \\ Q^{G_\nu} \end{array} \right\} (x) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{c} U \\ Q \end{array} \right\} \psi^T J_{G_\nu} d\eta_1 d\eta_2,$$

$$\left\{ \begin{array}{c} E_{ij}^{\Gamma_\nu} \\ B_{ijk}^{\Gamma_\nu} \\ T_{ijk}^{\Gamma_\nu} \\ F_{ik}^{\Gamma_\nu} \end{array} \right\} (x) = \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{c} E_{ij} \\ B_{ijk} \\ T_{ijk} \\ F_{ik} \end{array} \right\} \psi^T J_{\Gamma_\nu} d\eta,$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} E_{ij}^{G_\nu} \\ B_{ij}^{G_\nu} \\ T_{ijk}^{G_\nu} \\ F_{ik}^{G_\nu} \end{array} \right\} (x) &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{c} E_{ij} \\ B_{ijk} \\ T_{ijk} \\ F_{ik} \end{array} \right\} \psi^T J_{G_\nu} d\eta_1 d\eta_2, \\ \left\{ \begin{array}{c} U_\theta^{ms} \\ Q_\theta^{ms} \end{array} \right\} (x) &= - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{c} U_{,i} \\ Q_{,i} \end{array} \right\} \lambda_{tms}^{-1} \lambda_{tms,i} \xi^T H_{ms} d\zeta_1 d\zeta_2, \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} E_i^{\lambda ms} \\ B_{ij}^{\lambda ms} \\ T_{ij}^{\lambda ms} \\ F_i^{\lambda ms} \end{array} \right\} (x) = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{c} E_{ij,j} \\ B_{ijk,k} \\ T_{ijk,k} \\ F_{ik,k} \end{array} \right\} \lambda_{ms} \xi^T H_{ms} d\zeta_1 d\zeta_2 + \lambda_{ms} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \delta_{ij} \\ n_j \end{array} \right\} \xi^T \chi_{ms}(x),$$

$$\left\{ \begin{array}{c} E_{ijl}^{\mu ms} \\ B_{ijkl}^{\mu ms} \\ T_{ijkl}^{\mu ms} \\ F_{ikl}^{\mu ms} \end{array} \right\} (x) = -2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{c} E_{ij,l} \\ B_{ijk,l} \\ T_{ijk,l} \\ F_{ik,l} \end{array} \right\} \mu_{ms} \xi^T H_{ms} d\zeta_1 d\zeta_2 + 2\mu_{ms} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ n_j \end{array} \right\} \xi^T \chi_{ms}(x),$$

J_{G_ν} , J_{G_ν} , H_{ms} — якобіани переходу від змінних η , (η_1, η_2) ; (ζ_1, ζ_2) до y відповідно; χ_{ms} — характеристична функція елемента Ω_{ms} ; λ_{tms} , λ_{ms} , μ_{ms} — значення функцій $\lambda_{tm}(x)$, $\lambda_m(x)$, $\mu_m(x)$ при $x \in \Omega_{ms}$.

Побудова системи рівнянь для знаходження вузлових значень.

Введемо функції нев'язок $R_\theta^{\gamma ms}(x) = \theta^{*\gamma}(x) - \theta^{\gamma ms}(x)$, $R_{\varepsilon ij}^{\gamma ms}(x) = \varepsilon_{ij}^{*\gamma}(x) - \varepsilon_{ij}^{\gamma ms}(x)$ на $\cup_{s=1}^M \Omega_{ms}$ ($m = 1, \dots, M$), $R_{1\theta}^\gamma(x) = \theta^{*\gamma}(x) - \theta_p(x)$, $R_{1ui}^\gamma(x) = u_i^{*\gamma}(x) - u_{pi}(x)$ на P_1 ; $R_{2q}^\gamma(x) = q^{*\gamma}(x) - q_p(x)$, $R_{2ti}^\gamma(x) = t_i^{*\gamma}(x) - t_{pi}(x)$ на P_2 .

Вирази для задоволення граничних умов у точці $x_0 \in \cup_{\nu=1}^V \Gamma_\nu$ одержимо з (16)–(18) внаслідок граничного переходу

$$U^{\gamma\nu}(x_0) \cdot \phi_{\theta\nu}^\gamma + U_\theta^{ms}(x_0) \cdot \theta^{\gamma ms} + C_\theta = \theta_p(x_0), \quad (19)$$

$$\pm \frac{1}{2} \psi^T(x_0) \phi_\nu^\Gamma + Q^{\Gamma\nu}(x_0) \cdot \phi_{\theta\nu}^\Gamma + Q_\theta^{ms}(x_0) \cdot \theta^{\Gamma ms} = q_p(x_0),$$

$$Q^{G\nu}(x_0) \cdot \phi_{\theta\nu}^G + Q_i^{ms}(x_0) \cdot \theta^{Gms} = q_p(x_0), \quad (20)$$

$$\begin{aligned} E_{ij}^{\gamma\nu}(x) \cdot \phi_{j\nu}^\gamma + E_i^{\lambda ms}(x) \cdot \varepsilon_{kk}^{\gamma ms} + E_{ijl}^{\mu ms}(x) \cdot \varepsilon_{jl}^{\gamma ms} + \\ + \Phi_\theta(x, E_{ij}, E_{ij,j}, \beta, \theta^\gamma) + C_i = u_{pi}(x_0), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\pm \frac{1}{2} \delta_{ij} \psi^T(x_0) \cdot \phi_{j\nu}^\Gamma + F_{ij}^{\Gamma\nu}(x_0) \cdot \phi_{j\nu}^\Gamma + F_i^{\lambda ms}(x_0) \cdot \varepsilon_{kk}^{\Gamma ms} + F_{ijl}^{\mu ms}(x_0) \cdot \varepsilon_{jl}^{\Gamma ms} +$$

$$+ \Phi_\theta(x_0, F_{ij}, F_{ij,j}, \beta, \theta^\gamma) - \beta \theta n_i = t_{pi}(x_0),$$

$$\begin{aligned} F_{ij}^{G\nu}(x_0) \cdot \phi_{j\nu}^G + F_i^{\lambda ms}(x_0) \cdot \varepsilon_{kk}^{Gms} + F_{ijl}^{\mu ms}(x_0) \cdot \varepsilon_{jl}^{Gms} + \\ + \Phi_\theta(x_0, F_{ij}, F_{ij,j}, \beta, \theta^\gamma) - \beta \theta n_i = t_{pi}(x_0), \end{aligned} \quad (22)$$

причому точка x_0 така, що в ній існує єдина дотична до $\cup_{\nu=1}^V \Gamma_\nu$; інтеграли $F_{ij}^{\Gamma\nu}(x_0)$ слід розуміти у сенсі головного значення Коші, а всі решта — у сенсі Рімана.

Для визначення невідомих векторів вузлових значень фіктивних теплових джерел $\phi_{\theta\nu}^\gamma$, поверхневих зусиль $\phi_{j\nu}^\Gamma$ та масових сил $\phi_{j\nu}^G$, векторів вузлових значень температури $\theta^{\gamma ms}$ й компонент тензора $\varepsilon_{ij}^{\gamma ms}$ в областях неоднорідностей та сталих C_θ , C_1 , C_2 побудуємо за методом зважених нев'язок дві системи лінійних алгебричних рівнянь, які розв'язуємо послідовно. Будемо вимагати виконання в сенсі колокації граничних умов (19)–(22) та умов збігу невідомих $\theta^{\gamma ms}$, $\varepsilon_{ij}^{\gamma ms}$, введених в s -му елементі m -ї ЛОНМ, зі значеннями,

обчисленими за формулами (16), (18). Враховуємо при цьому і дискретні аналоги [3, 4]

$$W^{\gamma\nu} \cdot \phi_{\theta\nu}^{\gamma} + W_{\theta}^{\lambda ms} \cdot \theta^{\gamma ms} = 0, \quad (23)$$

$$W^{\gamma\nu} \cdot \phi_{j\nu}^{\gamma} + W_j^{\lambda ms} \cdot \varepsilon_{kk}^{\gamma ms} + W_l^{\mu ms} \cdot \varepsilon_{jl}^{\gamma ms} + \Phi(j, 1, 1, \beta, \theta^{\gamma}) = 0 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \text{умов } \int_{\gamma} \phi_{\theta}^{\gamma}(y) d\gamma(y) + \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} f_{\theta}(\theta^{\gamma m}(y)) d\Omega_m(y) &= 0, \\ \int_{\gamma} \phi_j^{\gamma}(y) d\gamma(y) + \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} f_{jk,k}(\varepsilon^{\gamma m}(y)) d\Omega_m(y) + \Phi_{\theta}(j, 1, 1, \beta, \theta^{\gamma}) &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{де } W^{\Gamma\nu} = \int_{-1}^1 \psi^T J_{\Gamma\nu} d\eta, \quad W^{G\nu} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \psi^T J_{G\nu} d\eta_1 d\eta_2,$$

$$W_{\theta}^{\lambda ms} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \lambda_{tms}^{-1} \lambda_{tms,i} \xi^T H_{ms} d\zeta_1 d\zeta_2, \quad W_j^{\lambda ms} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \lambda_{ms} \xi^T H_{ms} d\zeta_1 d\zeta_2,$$

$$W_j^{\mu ms} = 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mu_{ms} \xi^T H_{ms} d\zeta_1 d\zeta_2.$$

У матричній формі системи для знаходження невідомих $\phi_{\theta\nu}^{\gamma}$, $\theta^{\gamma ms}$, C_{θ} та $\phi_{j\nu}^{\gamma}$, $\varepsilon_{ij}^{\gamma ms}$, C_j набудуть такого загального вигляду:

$$\begin{bmatrix} U^{\gamma} & U^1 & \dots & U^M & I \\ Q^{\gamma} & Q^1 & \dots & Q^M & 0 \\ U^{S\gamma} & U^{S1} & \dots & U^{SM} & I \\ W^{\gamma} & W_{\theta}^1 & \dots & W_{\theta}^M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{\theta}^{\gamma} \\ \theta^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta^M \\ C_{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta^p \\ q^p \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} E^{\gamma} & E^1 & \dots & E^M & I \\ F^{\gamma} & F^1 & \dots & F^M & 0 \\ B^{S\gamma} & B^{S1} & \dots & B^{SM} & I \\ W^{\gamma} & W^1 & \dots & W^M & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{\gamma} \\ \varepsilon^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon^M \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^p \\ t^p \\ -\Phi_{\theta}^S \\ -\Phi_{\theta}^C \end{bmatrix}, \quad (26)$$

де ϕ_{θ}^{γ} , ϕ^{γ} — вектори невідомих вузлових значень фіктивних теплових джерел, поверхневих зусиль або масових сил у всьому дискретному аналізі $\cup_{\nu=1}^V \gamma_{\nu}$ краю тіла або зовнішньої приграничної до нього області;

θ^m , ε^m — вектори невідомих вузлових значень температури та компонент деформацій у дискретному аналізі $\cup_{s=1}^M \Omega_{ms}$ ($m = 1, \dots, M$) області локальної неоднорідності Ω_m ;

θ^p , q^p і u^p , t^p — вектори значень заданих на краю тіла температури, теплового потоку, а також переміщень та поверхневих зусиль,

Φ_{θ}^S , Φ_{θ}^C — вектори значень оператора Φ_{θ} у вузлах областей неоднорідності та в нескінченно віддаленій точці.

Елементи блоків глобальних матриць систем (25), (26) є сумами внесків окремих елементів (16)–(18), (23), (24). А саме, блоки U^{γ} , Q^{γ} , U^m , Q^m , $U^{S\gamma}$, U^{Sm} , W^{γ} , W_{θ}^m сформовані з $U^{\gamma\nu}$, $Q^{\gamma\nu}$, U_{θ}^{ms} , Q_{θ}^{ms} , $U^{\gamma\nu}$, U_{θ}^{ms} , $W^{\gamma\nu}$, W_{θ}^{ms} ; блоки E^{γ} , F^{γ} , $B^{S\gamma}$, W^{γ} — з $E_{ij}^{\gamma\nu}$, $F_{ik}^{\gamma\nu}$, $B_{ijk}^{\gamma\nu}$, $W^{\gamma\nu}$; блок E^m — з

$E_i^{\lambda ms}$ та $E_{ijl}^{\mu ms}$; блок F^m — з $F_i^{\lambda ms}$ та $F_{ijl}^{\mu ms}$; блок B^{Sm} — з $B_{ij}^{\lambda ms}$ та $B_{ijkl}^{\mu ms}$; блок W^m — з $W_j^{\lambda ms}$ та $W_l^{\mu ms}$.

У довільній точці $x \in \Omega \cup \Gamma$ температуру визначаємо за формулами (16), (19) після розв'язування системи (25). Використовуючи ці величини та розв'язок системи (26), знаходимо переміщення, деформації, напруження та поверхневі зусилля за формулами (17), (18), (21), (22).

Числові дослідження. Наведемо результати досліджень, які проведені для тіла, що займає область $\Omega = \{0 \leq x_1 \leq 2; 0 \leq x_2 \leq 2\}$ і містить у собі таку неоднорідність $\Omega_g = \{0.7 \leq x_1 \leq 1.3; 0.7 \leq x_2 \leq 1.3\}$. Для уникнення громіздкості запису тут і надалі не будемо приводити розмірності декартових координат, які, як і решта величин, розглядаються в системі СІ. Зрозуміло, що в цьому випадку край тіла описували виразом $\Gamma = \cup_{i=1}^4 \Gamma_i$, де $\Gamma_1 = \{0 \leq x_1 \leq 2; x_2 = 0\}$, $\Gamma_2 = \{x_1 = 2; 0 \leq x_2 \leq 2\}$, $\Gamma_3 = \{0 \leq x_1 \leq 2; x_2 = 2\}$, $\Gamma_4 = \{x_1 = 0; 0 \leq x_2 \leq 2\}$. На краю тіла задавали такі граничні умови для переміщень: $u_1 = 0; u_2 = 0, x \in \Gamma_1$; $u_1 = 0; u_2 = 0.001 \cdot x_2, x \in \Gamma_2$;

$$u_1 = 0; u_2 = 0.02, x \in \Gamma_3; \quad u_1 = 0; u_2 = 0.01 \cdot (2 - x_2), x \in \Gamma_4;$$

і температури: $\theta = 0, x \in \Gamma_1$; $\theta = x_2, x \in \Gamma_2$;

$$\theta = \theta_i = \text{const}, x \in \Gamma_3; \quad \theta = \theta_i - x_2, x \in \Gamma_4.$$

Розв'язували задачі з різними комбінаціями матеріалів, а також із різними температурами на межі області. Для областей неоднорідностей використовували коефіцієнти μ_i ($i = 1, 2$) у вигляді $\mu_{0i} + b_i \cdot (0.7 - x_2) \cdot (x_2 - 1.3)$, де $b_i = \text{const}$, в точці (1; 1) ця функція дорівнює значенню μ_i для матеріалу ЛОНМ.

Оскільки для інженерних розрахунків переважно використовують не коефіцієнти Ляме, а інші пружні сталі, зокрема, модуль Юнга $E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$ та коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.5 \frac{\lambda}{\mu + \lambda}$, в числових дослідженнях вибрані саме вони. Область Ω виготовлена із сталі ($E_0 = 1.96 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}$; $\nu_0 = 0.3$; $\alpha_0 = 16.6 \cdot 10^{-6} \text{К}^{-1}$; $\lambda_{t0} = 16 \frac{\text{Вм}}{\text{М} \cdot \text{К}}$). ЛОНМ у різних обчислювальних експериментах брали з алюмінію ($E_1 = 6.8 \cdot 10^{10} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}$; $\nu_1 = 0.091$; $\alpha_1 = 23.8 \cdot 10^{-6} \text{К}^{-1}$; $\lambda_{t1} = 209 \frac{\text{Вм}}{\text{М} \cdot \text{К}}$) і з іншого типу сталі ($E_2 = 2.1 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{М}^2}$; $\nu_2 = 0.3$; $\alpha_2 = 12 \cdot 10^{-6} \text{К}^{-1}$; $\lambda_{t2} = 58 \frac{\text{Вм}}{\text{М} \cdot \text{К}}$).

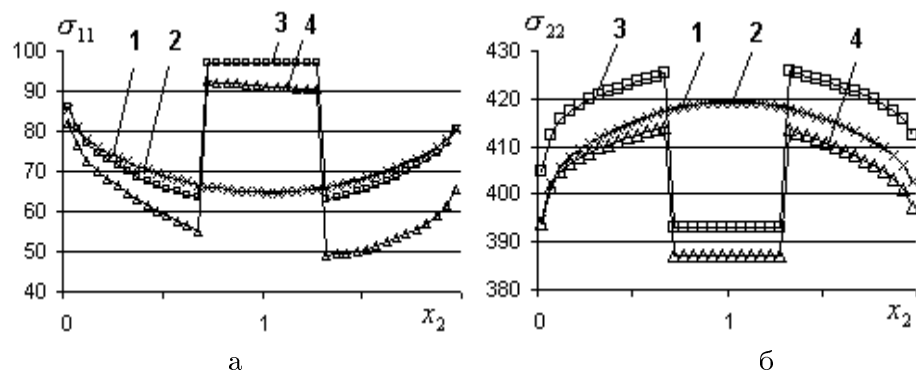


Рис. 1

На рис. 1 і 2 зображено залежності компонент тензора напружень як

розв'язків задач пружності та термопружності від координати x_2 у перерізі $x_1 = 1$ для ЛОНМ з алюмінію та для ЛОНМ зі сталі іншого типу, ніж основна частина тіла (криві з символами \square , Δ та номерами 3, 4 відповідно). Для порівняння тут також наведено розв'язки задач пружності та термопружності для однорідного тіла (криві без символів і з символом \times та номерами 1, 2).

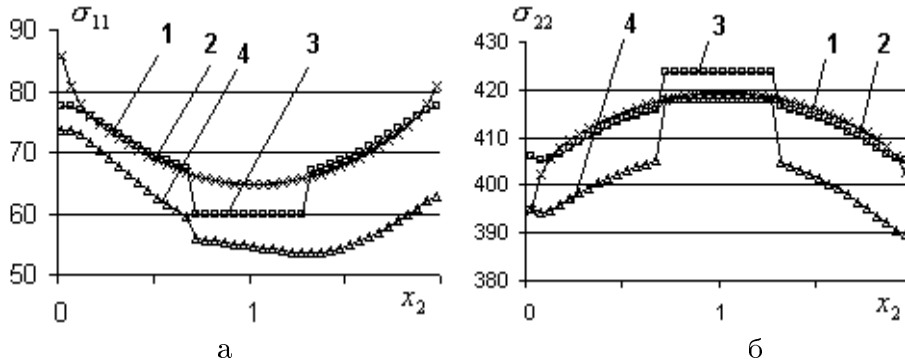


Рис. 2

Рис. 3 ілюструє залежність температурних напружень від зміни температури на границі тіла для ЛОНМ з алюмінію. Криві з символами \square , Δ (позначені номерами 3, 4) відповідають лінійній зміні температури на границі тіла від 273 К до 275 К та 293 К, розв'язки задач термопружності для однорідного тіла (криві без символів і з символом \times та номерами 1, 2) наведені тут для порівняння.

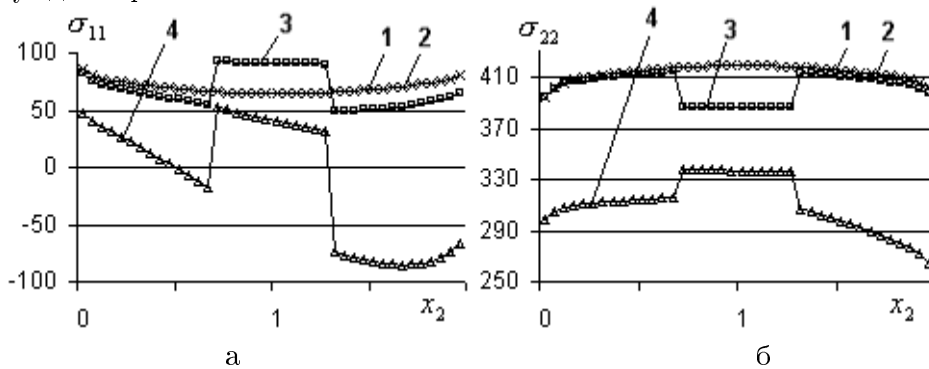


Рис. 3

Як видно з графіків, у однорідному середовищі компоненти тензора напружень σ_{11}^{m0} і $\sigma_{11}^{\theta0}$, одержані як розв'язки задач пружності та термопружності, майже співпадають, незважаючи на діапазон зміни температури на границі.

Для середовищ з ЛОНМ температурні напруження σ_{11}^{θ} значно відрізняються від компонент тензора напружень σ_{11}^m , які виникають під час розв'язування задачі пружності. Зміна характеристик за лінійним законом до властивостей, що відповідають іншому типу сталі в центрі ЛОНМ, спричинила суттєво нижчі значення температурних напружень σ_{11}^{θ} у порівнянні з однорідним тілом і навіть з σ_{11}^m , натомість значення σ_{22}^{θ} і σ_{22}^m майже не відрізняються між собою, хоч вони є дещо вищими, ніж σ_{11}^{m0} і $\sigma_{11}^{\theta0}$, в ЛОНМ та суттєво нижчими за її межами. Для локальної неоднорідності з властивостями алюмінію в центрі області характер температурної залежності компонент тензора напружень у порівнянні з однорідним випадком різко змінюється у межах ЛОНМ, причому хоч значення температурних напружень σ_{11}^{θ} і далі залишаються дещо нижчими, ніж σ_{11}^m , проте стають набагато вищими, ніж для однорідного тіла; поза

межами ЛОНМ і σ_{11}^{θ} , і σ_{11}^m є меншими за σ_{11}^{m0} . Дещо іншу картину спостерігаємо щодо значень σ_{22}^{θ} , вони є завжди меншими, ніж σ_{22}^{m0} і σ_{22}^m , натомість σ_{22}^m за межами ЛОНМ є вищими, ніж в однорідному тілі, а в ЛОНМ стають суттєво нижчими. Збільшення діапазону зміни температури на границі тіла суттєво впливає на значення компонент тензора напружень, вони стають меншими, чіткіше проявляється несиметрія, причому σ_{11}^{θ} навіть змінюють знак, а σ_{22}^{θ} – форму (графік має заглибину для $\theta_1 = 275$ К та опуклість для $\theta_2 = 293$ К).

Як впливає з проведених числових досліджень, під час розв'язування задач термопружності в локально-неоднорідних тілах необхідно враховувати вплив температури, оскільки він суттєво змінює значення компонент тензора напружень. Вказані на графіках відмінності можуть бути корисними для розпізнавання локальних неоднорідностей у тілах.

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. – Москва: Мир, 1984. – 494 с.
2. Григоренко Я. М., Грицько Є. Г., Журавчак Л. М. Застосування скінченних різниць і приграничних елементів в задачі пружності для неоднорідного тіла // Доп. АН України. – 1993. – № 4. – С. 49–53.
3. Грицько Є. Г., Гудзь Р. В., Журавчак Л. М. Метод граничних елементів та ермітові скінченні елементи у задачах пружності для тіл з неоднорідностями // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – № 5. – С. 99–101.
4. Журавчак Л. М., Грицько Є. Г. Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики. – Львів: Карпат. відд. Ін-ту геофізики НАН України, 1996. – 220 с.
5. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. Москва: Наука, 1984. – 368 с.
6. Wendland W. L. On asymptotic error estimates for combined BEM and FEM // Finite Element and Boundary Element Techniques from Mathematical and Engineering Points of View, CISM Courses and Lectures. – New York, 1988. – P. 273–333.

РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА СОВМЕСТНЫМ ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ГРАНИЧНЫХ, ПРИГРАНИЧНЫХ И КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Предлагается методика решения задачи термоупругости для тела с локальными областями неоднородности материала, в которых коэффициенты теплопроводности и Ляме зависят от координат. Данный подход базируется на аддитивном расщеплении операторов уравнений задачи и совместном использовании в локальных областях неоднородности материала непрямых методов граничных или приграничных элементов с методом конечных элементов.

SOLVING OF THE FLAT STATIC THERMOELASTICITY PROBLEM FOR LOCALLY INHOMOGENEOUS SOLID BY USING BY THE COMBINATION OF BOUNDARY, NEAR-BOUNDARY AND FINITE ELEMENTS METHODS

The method of solving the thermoelasticity problem for a solid of complex form with local inhomogeneous domains, where the heat conductivity coefficient and the Lamé's coefficients of solid's material depend on the coordinates, is suggested. The solution algorithm is based on the application of operations of additive immersion of operators and on the combination of Boundary Element Technique or Near-Boundary Element Technique with Hermite Finite Elements only in inhomogeneous domains.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів,
Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я.С.Підстригача НАН України, Львів

Одержано
30.12.04