УДК 539.3

М. А. Сухорольський, О. А. Микитюк, І. П. Лисий

ВЗАЄМОДІЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ТОНКОСТІННИМИ ПІДКРІПЛЕННЯМИ

Розглянуто задачу про взаємодію циліндричної оболонки з пружними тонкостінними елементами змінної товщини. Знайдено закон зміни товщини підкріплень за умови постулювання закону розподілу контактного тиску.

1. Вступ. У роботах [1, 4] наведено модель контактної взаємодії тонкостінних пружних тіл, яка значно розширює межі застосування математичного апарату теорії оболонок. У роботах [2, 3, 5, 6] досліджено розв'язки задач про локальне навантаження тонкостінних тіл і показано, що в межах рівнянь теорій оболонок можуть бути знайдені тільки середні значення реальних напружень (усереднені по областях, діаметри яких співмірні з товщиною оболонки).

У даній роботі розглянуто задачу про взаємодію циліндричної оболонки з пружними тонкостінними елементами за умов постулювання закону розподілу контактних напружень. Задачу сформульовано у межах рівнянь теорії оболонок, а її узагальнений (усереднений) розв'язок зображено у вигляді узагальнених сум рядів Фур'є.

2. Математична модель оболонки. Розглянемо тонку циліндричну оболонку, що знаходиться під дією поверхневого навантаження. Оболонка віднесена до локальної ортогональної системи координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, де $\alpha_1, \alpha_2 = R\varphi$ — осьова і тангенціальна координати в серединній поверхні S; α_3 — нормальна до серединної поверхні координата; $2h$ — товщина оболонки.

Напружено–деформований стан оболонки описуємо рівняннями теорії Тимошенка, в якій нехтуємо жорсткими поворотами відносно нормалі до серединної поверхні [2]:

$$\frac{\partial N_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial N_{i2}}{\partial \alpha_2} + k_i Q_i = -2\sigma_i^-, \quad \frac{\partial M_{i1}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial M_{i2}}{\partial \alpha_2} - Q_i = -2h\sigma_i^+,$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial \alpha_2} - (k_1 N_{22} + k_2 N_{22}) = -2\sigma_3^- \quad (i = 1, 2)\,; \tag{1}$$

$$N_{ii} = -B\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_i^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_j^2} - (k_i + \nu k_j)\, w\right), \quad M_{ii} = -D\left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_i^2} + \nu \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \alpha_j^2}\right),$$

$$N_{12} = -B\,(1-\nu)\,\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + T, \quad N_{21} = -B\,(1-\nu)\,\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - T,$$

$$M_{12} = -D\,(1-\nu)\,\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} + H, \quad M_{21} = -D\,(1-\nu)\,\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} - H, \tag{2}$$

$$Q_i = \Lambda' \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\,(w - \gamma + k_i u) \quad (i, j = 1, 2,\ i \neq j)\ ,$$

де $\Lambda' = \dfrac{5hG'}{3}$; $B = \dfrac{2hE}{1-\nu^2}$; $D = \dfrac{2h^3 E}{3\,(1-\nu^2)}$; $2\sigma_i^{\pm} = \left(\sigma_{i3}^+ \pm \sigma_{i3}^-\right) \quad (i = 1, 2, 3)$; $\sigma_{i3}^{\pm} = \sigma_{i3}\,(\alpha_1, \alpha_2, \pm h)$ — задані на лицевих поверхнях напруження; $k_1 = 0$, $k_2 = 1/R$ — головна кривина серединної поверхні; E, G', ν — пружні характеристики матеріалу; N_{ij}, Q_i, M_{ij} — сили та моменти; T, H — зусилля, що відповідають жорстким поворотам; u, γ — потенціали тангенціальних переміщень серединної поверхні і кутів повороту нормалі, $u_i = -\dfrac{\partial u}{\partial \alpha_i}$, $\gamma_i = -\dfrac{\partial \gamma}{\partial \alpha_i}$.

Напруження і переміщення визначаємо за такими формулами:

$$\sigma_{ij} = \frac{N_{ij}}{2h} + \frac{3M_{ij}}{2h^3}\alpha_3, \quad \sigma_{3i} = \frac{3Q_i}{4h}\left(1 - \frac{\alpha_3^2}{h^2}\right) + \frac{\sigma_i^+}{2}\left(\frac{3\alpha_3^2}{h^2} - 1\right) + \sigma_i^- \frac{\alpha_3}{h},$$

$$\sigma_{33} = \sigma_3^+ + \sigma_3^- \frac{\alpha_3}{h}, \quad (i, j = 1, 2,\ i \neq j)\,, \tag{3}$$

$$U_i = -\frac{\partial}{\partial \alpha_i}[u\,(\alpha_1, \alpha_2) + \gamma\,(\alpha_1, \alpha_2)\,\alpha_3], \quad U_3 = w\,(\alpha_1, \alpha_2)\,.$$

Граничні умови формулюємо відносно зведених до серединної поверхні величин u_n, w, γ_n, N_n^*, N_τ^*, Q_n^*, M_n, де $\vec{n} = \{n_1, n_2, 0\}$, $\vec{\tau} = \{-n_2, n_1, 0\}$ — одиничні вектори, нормальний і дотичний до границі серединної поверхні.

Систему рівнянь (1), (2) можна звести до системи трьох ключових рівнянь:

$$L_{11}\,(u) + L_{12}\,(w) + L_{13}\,(\gamma) = -\frac{2}{B}\left(\frac{\partial \sigma_1^-}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_2^-}{\partial \alpha_2}\right),$$

$$L_{21}\,(u) + L_{22}\,(w) + L_{23}\,(\gamma) = -\frac{2}{B}\sigma_3^-\,, \tag{4}$$

$$L_{31}\,(u) + L_{32}\,(w) + L_{33}\,(\gamma) = -\frac{2h}{B}\left(\frac{\partial \sigma_1^+}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \sigma_2^+}{\partial \alpha_2}\right),$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$; $\Delta_1 = k_1 \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + k_2 \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$; $\Delta_2 = k_2 \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + k_1 \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$; $\Delta_{11} = k_1^2 \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + k_2^2 \dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2}$; $L_{11} = -\left(\Delta\Delta - \dfrac{\Lambda'}{B}\Delta_{11}\right)$; $L_{12} = L_{21} = \nu\,\Delta_2 + \left(1 + \dfrac{\Lambda'}{B}\right)\Delta_1$; $L_{22} = \dfrac{\Lambda'}{B}\Delta - \left(k_1^2 + k_2^2\right)$; $L_{23} = L_{32} = -\dfrac{\Lambda'}{B}\Delta$; $L_{13} = L_{31} = -\dfrac{\Lambda'}{B}\Delta_1$; $L_{33} = -\dfrac{D}{B}\left(\Delta\Delta - \dfrac{\Lambda'}{D}\Delta\right)$.

Рівняння для визначення функцій T, H одержуються з перших чотирьох рівнянь (1).

3. Постановка задачі. Розглянемо замкнену циліндричну оболонку з шарнірно закріпленими краями. Довжина і радіус оболонки відповідно l_1 і R. Оболонка взаємодіє вздовж смуг $D_1 = \left\{(\alpha_1, \alpha_2) : \left|\alpha_1 - \alpha_1^0\right| < b;\ |\alpha_2| < s\right\}$ і $D_2 = \left\{(\alpha_1, \alpha_2) : \left|\alpha_1 - \left(l_1 - \alpha_1^0\right)\right| < b;\ |\alpha_2| < s\right\}$ з двома однаковими циліндричними тонкостінними елементами такого ж радіуса, де $2b$, $2s$ — ширина і довжина елементів $(2b < l_1/2,\ s < l_2 = \pi R)$.

Вважаємо, що поверхневі напруження $\sigma_{i3}^{\pm}$ задані:

$$\sigma_{33}^- = p\,(\alpha_1, \alpha_2)\,, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in S,$$

$$\sigma_{33}^+ = \begin{cases} q\left(\alpha_1 - \alpha_1^0, \alpha_2\right), & (\alpha_1, \alpha_2) \in D_1, \\ q\left(\alpha_1 - \left(l_1 - \alpha_1^0\right), \alpha_2\right), & (\alpha_1, \alpha_2) \in D_2, \\ 0, & (\alpha_1, \alpha_2) \notin D_1 \cup D_2, \end{cases} \tag{5}$$

$$\sigma_{13}^{\pm} = 0, \quad \sigma_{23}^{\pm} = 0,$$

де $p\,(\alpha_1, \alpha_2)$ — навантаження; $q\,(\alpha_1, \alpha_2)$ — закон розподілу контактного тиску між оболонкою і підкріпленнями. Вважаємо також, що контактний тиск рівномірно розподілений по ширині підкріплень, а по довжині змінюється за законом

$$q\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\frac{P_0}{4RbI\left(Ra_2,1\right)}\operatorname{ch}\left(a_2\alpha_2\right),\quad |\alpha_1|<b,\quad |\alpha_2|<s, \tag{6}$$

де

$$I(a,m)=\int\limits_0^{\varphi_0}\operatorname{ch}\left(a\varphi\right)\cos\left(m\varphi\right)\,d\varphi=\frac{m\operatorname{ch}\left(a\varphi_0\right)\sin\left(m\varphi_0\right)+a\operatorname{sh}\left(a\varphi_0\right)\cos\left(m\varphi_0\right)}{\left(a^2+m^2\right)}; \tag{7}$$

$P_0=4\int\limits_0^s\int\limits_0^b q\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\cos\varphi\,d\alpha_2\,d\alpha_1$ — рівнодійна контактного тиску на одному підкріпленні $\left(\alpha_2=R\varphi,\ s=R\varphi_0\right)$; a_2 — задана величина.

Напружено–деформований стан оболонки описуємо рівняннями (1)–(5). Граничні умови, що відповідають шарнірному закріпленню країв оболонки, мають вигляд

$$\begin{aligned}
&w\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\big|_{\alpha_1=0}=0,\quad w\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\big|_{\alpha_1=l_1}=0,\\
&N_{11}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\big|_{\alpha_1=0}=0,\quad N_{11}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\big|_{\alpha_1=l_1}=0,\\
&M_{11}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\big|_{\alpha_1=0}=0,\quad M_{11}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\big|_{\alpha_1=l_1}=0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Умови контакту формулюємо на серединних лініях L_1, L_2 областей контакту; задаємо рівність нормальних переміщень оболонки і підсилюючих елементів:

$$\begin{aligned}
&w\left(\alpha_1^0,\alpha_2\right)=w_0\left(\alpha_2\right),\quad \left(\alpha_1^0,\alpha_2\right)\in L_1,\\
&w\left(l_1-\alpha_1^0,\alpha_2\right)=w_0\left(\alpha_2\right),\quad \left(l_1-\alpha_1^0,\alpha_2\right)\in L_2,
\end{aligned} \tag{9}$$

де $w_0=w_0\left(\alpha_2\right)$ — нормальні (до серединної поверхні оболонки) переміщення точок серединних ліній підкріплень.

Задача полягає у відшуканні змінної товщини $h_0=h_0\left(\alpha_2\right)$ підкріплюючих елементів, за яких контактні напруження розподілені за законом (6).

4. Деформування підкріплюючих елементів. Вважаємо, що зусилля у тонкостінних елементах приведені до ліній L_1, L_2. Рівняння, що описують напружено–деформований стан підкріплень, одержимо з рівнянь (1), (2), нехтуючи силами і моментами у напрямі осьової координати α_1, а також поперечними зсувними та мембранними деформаціями. За відсутності тангенціальних навантажень ці рівняння набудуть вигляду

$$\frac{dN_0}{d\alpha_2}+k_2Q_0=0,\quad \frac{dQ_0}{d\alpha_2}-k_2N_0=-2bq\left(\alpha_1^0,\alpha_2\right),\quad \frac{dM_0}{d\alpha_2}-Q_0=0,$$

$$M_0=-\frac{bh_0^3E_0}{6}\left(\frac{d^2w_0}{d\alpha_2^2}+k_2^2w_0\right), \tag{10}$$

де $\alpha_2=R\varphi$; $k_2=\dfrac{1}{R}$; $h_0\left(-\alpha_2\right)=h_0\left(\alpha_2\right)$; N_0, Q_0, M_0 — зусилля в опорах, приведені до серединних ліній L_1, L_2; E_0 — модуль Юнга; w_0 — прогин підкріплень.

Розв'язавши перші три рівняння (10) на відрізку $0\le\varphi\le\varphi_0$ з урахуванням відсутності зусиль на кінцях опор, $N_0\left(s\right)=0$, $Q_0\left(s\right)=0$, $M_0\left(s\right)=0$, знайдемо

$$Q_0=2bR\int\limits_{\varphi}^{\varphi^0}\cos\left(t-\varphi\right)q\left(\alpha_1^0,t\right)dt,\quad M_0=-2bR^2\int\limits_{\varphi}^{\varphi^0}\sin\left(t-\varphi\right)q\left(\alpha_1^0,t\right)dt. \tag{11}$$

З останньої формули (10) і другої формули (11) з урахуванням умов контакту (9) отримаємо формулу для визначення товщини опор

$$h_0^3(\varphi) = \frac{12R^4}{E_0}\left[\int\limits_{\varphi}^{\varphi_0} \sin(t-\varphi)\, q\left(\alpha_1^0, t\right)\, dt\right]\left(\frac{d^2w^0}{d\varphi^2} + w^0\right)^{-1}$$

або з урахуванням виразу контактного тиску (7),

$$h_i^3(\varphi) = \frac{3R^3P_0}{E_i(a_2^2+1)\, b\, I(Ra_2,1)}[a_2\,\mathrm{sh}(a_2\varphi_0)\sin(\varphi_0-\varphi) +$$

$$+\,\mathrm{ch}(a_2\varphi) - \mathrm{ch}(a_2\varphi_0)\cos(\varphi_0-\varphi)]\left(\frac{d^2w^0}{d\varphi^2} + w^0\right)^{-1}, \qquad (12)$$

де $w^0 = w\left(\alpha_1^0, R\varphi\right)$.

Для сталого тиску $q = \mathrm{const}$ $\quad(P_0 = 4Rbq\sin\varphi_0)$ маємо таку формулу:

$$h_0^3(\varphi) = \frac{3R^3P_0}{E_0 b}\;\frac{1-\cos(\varphi_0-\varphi)}{\left(\frac{d^2w^0}{d\varphi^2} + w^0\right)\sin\varphi_0}.$$

5. Побудова узагальненого розв'язку допоміжної задачі. Функції (5), що описують взаємодію оболонки з підкріпленнями, є кусково-неперервними функціями і тому допоміжна крайова задача (4), (8) не є коректно поставленою в розумінні існування класичного розв'язку. Знайдемо узагальнений розв'язок цієї задачі. Ґрунтуючись на послідовнісному підході до побудови узагальнених розв'язків крайових задач [2, 5, 6], зовнішнє навантаження на оболонку $\sigma_{33}^- = p(\alpha_1,\alpha_2)$ і контактний тиск (6) зобразимо у вигляді границь слабко збіжних послідовностей функцій:

$$\sigma_{33}^-(\alpha_1,\alpha_2) = \lim_{n\to\infty} p_n(\alpha_1,\alpha_2), \quad \sigma_{33}^+(\alpha_1,\alpha_2) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n^+(\alpha_1,\alpha_2), \qquad (13)$$

де

$$p_n = \sum_{\substack{k=1,3,\ldots\\ m=0,1,\ldots}}^{n} c_{km}(\varepsilon_n) p_{km} \Phi_{km}^3(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\sigma_n^+ = P_0 \sum_{\substack{k=1,3,\ldots\\ m=0,1,\ldots}} n c_{km}(\varepsilon_n)\, \sigma_{km}^+ \Phi_{km}^3(\alpha_1,\alpha_2)$$

— узагальнені частинні суми рядів Фур'є; $c_{km}(\varepsilon) = \varphi(\lambda_{1k}\varepsilon)\,\varphi(\lambda_{2m}\varepsilon)$; $\Phi_{km}^3(\alpha_1,\alpha_2) = \sin(\lambda_{1k}\alpha_1)\sin(\lambda_{2m}\alpha_2)$; $\lambda_{1k} = \dfrac{k\pi}{l_1}$; $\lambda_{2m} = \dfrac{m\pi}{l_2}$; $\varphi(\lambda) = \left[\dfrac{\sin(\lambda/2)}{\lambda/2}\right]^2$; $\varepsilon = \varepsilon_n$ — нескінченно мала послідовність, $\varepsilon_n = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^r}\right)$, $0 < r < 1$; p_{km} — коефіцієнти Фур'є функції $p(\alpha_1,\alpha_2)$; $\sigma_{km}^+ = \dfrac{4P_0}{\pi R b l_1} \times \dfrac{I(Ra_2,m)\,\delta_m \sin(\lambda_k b)\sin\left(\lambda_k\alpha_1^0\right)}{\lambda_{1k} I(Ra_2,1)}$ — коефіцієнти Фур'є функції $\sigma_{33}^+(\alpha_1,\alpha_2)$; $\delta_0 = \dfrac{1}{2}$; $\delta_m = 1$, якщо $m = 1,2,\ldots$.

Невідомі функції системи рівнянь (4) зобразимо згідно з (13) у вигляді послідовностей таких узагальнених частинних сум:

$$\begin{Bmatrix} u_n \\ w_n \\ \gamma_n \end{Bmatrix} = \frac{1}{B} \sum_{\substack{k=1,3,\ldots\\ m=0,1,\ldots}}^{n} c_{km}(\varepsilon) \begin{Bmatrix} u_{km} \\ w_{km} \\ \gamma_{km} \end{Bmatrix} \left(P_0\sigma_{km}^+ - p_{km}\right)\Phi_{km}^3(\alpha). \qquad (14)$$

Зауважимо, що члени цих послідовностей функцій, а також їх граничні елементи задовольняють граничні умови (8).

Підставивши вирази функцій (13), (14) у рівняння (4), одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів u_{km}, w_{km}, γ_{km} :

$$\begin{aligned} &L_{11km}u_{km} + L_{12km}w_{km} + L_{13km}\gamma_{km} = 0, \\ &L_{21km}u_{km} + L_{22km}w_{km} + L_{23km}\gamma_{km} = -1, \\ &L_{31km}u_{km} + L_{32km}w_{km} + L_{33km}\gamma_{km} = 0, \end{aligned} \tag{15}$$

де $\Delta_{km} = \lambda_{1k}^2 + \lambda_{2m}^2$; $\Delta_{1km} = k_1\lambda_{1k}^2 + k_2\lambda_{2m}^2$; $\Delta_{2km} = k_2\lambda_{1k}^2 + k_1\lambda_{2m}^2$; $\Delta_{11km} = k_1^2\lambda_{1k}^2 + k_2^2\lambda_{2m}^2$; $L_{11km} = -\left(\Delta_{km}\Delta_{km} + \dfrac{\Lambda'}{B}\Delta_{11km}\right)$; $L_{12km} = L_{21km} = -\nu\,\Delta_{2km} - \left(1 + \dfrac{\Lambda'}{B}\right)\Delta_{1km}$; $L_{22km} = -\dfrac{\Lambda'}{B}\Delta_{km} - \left(k_1^2 + 2\nu\, k_1 k_2 + k_2^2\right)$; $L_{23km} = L_{32km} = \dfrac{\Lambda'}{B}\Delta_{km}$; $L_{13km} = L_{31km} = \dfrac{\Lambda'}{B}\Delta_{1km}$; $L_{33km} = -\dfrac{\Lambda'}{B}\Delta_{km}\left(\dfrac{D}{\Lambda'}\Delta_{km} + 1\right)$.

Розв'язок системи рівнянь (15) запишемо у вигляді

$$u_{km} = \frac{\Omega_{1km}}{\Omega_{km}}, \quad w_{km} = \frac{\Omega_{2km}}{\Omega_{km}}, \quad \gamma_{km} = \frac{\Omega_{3km}}{\Omega_{km}}, \tag{16}$$

де

$$\Omega_{km} = L_{11km}L_{22km}L_{33km} + L_{12km}L_{23km}L_{31km} + L_{21km}L_{32km}L_{13km} - \\ - L_{13km}L_{22km}L_{31km} - L_{12km}L_{21km}L_{33km} - L_{11km}L_{23km}L_{32km};$$

$$\Omega_{1km} = L_{23km}L_{32km} - L_{22km}L_{33km};$$

$$\Omega_{2km} = L_{13km}L_{31km} - L_{11km}L_{33km}; \quad \Omega_{3km} = L_{21km}L_{12km} - L_{11km}L_{33km}.$$

Підставивши формули (16) у (14) і перейшовши до границі при $n \to \infty$, одержимо узагальнений розв'язок задачі (4), (8):

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \gamma \end{Bmatrix} = \frac{1}{B}\lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=1,3,\ldots \\ m=0,1,\ldots}}^{n} c_{km}(\varepsilon_n) \begin{Bmatrix} \Omega_{1km}/\Omega_{km} \\ \Omega_{2km}/\Omega_{km} \\ \Omega_{3km}/\Omega_{km} \end{Bmatrix} \left(P_0\sigma_{km}^+ - p_{km}\right)\Phi_{km}^+(\alpha). \tag{17}$$

6. Побудова розв'язку контактної задачі. Висновки. Відшукання числових значень розв'язку (17) ґрунтується на наближенні відповідних узагальнених сум рядів їх частинними сумами. Якщо у розвиненнях (14) зафіксувати параметр $\varepsilon \approx h$, де $2h$ — товщина оболонки, і вважати, що n — достатньо великий номер, то згідно з дослідженнями, проведеними у роботі [6], наближений розв'язок є ближчим до точного розв'язку, одержаного з використанням просторових рівнянь теорії пружності, ніж узагальнений розв'язок (17), одержаний в межах рівнянь теорії оболонок. При цьому достатньо висока точність числових результатів забезпечується умовою $n\pi\varepsilon/l_i >> 1$ і, відповідно, $n >> l_i/(\pi\varepsilon)$.

Зазначимо також, що наближення функції узагальненою частинною сумою тригонометричного ряду ототожнюється з усередненням цієї функції на відрізку довжини 2ε [5].

Таким чином, за умови $\varepsilon \approx h$, $n >> l_i/(\pi\varepsilon)$ наближений розв'язок задачі (4), (5), (8)

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ \gamma \end{Bmatrix} \approx \frac{1}{B} \sum_{\substack{k=1,3,\ldots \\ m=0,1,\ldots}}^{n} c_{km}(\varepsilon_n) \begin{Bmatrix} \Omega_{1km}/\Omega_{km} \\ \Omega_{2km}/\Omega_{km} \\ \Omega_{3km}/\Omega_{km} \end{Bmatrix} \left(P_0\sigma_{km}^+ - p_{km}\right)\Phi_{km}^+(\alpha) \tag{18}$$

є розв'язком задачі про взаємодію оболонки з тонкостінними елементами. Він є коректним з міркувань відповідності реальним умовам навантаження, застосування рівнянь теорії оболонок та збіжності рядів.

Підставивши вираз прогину оболонки (18) при $\alpha_1 = \alpha_1^0$ у формулу (12), одержимо формулу, яка встановлює залежність товщини підкріплень від параметрів, що характеризують закон розподілу контактного тиску (6). Визначальним серед цих параметрів є параметр a_2, що характеризує відхилення значень контактного тиску в середній і приграничній зонах області контакту. Зокрема, приймаючи гіпотезу про сталий контактний тиск, матимемо $a_2 = 0$.

1. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – Москва: Наука, 1983. – 488 с.
2. *Бурак Я. Й., Рудавський Ю. К., Сухорольський М. А.* Узагальнені розв'язки Фур'є крайових задач теорії оболонок // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 2001. – **44**, № 4. – С. 57–62.
3. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* О локальных особенностях в математических моделях физических полей // Мат. методы и физ.–мех. поля. – 1998. – **41**, № 1. – С. 12–34.
4. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. – Москва: Машиностроение, 1980. – 411 с.
5. *Рудавський Ю. К., Костробій П. П., Сухорольський М. А. та ін.* Рівняння математичної фізики. Узагальнені розв'язки крайових задач. – Львів: Нац. ун-т «Львів. політехніка», 2002. – 226 с.
6. *Сухорольський М. А.* Узагальнений розв'язок задачі про локальне навантаження шару // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. математика та інформатика. – 2004. – Вип. 8. – С. 176–181.

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ТОНКОСТЕННЫМИ ПОДКРЕПЛЕНИЯМИ

Рассмотрена задача о взаимодействии цилиндрической оболочки с двумя упругими тонкостенными елементами. Найден закон изменения толщины подкреплений при постулировании закона распределения контактного давления.

INTERACTION OF THE CYLINDRICAL SHELL WITH THE THIN–WALL SUPPORTS

The problem of the interaction of the cylindrical shell and the thin–wall elastic elements whith variable thickness is considered in the paper. The law of the variability of the thickness of supports on condition of postulation of the law of contact pressure distribution is found.

Одержано 28.12.04

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів