УДК 517.95

Н. В. Салдіна

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для параболічного рівняння з крайовими умовами другого роду. Невідомий коефіцієнт, що залежить від часу, прямує до нуля, як степенева функція. Розглянуто випадок слабкого виродження. При доведенні використовується теорема Шаудера та властивості інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду.

Вступ. Теорія обернених задач у порівнянні з теорією диференціальних рівнянь, частиною якої вона є, має недовгу історію. Завдяки широкому застосуванню у галузях природокористування, медицини, економіки та космічних досліджень, вона почала бурхливо та динамічно розвиватися з початку 70-х років минулого століття. Задачі визначення старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні другого порядку є типовими для теорії обернених задач. Розглядалися випадки розміщення цього коефіцієнта при старшій похідній, при похідній за часом, а також залежність від часової і просторових змінних. Обернені задачі з виродженням розглядались у роботах [1–3] для рівнянь гіперболічного та еліптичного типів з невідомим вільним членом і молодшим коефіцієнтом. Випадок слабкого виродження для рівняння теплопровідності з крайовими умовами першого роду розглядався в роботі [4]. Метою пропонованої роботи є дослідження впливу молодших і вільного членів на поведінку розв'язку задачі.

Формулювання задачі. В області $Q_T \equiv \{(x,t) : 0 < x < h,\ 0 < t < T\}$ розглянемо параболічне рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $a(t) > 0,\ t \in (0,T]$, початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \qquad u_x(h,t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовою перевизначення

$$u(0,t) = \mu_3(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Замінами $u_x(x,t) \equiv v(x,t)$, $u(x,t) = \mu_3(t) + \int_0^x v(\eta,t)\,d\eta$ зведемо задачу (1)–(4) до задачі з крайовими умовами першого роду:

$$v_t = a(t)v_{xx} + b(x,t)v_x + \big(b_x(x,t) + c(x,t)\big)v + {}$$
$$+ c_x(x,t)\left(\mu_3(t) + \int_0^x v(\eta,t)\,d\eta\right) + f_x(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{5}$$

$$v(x,0) = \varphi'(x), \qquad x \in [0,h], \tag{6}$$

$$v(0,t) = \mu_1(t), \qquad v(h,t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{7}$$

$$a(t)v_x(0,t) = \mu_4(t), \qquad t \in [0,T], \tag{8}$$

де $\mu_4(t) \equiv \mu'_3(t) - b(0,t)\mu_1(t) - c(0,t)\mu_3(t) - f(0,t)$.

Під розв'язком задачі (5)–(8) розуміємо пару функцій $(a(t),\ v(x,t))$ з класу $C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\bar{Q}_T)$, $a(t) > 0$, $t \in (0,T]$, яка задовольняє рівняння (5) та умови (6)−(8) і для якої існує границя $\lim\limits_{t\to+0}\frac{a(t)}{t^{\beta}}>0$, де $0<\beta<1$ − задане число.

Існування розв'язку.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови*:

(*i*) $\varphi\in C^2[0,h],\quad \mu_i\in C^1[0,T],\quad i=1,2,3,\quad b,\,c,\,f\in C^{1,0}(\bar{Q}_T)$;

(*ii*) $\varphi''(x)>0,\quad x\in[0,h],\quad \mu_4(t)>0,\quad t\in(0,T]$,

існує $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\mu_4(t)}{t^{\beta}}\equiv M>0,\quad 0<\beta<1$;

iii) $\varphi'(0)=\mu_1(0),\qquad \varphi'(h)=\mu_2(0),\qquad \varphi(0)=\mu_3(0)$.

Тоді можна вказати таке значення t_0, $0<t_0\le T$, *яке визначається вихідними даними, що розв'язок задачі* (5)−(8) *існує при* $x\in[0,h],\ t\in[0,t_0]$.

Д о в е д е н н я. Застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора для доведення існування розв'язку задачі (5)−(8). Для цього зведемо цю задачу до системи рівнянь щодо невідомих функцій $(a(t),v(x,t),w(x,t))$, де $w(x,t)\equiv v_x(x,t)$. Позначимо через $G_k(x,t,\xi,\tau)$ функції Ґріна першої ($k=1$) та другої ($k=2$) крайових задач для рівняння теплопровідності

$$v_t=a(t)v_{xx}+f_x(x,t)+c_x(x,t)\mu_3(t)\,. \tag{9}$$

Вони мають вигляд

$$G_k(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)+\right.$$
$$\left.+(-1)^k\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right),\qquad k=1,2\,, \tag{10}$$

де $\theta(t)=\int\limits_0^t a(\tau)\,d\tau$.

Припускаючи, що функція $a(t)$ відома, пряму задачу (5)−(7) замінимо еквівалентною системою інтегральних рівнянь

$$v(x,t)=v_0(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\Bigg(b(\xi,\tau)w(\xi,t)+$$
$$+\big(b_\xi(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\big)v(\xi,\tau)+c_\xi(\xi,\tau)\int\limits_0^\xi v(\eta,\tau)d\eta\Bigg)d\xi\,d\tau\,, \tag{11}$$

$$w(x,t)=w_0(x,t)+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\Bigg(b(\xi,\tau)w(\xi,t)+$$
$$+\big(b_\xi(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\big)v(\xi,\tau)+c_\xi(\xi,\tau)\int\limits_0^\xi v(\eta,\tau)d\eta\Bigg)d\xi\,d\tau\,. \tag{12}$$

Через $v_0(x,t)$ позначено розв'язок рівняння (9) з умовами (6), (7), який має вигляд

$$v_0(x,t)=\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,0)\varphi'(\xi)\,d\xi+$$
$$+\int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\mu_1(\tau)\,d\tau-\int\limits_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\mu_2(\tau)\,d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)\big(f_\xi(\xi,\tau)+c_\xi(\xi,\tau)\mu_3(\tau)\big)\,d\xi\,d\tau\,. \tag{13}$$

Вираз $w_0(x,t)$ отримуємо з (13) диференціюванням та інтегруванням частинами з застосуванням властивостей функції Ґріна :

$$w_0(x,t) = \int_0^h G_2(x,t,\xi,0)\varphi''(\xi)\,d\xi -$$

$$-\int_0^t G_2(x,t,0,\tau)\mu'_1(\tau)\,d\tau + \int_0^t G_2(x,t,h,\tau)\mu'_2(\tau)\,d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\big(f_\xi(\xi,\tau)+c_\xi(\xi,\tau)\mu_3(\tau)\big)\,d\xi\,d\tau\,. \tag{14}$$

Підставляючи (12) в (8), отримуємо рівняння щодо $a(t)$:

$$a(t) = \frac{\mu_4(t)}{w(0,t)}, \qquad t\in[0,T]. \tag{15}$$

Обернену задачу (5)–(8) зведено до еквівалентної системи рівнянь (11), (12), (15). Встановимо існування розв'язку цієї системи. Для цього визначимо апріорні оцінки розв'язку системи. Оцінимо функції $v(x,t)$ і $w(x,t)$ зверху. Подамо розв'язок задачі (5)–(7) у вигляді

$$v(x,t) = v^*(x,t) + \int_0^t\int_0^h G_1^*(x,t,\xi,\tau)\bigg(\big(b_\xi(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\big)v(\xi,\tau) +$$

$$+ c_\xi(\xi,\tau)\int_0^\xi v(\eta,\tau)d\eta\bigg)d\xi\,d\tau\,, \tag{16}$$

де $G_1^*(x,t,\xi,\tau)$ – функція Ґріна для рівняння

$$v_t^* = a(t)v_{xx}^* + b(x,t)v_x^* + f_x(x,t) + c_x(x,t)\mu_3(t)$$

з умовами (7). За принципом максимуму [5, с. 25]

$$\left|v^*(x,t)\right| \le M^* < \infty \qquad \text{в} \qquad \bar{Q}_T\,, \tag{17}$$

де

$$M^* = \max\Big\{\max_{x\in[0,h]}|\varphi'(x)|,\ \max_{t\in[0,T]}|\mu_1(t)|,\ \max_{t\in[0,T]}|\mu_2(t)|,$$
$$\max_{\bar{Q}_T}|f_x(x,t)+c_x(x,t)\mu_3(t)|\Big\}.$$

Введемо такі позначення:

$$V(t) \equiv \max_{x\in[0,h]}|v(x,t)|, \qquad W(t) \equiv \max_{x\in[0,h]}|w(x,t)|. \tag{18}$$

Тоді з (16) маємо

$$V(t) \le M^* + C_1\int_0^t V(\tau)\,d\tau\int_0^h G_1^*(x,t,\xi,\tau)\,d\xi\,, \tag{19}$$

де C_1 – константа, що визначається вихідними даними. Для того щоб оцінити $\int_0^h G_1^*(x,t,\xi,\tau)\,d\xi$, розглянемо допоміжну задачу

$$\hat{v}_t = a(t)\hat{v}_{xx} + b(x,t)\hat{v}_x, \qquad (x,t)\in Q_T\,,$$

$$\hat{v}(x,0)=1, \quad x\in[0,h], \qquad \hat{v}(0,t)=1, \quad \hat{v}(h,t)=1, \quad t\in[0,t]\,.$$

Легко переконатися, що розв'язком цієї задачі є $\hat{v}(x,t)\equiv 1$ З іншого боку,

$$\hat{v}(x,t) =$$

$$= \int_0^h G^*(x,t,\xi,0)\,d\xi + \int_0^t G^*_{1\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\,d\tau - \int_0^t G^*_{1\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\,d\tau \equiv 1 .$$

З того, що $\int_0^t G^*_{1\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)\,d\tau \ge 0$ та $-\int_0^t G^*_{1\xi}(x,t,h,\tau)a(\tau)\,d\tau \ge 0$, випливає оцінка $\int_0^h G^*(x,t,\xi,0)\,d\xi \le 1$. Тоді з (19) маємо

$$V(t) \le M^* + C_1 \int_0^t V(\tau)\,d\tau . \tag{20}$$

Застосовуючи до (20) лему Гронуолла, отримуємо

$$V(t) \le M_1 < \infty, \qquad t \in [0,T].$$

Для функції $v(x,t)$ маємо остаточну оцінку

$$|v(x,t)| \le M_1 < \infty, \qquad (x,t) \in \bar{Q}_T , \tag{21}$$

де M_1 – константа, що визначається вихідними даними.

Для оцінки функції $w(x,t)$ розглянемо вирази (12) і (14). З того, що $\int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau)\,d\xi = 1$ та при $t = 0$ другий доданок виразу (12) і всі, крім першого, доданки виразу (14) дорівнюють нулеві, робимо висновок, що існує таке значення t_1, $0 < t_1 \le T$, що

$$\frac{1}{2}\int_0^h G_2(0,t,\xi,0)\varphi''(\xi)\,d\xi \ge \int_0^t G_2(0,t,0,\tau)\mu_1'(\tau)\,d\tau - \int_0^t G_2(0,t,h,\tau)\mu_2'(\tau)\,d\tau -$$
$$- \int_0^t\int_0^h G_{1x}(0,t,\xi,\tau)\Big(f_\xi(\xi,\tau) + c_\xi(\xi,\tau)\mu_3(\tau) + b(\xi,\tau)w(\xi,\tau) + \big(b_\xi(\xi,\tau) +$$
$$+ c(\xi,\tau)\big)v(\xi,\tau) + c_\xi(\xi,\tau)\int_0^\xi v(\eta,\tau)d\eta\Big)d\xi\,d\tau, \quad t \in [0,t_1]. \tag{22}$$

Тоді

$$w(0,t) \ge \frac{1}{2}\min_{x\in[0,h]} \varphi''(x) \equiv M_2 > 0, \qquad t \in [0,t_1]. \tag{23}$$

З (23) випливає оцінка зверху для функції $a(t)$:

$$a(t) \le \frac{\mu_4(t)}{M_2} \le A_1 t^\beta, \qquad A_1 > 0, \qquad t \in [0,t_1]. \tag{24}$$

Встановимо оцінку $|w(x,t)|$. Перший доданок з (14) оцінюємо величиною $\max_{x\in[0,h]}|\varphi''(x)|$. Для оцінки двох наступних доданків з (14) використовуємо явний вигляд функції Ґріна та відому оцінку [6, с. 12]:

$$G_2(x,t,\xi,\tau) \le C_2 + \frac{C_3}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} ,$$

де C_2, $C_3 > 0$ – відомі сталі. Для оцінки останнього доданка з (14) розглянемо інтеграл

$$I_1 \equiv \int_0^t \int_0^h |G_{1x}(x,t,\xi,\tau)|\, d\xi\, d\tau \le$$

$$\le C_4 \int_0^t \int_0^h \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(|x-\xi+2nh| \exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) + \right.$$

$$\left. + |x+\xi+2nh| \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))} \right) \right) \frac{d\xi d\tau}{(\theta(t)-\theta(\tau))^{3/2}} ,$$

де $C_4 > 0$ – відома стала. Розбиваючи останній інтеграл на суму двох інтегралів і роблячи відповідно заміни змінних $z = \dfrac{x-\xi+2nh}{2\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$, $z = \dfrac{x+\xi+2nh}{2\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$, одержимо

$$I_1 \le C_5 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{x+h(2n-1)}{2\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}}^{\frac{x+h(2n+1)}{2\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}} |z|\, e^{-z^2} dz =$$

$$= C_5 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} |z|\, e^{-z^2} dz = C_5 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} . \tag{25}$$

Отже, з (12) маємо

$$W(t) \le C_6 + C_7 \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} + C_8 \int_0^t \frac{W(\tau) d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$$

або, позначаючи $W_1(t) \equiv W(t)+1$,

$$W_1(t) \le C_9 + C_{10} \int_0^t \frac{W_1(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\, d\tau .$$

Оскільки $\dfrac{1}{a(t)} \le \dfrac{W_1(t)}{\mu_4(t)}$, маємо

$$W_1(t) \le C_9 + C_{11} \int_0^t \frac{a(\tau) W_1^2(\tau)\, d\tau}{\mu_4(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} . \tag{26}$$

Піднесемо до квадрату обидві частини (26), використовуючи нерівності Коші та Коші – Буняковського:

$$W_1^2(t) \le 2C_9^2 + 2C_{11}^2 \int_0^t \frac{W_1^4(\tau)\, d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \int_0^t \frac{a^2(\tau)\, d\tau}{\mu_4^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} . \tag{27}$$

З оцінки (24) маємо $\theta(t) \le \dfrac{A_1}{\beta+1} t^{\beta+1}$ або $t \ge (\theta(t))^{\frac{1}{\beta+1}} \left(\dfrac{\beta+1}{A_1} \right)^{\frac{1}{\beta+1}}$. Розглянемо наступний інтеграл з (27):

$$I_2 \equiv \int_0^t \frac{a^2(\tau)\, d\tau}{\mu_4^2(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \le C_{12} \int_0^t \frac{a(\tau)\, d\tau}{\tau^{\beta}\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \le C_{13} \int_0^t \frac{a(\tau)\, d\tau}{(\theta(\tau))^{\frac{\beta}{\beta+1}}\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} .$$

Застосовуючи заміну змінних $z = \dfrac{\theta(\tau)}{\theta(t)}$, отримуємо

$$I_2 \le C_{13} (\theta(t))^{\frac{1-\beta}{2(\beta+1)}} \int_0^1 \frac{dz}{z^{\beta/\beta+1}\sqrt{1-z^{\beta+1}}} \le C_{14} \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} = C_{14}\pi .$$

Тоді нерівність (27) набуває вигляду

$$W_1^2(t) \le C_{15} + C_{16}\int_0^t \frac{W_1^4(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Звідси отримуємо

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)W_1^2(\sigma)\,d\sigma}{\mu_4(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \le$$

$$\le C_{15}\int_0^t \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{\mu_4(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} + C_{16}\int_0^t \frac{a(\sigma)\,d\sigma}{\mu_4(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}\int_0^\sigma \frac{W_1^4(\tau)\,d\tau}{\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}.$$

Після зміни порядку інтегрування в останньому інтегралі, використовуючи рівність

$$\int_\tau^t \frac{a(\sigma)d\sigma}{\sqrt{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}} = \pi,$$

приходимо до нерівності

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)W_1^2(\sigma)\,d\sigma}{\mu_4(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \le C_{17} + C_{18}\int_0^t \frac{W_1^4(\tau)\,d\tau}{\tau^\beta}. \tag{28}$$

Отже, з (26) за допомогою (28) маємо

$$W_1(t) \le C_{19} + C_{20}\int_0^t \frac{W_1^4(\tau)\,d\tau}{\tau^\beta}.$$

Позначимо $L(t) \equiv C_{19} + C_{20}\int_0^t \frac{W_1^4(\tau)\,d\tau}{\tau^\beta}$. Тоді $L'(t) = C_{20}\frac{W_1^4(t)}{t^\beta} \le C_{20}\frac{L^4(t)}{t^\beta}$. Інтегруючи, з цієї нерівності отримаємо

$$\frac{1}{3C_{19}^3} - \frac{1}{3L^3(t)} \le \frac{C_{20}}{1-\beta}t^{1-\beta},$$

що приводить до оцінки

$$L(t) \le \frac{C_{19}\sqrt[3]{1-\beta}}{\sqrt[3]{1-\beta-3C_{19}^3C_{20}t^{1-\beta}}}, \qquad t \in [0,t_2], \tag{29}$$

де число t_2, $0 < t_2 \le T$, задовольняє умову $1-\beta-3C_{19}^3C_{20}t_2^{1-\beta} > 0$. Враховуючи те, що $W_1(t) \le L(t)$, отримаємо оцінку

$$|w(x,t)| \le M_3, \qquad t \in [0,t_2], \qquad x \in [0,h], \tag{30}$$

що дає можливість оцінити функцію $a(t)$ знизу:

$$a(t) \ge \frac{\mu_4(t)}{M_3} \ge A_0 t^\beta, \qquad A_0 > 0, \qquad t \in [0,t_2]. \tag{31}$$

Доведемо існування $\lim\limits_{t\to+0}\frac{a(t)}{t^\beta}$. З того, що існують границі $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\mu_4(t)}{t^\beta} > 0$ і $\lim\limits_{t\to+0}\int_0^h G_2(0,t,\xi,0)\varphi''(\xi)\,d\xi = \varphi''(0)$, випливає

$$\lim_{t\to+0}\frac{a(t)}{t^\beta} = \lim_{t\to+0}\frac{\mu_4(t)}{t^\beta w(0,t)} = \frac{M}{\varphi''(0)} > 0.$$

Оцінки розв'язків системи рівнянь (11), (12), (15) отримано. Запишемо систему рівнянь (11), (12), (15) в операторному вигляді

$$\chi = P\chi\,, \tag{32}$$

де $\chi = (v, w, a)$, $P = (P_1, P_2, P_3)$, оператори P_1, P_2, P_3 визначаються правими частинами рівнянь (11), (12), (15). Означимо множину

$$N = \Big\{ \big(v(x,t),\, w(x,t),\, a(t)\big) \in C(\bar{Q}_{t_0}) \times C(\bar{Q}_{t_0}) \times C[0,t_0] :$$

$$|v(x,t)| \le M_1,\ \ |w(x,t)| \le M_3,\ A_0 \le \frac{a(t)}{t^{\beta}} \le A_1 \Big\},$$

де $t_0 = \min\{t_1, t_2\}$. Згідно з отриманими оцінками (21), (30), (24), (31) оператор P переводить множину N в себе. Покажемо, що оператор P цілком неперервний на N. На підставі теореми Арцела – Асколі для цього слід встановити, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що

$$|P_i(x_2, t_2) - P_i(x_1, t_1)| < \varepsilon, \qquad |P_3(t_2) - P_3(t_1)| < \varepsilon$$

$$\forall\ \big(v(x,t),\, w(x,t),\, a(t)\big) \in N, \qquad i = 1, 2\,, \tag{33}$$

якщо $|t_2 - t_1| < \delta,\ |x_2 - x_1| < \delta$, де $(x_1, t_1),\ (x_2, t_2) \in \bar{Q}_{t_0}$. З того, що $P_3 a(t) = a(t)$ та $A_0 \le \dfrac{a(t)}{t^{\beta}} \le A_1$ для всіх $a(t) \in N$, робимо висновок, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує досить мале значення $t^* > 0$, для якого виконується нерівність

$$|P_3 a(t)| < \varepsilon, \qquad 0 \le t \le t^*, \qquad \forall\ \big(v(x,t),\, w(x,t),\, a(t)\big) \in N\,.$$

Коли $t_i > t^*$, $i = 1, 2$, доведення нерівностей (33) проводиться аналогічно до невиродженого випадку [6, с. 27]. Отже, оператор P цілком неперервний на N. За теоремою Шаудера розв'язок системи (11), (12), (15) існує. За еквівалентністю системи (11), (12), (15) та задачі (5)–(8) одержуємо твердження теореми існування при $t \in [0, t_0]$, де число t_0, $0 \le t_0 \le T$, визначається вихідними даними задачі. ◊

Зауваження. З доведення теореми 1 випливає, що звуження часового проміжку, на якому існує розв'язок, відбувається при отриманні оцінки функції $w(x,t)$. Зробивши більш жорсткі припущення на вихідні дані, можемо отримати існування розв'язку задачі (5)–(8) в усій області Q_T. Подамо рівняння (5) у вигляді

$$v_t = a(t)v_{xx} + b(x,t)v_x + \big(b_x(x,t) + c(x,t)\big)v + c_x(x,t)u + f_x(x,t)\,.$$

Диференціюючи це рівняння за x, отримаємо задачу щодо функції $w(x,t)$:

$$w_t = a(t)w_{xx} + b(x,t)w_x + \big(2b_x(x,t) + c(x,t)\big)w +$$

$$+ \big(b_{xx}(x,t) + 2c_x(x,t)\big)v + c_{xx}(x,t)u + f_{xx}(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T\,,$$

$$w(x,0) = \varphi''(x), \qquad x \in [0,h]\,,$$

$$a(t)w_x(0,t) + b(0,t)w(0,t) = \mu'_1(t) - \big(b_x(0,t) + c(0,t)\big)\mu_1(t) -$$

$$- c_x(0,t)\mu_3(t) - f_x(0,t)\,,$$

$$a(t)w_x(h,t) + b(h,t)w(h,t) = \mu'_2(t) - \big(b_x(h,t) + c(h,t)\big)\mu_2(t) -$$

$$- c_x(h,t)\mu_3(t) - f_x(h,t)\,.$$

Повторюючи схему доведення теореми 1 і застосовуючи міркування, наведені в [5, с. 25], доводимо таку теорему.

Теорема 2. *Припустимо, що виконуються умови*:

(*i*) $\varphi \in C^2[0,h]$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2,3$, $b,\ c,\ f \in C^{2,0}(\bar{Q}_T)$;

(*ii*) $\varphi''(x) > 0$, $\varphi'(x) \ge 0$, $x \in [0,h]$, $\mu_4(t) > 0$, $t \in (0,T]$,

$\mu_1(t) \ge 0$, $\mu_2(t) \ge 0$, $b(0,t) < 0$, $b(h,t) > 0$,

$\mu_1'(t) - (b_x(0,t) + c(0,t))\mu_1(t) - c_x(0,t)\mu_3(t) - f_x(0,t) < 0$,

$\mu_1'(t) - (b_x(h,t) + c(h,t))\mu_2(t) - c_x(h,t)\mu_3(t) - f_x(h,t) > 0$, $t \in [0,T]$,

$f_x(x,t) \ge 0$, $f_{xx}(x,t) \ge 0$, $c_{xx}(x,t) \ge 0$, $b_{xx}(x,t) + 2c_x(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in Q_T$,

існує $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{\mu_4(t)}{t^\beta} \equiv M > 0$, $0 < \beta < 1$;

(*iii*) $\varphi'(0) = \mu_1(0)$, $\varphi'(h) = \mu_2(0)$, $\varphi(0) = \mu_3(0)$.

Тоді розв'язок задачі (5)–(8) *існує при* $x \in [0,h]$, $t \in [0,T]$.

3. Єдиність розв'язку.

Теорема 3. *Припустимо, що виконуються умови:*

(*i*) $\varphi \in C^3[0,h]$, $\mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2,3$, $b,\ c,\ f \in C^{2,0}(\bar{Q}_T)$;

(*ii*) $\dfrac{\mu_4(t)}{t^\beta} \ne 0$, $t \in (0,T]$, $0 < \beta < 1$.

Тоді розв'язок $(a(t), v(x,t))$ *задачі* (5)–(8) *з класу* $C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap \cap C^{1,0}(\bar{Q}_T)$ *єдиний.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що $(a_i(t), v_i(x,t))$, $i = 1,2$, – два розв'язки задачі (5)–(8). Для їхньої різниці $a(t) = a_1(t) - a_2(t)$, $v(x,t) = v_1(x,t) - - v_2(x,t)$ отримуємо задачу

$$v_t = a_1(t)v_{xx} + b(x,t)v_x + (b_x(x,t) + c(x,t))v + + c_x(x,t)\int_0^x v(\eta,t)\,d\eta + a(t)v_{2xx}, \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{34}$$

$$v(x,0) = 0, \qquad x \in [0,h], \tag{35}$$

$$v(0,t) = v(h,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{36}$$

$$a_1(t)v_x(0,t) = -\,a(t)v_{2x}(0,t), \qquad t \in [0,T]. \tag{37}$$

За допомогою функції Ґріна $G_1^{(1)}(x,t,\xi,\tau)$ для рівняння $v_t = a_1(t)v_{xx}$ задачу (34)–(36) зведемо до системи інтегральних рівнянь

$$v(x,t) = \int_0^t\int_0^h G_1^{(1)}(x,t,\xi,\tau)\Big(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau) + (b_\xi(\xi,\tau) + c(\xi,\tau))v(\xi,\tau) + + c_\xi(\xi,\tau)\int_0^\xi v(\eta,\tau)\,d\eta + a(\tau)v_{2\xi\xi}(\xi,\tau)\Big)d\xi\,d\tau, \tag{38}$$

$$w(x,t) = \int_0^t\int_0^h G_{1x}^{(1)}(x,t,\xi,\tau)\Big(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau) + (b_\xi(\xi,\tau) + c(\xi,\tau))v(\xi,\tau) + + c_\xi(\xi,\tau)\int_0^\xi v(\eta,\tau)d\eta + a(\tau)v_{2\xi\xi}(\xi,\tau)\Big)d\xi\,d\tau. \tag{39}$$

Підставимо (39) в умову (37):

$$a(t)v_{2x}(0,t) = -a_1(t)\int_0^t\int_0^h G^{(1)}_{1x}(0,t,\xi,\tau)\Big(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau) + \big(b_\xi(\xi,\tau) +$$

$$+ c(\xi,\tau)\big)v(\xi,\tau) + c_\xi(\xi,\tau)\int_0^\xi v(\eta,\tau)d\eta + a(\tau)v_{2\xi\xi}(\xi,\tau)\Big)d\xi\, d\tau. \qquad (40)$$

Подамо отриману систему рівнянь (38)−(40), яка еквівалентна задачі (34)−(37), у вигляді

$$a(t) = \int_0^t \mathcal{K}_{11}(t,\tau)a(\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^h \mathcal{K}_{12}(\xi,t,\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \int_0^t\int_0^h \mathcal{K}_{13}(\xi,t,\tau)w(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

$$v(x,t) = \int_0^t \mathcal{K}_{21}(x,t,\tau)a(\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^h \mathcal{K}_{22}(x,t,\xi,\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t\int_0^h \mathcal{K}_{23}(x,t,\xi,\tau)w(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

$$w(x,t) = \int_0^t \mathcal{K}_{31}(x,t,\xi,\tau)a(\tau)\,d\tau + \int_0^t\int_0^h \mathcal{K}_{32}(x,t,\xi,\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t\int_0^h \mathcal{K}_{33}(x,t,\xi,\tau)w(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Встановимо інтегровність ядер $\mathcal{K}_{ij}$, $i,j = 1,2,3$. Розв'язок $v_2(x,t)$ задачі (5)−(7) подамо за допомогою формули (11) та функції Ґріна $G^{(2)}_1(x,t,\xi,\tau)$. Знайдемо $v_{2xx}(x,t)$:

$$v_{2xx}(x,t) = v_{02xx}(x,t) + \int_0^t d\tau\int_0^h G^{(2)}_{1xx}(x,t,\xi,\tau)\Big(b(\xi,\tau)v_{2\xi}(\xi,\tau) + \big(b_\xi(\xi,\tau) +$$

$$+ c(\xi,\tau)\big)v_2(\xi,\tau) + c_\xi(\xi,\tau)\int_0^\xi v_2(\eta,\tau)d\eta\Big)d\xi, \qquad (41)$$

де

$$v_{02xx}(x,t) = \int_0^h G^{(2)}_1(x,t,\xi,0)\varphi'''(\xi)\,d\xi + \int_0^t G^{(2)}_{1\xi}(x,t,0,\tau)\big(\mu_1'(\tau) - f_\xi(0,\tau) -$$

$$- c_\xi(0,\tau)\mu_3(\tau)\big)\,d\tau + \int_0^t G^{(2)}_{1\xi}(x,t,h,\tau)\big(f_\xi(h,\tau) - \mu_2'(\tau) +$$

$$+ c_\xi(h,\tau)\mu_3(\tau)\big)\,d\tau - \int_0^t\int_0^h G^{(2)}_{1\xi}(x,t,\xi,\tau)\big(f_{\xi\xi}(\xi,\tau) + c_{\xi\xi}(\xi,\tau)\mu_3(\tau)\big)\,d\xi\,d\tau.$$

Використовуючи властивість функції Ґріна $G^{(2)}_{1\xi\xi}(x,t,\xi,\tau) = G^{(2)}_{1xx}(x,t,\xi,\tau)$, проінтегруємо частинами вираз (41):

$$v_{2xx}(x,t) = \int_0^h G^{(2)}_1(x,t,\xi,0)\varphi'''(\xi)\,d\xi + \int_0^t G^{(2)}_{1\xi}(x,t,0,\tau)\big[\mu_1'(\tau) - f_\xi(0,\tau) -$$

$$- c_\xi(0,\tau)\mu_3(\tau) - b(0,\tau)v_{2\xi}(0,\tau) - \big(b_\xi(0,\tau) + c(0,\tau)\big)\mu_1(\tau)\big]\,d\tau +$$

$$+ \int_0^t G^{(2)}_{1\xi}(x,t,h,\tau)\big[f_\xi(h,\tau) - \mu_2'(\tau) + c_\xi(h,\tau)\mu_3(\tau) + b(h,\tau)v_{2\xi}(h,\tau) +$$

$$+\left(b_\xi(h,\tau)+c(h,\tau)\right)\mu_2(\tau)\Big]d\tau-\int_0^t\int_0^h G_{1\xi}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)\Big[f_{\xi\xi}(\xi,\tau)+$$

$$+c_{\xi\xi}(\xi,\tau)\left(\mu_3(\tau)+\int_0^\xi v_2(\eta,\tau)\,d\eta\right)+\left(b_{\xi\xi}(\xi,\tau)+2c_\xi(\xi,\tau)\right)v_2(\xi,\tau)+$$

$$+\left(2b_\xi(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\right)v_{2\xi}(\xi,\tau)+b(\xi,\tau)v_{2\xi\xi}(\xi,\tau)\Big]d\xi\,d\tau$$

або

$$v_{2xx}(x,t)=\tilde{v}(x,t)-\int_0^t\int_0^h G_{1\xi}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)v_{2\xi\xi}(\xi,\tau)b(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau. \qquad (42)$$

Позначимо $\tilde{v}(x,t)\equiv\sum_{i=1}^{4}R_i$ Оцінимо кожен доданок цього виразу. З того, що $G_1^{(2)}(x,t,\xi,0)<G_2^{(2)}(x,t,\xi,0)$ та $\int_0^h G_2^{(2)}(x,t,\xi,0)\,d\xi=1$, для доданка R_1 запишемо

$$|R_1|\le\max_{x\in[0,h]}|\varphi'''(x)|\int_0^h G_2^{(2)}(x,t,\xi,0)\,d\xi\le C_{21}.$$

Для оцінки другого доданка використаємо вигляд функції Ґріна:

$$|R_2|\le C_{22}\int_0^t\left|G_{1\xi}^{(2)}(x,t,0,\tau)\right|d\tau\le$$

$$\le C_{23}\int_0^t\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{|x+2nh|}{\left(t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}\right)^{3/2}}\exp\left(-\frac{C_{24}(x+2nh)^2}{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}\right)d\tau.$$

Враховуючи заміну змінних $z=\frac{\tau}{t}$ та нерівність

$$1\le\frac{1-x^{\beta+1}}{1-x}\le 1+\beta,\qquad x\in[0,1],\qquad \beta\in(0,1),$$

отримаємо

$$|R_2|\le\frac{C_{25}}{t^{(3\beta+1)/2}}\int_0^1\frac{1}{(1-z)^{3/2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x+2nh|\exp\left(-\frac{C_{26}(x+2nh)^2}{t^{\beta+1}(1-z)}\right)dz.$$

Зводячи останній інтеграл до інтеграла ймовірності та використовуючи його властивості, приходимо до оцінки

$$|R_2|\le\frac{C_{27}}{t^\beta}.$$

Аналогічно отримується оцінка для R_3. Для R_4 використаємо оцінку (25):

$$|R_4|\le C_{28}\int_0^t\int_0^h\left|G_{1\xi}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)\right|d\xi\,d\tau\le C_{29}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{\theta_2(t)-\theta_2(\tau)}}\le$$

$$\le C_{30}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t^{\beta+1}-\tau^{\beta+1}}}\le C_{31}t^{\frac{1-\beta}{2}}.$$

Отже, для $\tilde{v}(x,t)$ маємо таку оцінку:

$$|\tilde{v}(x,t)| \le \frac{C_{32}}{t^{\beta}}. \tag{43}$$

З оцінки R_4 випливає, що ядро рівняння (42) має слабку особливість. Тоді з (42) і (43) отримаємо оцінку для $v_{2xx}(x,t)$:

$$|v_{2xx}(x,t)| \le \frac{C_{33}}{t^{\beta}}. \tag{44}$$

Звідси випливає, що ядра системи (38)–(40) мають інтегровну особливість, тому за властивостями інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду система має тільки тривіальний розв'язок $a(t) \equiv 0$, $v(x,t) \equiv 0$, $w(x,t) \equiv 0$, $x \in [0,h]$, $t \in [0,T]$. Теорему доведено. ◊

1. *Гаджиев М. М.* Обратная задача для вырождающегося эллиптического уравнения // Применение методов функц. анализа в уравнениях мат. физики. – Новосибирск. – 1987. – С. 66–71.
2. *Елдесбаев Т.* О некоторых обратных задачах для вырождающихся гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. – 1976. – **11,** № 3. – С. 502–510.
3. *Елдесбаев Т.* Об одной обратной задаче для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка // Изв. АН КазССР. Сер. Физ.-мат. – 1987. – № 3. – С. 27–29.
4. *Іванчов М. І., Салдіна Н. В.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 11. – С. 1563–1570.
5. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
6. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type / Math. Studies: Monograph Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – Vol. 10. – 238 p.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СО СЛАБЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

Установлены условия существования и единственности решения обратной задачи для параболического уравнения с граничными условиями второго рода. Неизвестный коэффициент, зависящий от времени, стремится к нулю как степенная функция. Рассмотрен случай слабого вырождения. При доказательстве использовалась теорема Шаудера и свойства интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

INVERSE PROBLEM FOR WEAKLY DEGENERATE PARABOLIC EQUATION

The conditions of existence and uniqueness of the solution to the inverse problem for a parabolic equation with the second-kind boundary conditions are established. The unknown time-dependent coefficient tends to zero as a power function. In the proof the Schauder fixed-point theorem and properties of the Volterra integral equations of the second kind are used.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
11.11.05