УДК 62-501.7

Ф. П. Григорян

СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ С НАПЕРЕД ЗАДАННЫМ СПЕКТРОМ В СТАЦИОНАРНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ СКАЛЯРНОМ УРАВНЕНИИ n-ГО ПОРЯДКА

Рассматривается задача выбора одномерного управления в стационарном интегро-дифференциальном скалярном уравнении n-го порядка, когда наперед заданный спектр образуется из одного числа μ кратности n.

Постановка задачи. Пусть задано уравнение

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + a_{n-2}z^{(n-2)} + \ldots + a_n z' + a_0 z = u(t)\,, \tag{1}$$

где $u(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} g(t-t')\vartheta(t')\,dt'$ – выходной сигнал регулятора; $\vartheta = b_1 z + b_2 z' + \ldots + b_n z^{(n-1)}$ – входной сигнал регулятора; $g(t-t')$ – скаляр (импульсная переходная функция регулятора). Допустим также, что заранее задан спектр $\underbrace{\mu,\mu,\ldots,\mu}_{n}$.

Требуется построить матрицу-строку $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ так, чтобы решение уравнения (1) имело вид

$$z = e^{\mu t}(c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{n-1}t^{n-1})\,, \tag{2}$$

где c_i, $i = 0,\ldots,n-1$, – произвольные постоянные, причем должны быть выполнены следующие условия:

а) хотя бы один из корней характеристического многочлена однородной части уравнения (1) не равен μ;

б) передаточная функция регулятора $w(\lambda) = \int\limits_0^{\infty} g(s)\exp(-\lambda s)\,ds$ удовлетворяет условиям

$$w(\mu) = \int\limits_0^{\infty} g(s)\exp(-\mu s)\,dx \ne 0\,,$$

$$\left.\frac{d^i w(\lambda)}{d\lambda^i}\right|_{\lambda=\mu} = (-1)^i \int\limits_0^{\infty} g(s)s^i \exp(-\lambda s)\,ds = 0, \qquad i = 1,\ldots,n-1\,.$$

Решение задачи. Уравнение (1) при новых неизвестных $x_1 = z$, $x_2 = z'$, …, $x_n = z^{(n-1)}$ эквивалентно системе [1]

$$\dot{x} = Ax + B\int\limits_{-\infty}^{t} g(t-t')bx(t')dt'\,, \tag{3}$$

где

$$A = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{matrix} \right\|, \qquad x = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{matrix} \right\|, \qquad B = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \right\|. \tag{4}$$

Тогда легко заметить, что поставленная задача приводится к следующему: построить матрицу-строку $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ и преобразование

$$x = \tilde{K}y \tag{5}$$

с невырожденной матрицей $\tilde{K}$ так, чтобы система (3) была приведена к виду

$$\dot{y}_i = \mu y_i, \quad i = 1, \dots, n, \qquad \Rightarrow \quad y_i = c_i e^{\mu t} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = ce^{\mu t}, \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^{\top}, \quad c = (c_1, c_2, \dots, c_n)^{\top}. \tag{6}$$

Матрицу $\tilde{K}$ представим в форме

$$\tilde{K} = K\chi(t), \tag{7}$$

где $\chi(t)$ – матрица преобразования к диагональному виду системы

$$\dot{\eta} = J(\mu)\eta,$$

матрица которой представляет собой клетку Жордана.

Как показано в работе [1], $\chi(t) = \exp(\Gamma_m t)$, где Γ_m – матрица сдвига порядка m (того же порядка, что и клетка Жордана $J(\lambda)$).

В силу (5)–(7) общее решение системы (3) можно представить как

$$x = K\chi(t)e^{\mu t}C. \tag{8}$$

Дифференцируя (8), получим

$$\dot{x}(t) = K(\dot{\chi}(t) + \chi(t)\mu)e^{\mu t}C. \tag{9}$$

Подставив (8) и (9) в (3), имеем

$$K(\dot{\chi}(t) + \chi(t)\mu)e^{\mu t}C = AK\chi(t)e^{\mu t}C + B\int_{-\infty}^{t} g(t - t')bK\chi(t')e^{\mu t'}\,dt'\,C.$$

Умножая обе стороны последнего соотношения на $e^{-\mu t}$, а также учитывая, что C – столбец из произвольных постоянных, получим

$$K(\dot{\chi}(t) + \chi(t)\mu) = AK\chi(t) + B\int_{-\infty}^{t} g(t - t')bK\chi(t')e^{\mu(t'-t)}\,dt'.$$

Выполнив в интеграле замену переменной $t - t' = s$, имеем

$$K(\dot{\chi}(t) + \chi(t)\mu) = AK\chi(t) + B\int_{0}^{\infty} g(s)bK\chi(t - s)e^{-\mu s}\,ds.$$

Умножив обе стороны этого выражения справа на $\chi^{-1}(t)$, получим

$$K(\dot{\chi}(t)\chi^{-1}(t) + \mu E) = AK + B\int_{0}^{\infty} g(s)bK\chi(t - s)\chi^{-1}(t)e^{-\mu s}\,ds. \tag{10}$$

Учитывая, что [1]

$$\chi(t - s) = \chi(t)\chi(-s) = \chi(-s)\chi(t), \qquad \dot{\chi}(t)\chi^{-1}(t) = \Gamma_n,$$

выражение (10) принимает вид

$$K(\Gamma_n + \mu E) = AK + B\int_{0}^{\infty} g(s)bK\chi(-s)e^{-\mu s}\,ds,$$

или окончательно

$$KJ(\mu) = AK + B\int_{0}^{\infty} g(s)bK\chi(-s)e^{-\mu s}ds. \tag{11}$$

Пусть $K = (K_1, K_2, \dots, K_n)$. Поскольку [1]

$$J(\mu)=\begin{Vmatrix} \mu & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mu & 1 & \cdots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mu \end{Vmatrix},\qquad \chi(t)=\begin{Vmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2!} & \cdots & \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\\ 0 & 1 & t & \cdots & \dfrac{t^{n-2}}{(n-2)!}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix},$$

то (11) распадается на следующие подсистемы:

$$\mu K_1 = AK_1 + B\int_0^\infty g(s)bK_1 e^{-\mu s}\,ds\,,$$

$$K_1+\mu K_2 = AK_2 + B\int_0^\infty g(s)b(-sK_1+K_2)e^{-\mu s}\,ds\,,$$

$$K_2+\mu K_3 = AK_3 + B\int_0^\infty g(s)b\left(\frac{s^2}{2!}K_1 - sK_2 + K_3\right)e^{-\mu s}\,ds\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$K_{n-1}+\mu K_n = AK_n + B\int_0^\infty g(s)b\left[\frac{(-s)^{n-1}}{(n-1)!}K_1 + \frac{(-s)^{n-2}}{(n-2)!}K_2+\dots+\right.$$

$$\left. +(-s)K_{n-1}+K_n\right]e^{-\mu s}\,ds\,,$$

которые согласно условию ***б***) задачи приводятся к следующему окончательному виду:

$$\begin{array}{ll} \mu K_1 = AK_1 + Bw(\mu)bK_1, & \mu K_1 = [A+Bw(\mu)b]K_1,\\ K_1+\mu K_2 = AK_2 + Bw(\mu)bK_2, & K_1+\mu K_2 = [A+Bw(\mu)b]K_2,\\ K_2+\mu K_3 = AK_3 + Bw(\mu)bK_3, \quad\Rightarrow & K_2+\mu K_3 = [A+Bw(\mu)b]K_3, \quad\Rightarrow\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ K_{n-1}+\mu K_n = AK_n + Bw(\mu)bK_n, & K_{n-1}+\mu K_n = [A+Bw(\mu)b]K_n, \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} [U(\mu)-\mu E]K_1 = 0,\\ [U(\mu)-\mu E]K_2 = K_1,\\ [U(\mu)-\mu E]K_3 = K_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ [U(\mu)-\mu E]K_n = K_{n-1}, \end{array} \tag{12}$$

где

$$U(\mu) = A + Bw(\mu)b\,. \tag{13}$$

Из системы уравнений (12) следует, что K_1 является собственным вектором матрицы $U(\mu)$, соответствующим собственному значению μ кратности n.

Характеристический многочлен матрицы $U(\mu)$ имеет вид [3]:

$$|\lambda E - U(\mu)| = \left[\lambda^n + \lambda^{n-1}(a_{n-1}-w(\mu)b_n) + \lambda^{n-2}(a_{n-2}-w(\mu)b_{n-1}) + \dots + \right.$$
$$\left. + \lambda(a_1 - w(\mu)b_2) + (a_0 - w(\mu)b_1)\right] = (\lambda-\mu)^n\,, \tag{14}$$

где

$$(\lambda-\mu)^n = \lambda^n - C_n^1\lambda^{n-1}\mu + C_n^2\lambda^{n-2}\mu^2 - \dots + (-\mu)^n\,, \tag{15}$$

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{m!}\,, \qquad m=1,\dots,n\,.$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты при одинаковых степенях λ в многочленах (14) и (15), получим систему уравнений относительно $b=(b_1,b_2,\dots,b_n)$ [4]:

$$\begin{aligned} a_{n-1} - w(\mu) b_n &= -C_n^1 \mu, \\ a_{n-2} - w(\mu) b_{n-1} &= C_n^2 \mu^2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_1 - w(\mu) b_2 &= C_n^{n-1}(-\mu)^{n-1}, \\ a_0 - w(\mu) b_1 &= (-\mu)^n, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} b_n &= \frac{1}{w(\mu)}\left(a_{n-1} + C_n^1(-\mu)\right), \\ b_{n-1} &= \frac{1}{w(\mu)}\left(a_{n-2} - C_n^2 \mu^2\right), \\ &\dots\dots\dots \\ b_2 &= \frac{1}{w(\mu)}\left(a_1 - C_n^{n-1}(-\mu)^{n-1}\right), \\ b_1 &= \frac{1}{w(\mu)}\left(a_0 - (-\mu)^n\right), \end{aligned}$$

ибо $w(\mu) \neq 0$ согласно условию ***б***) задачи.

Объединяя полученные выражения, найдем, что

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n) = \frac{1}{e(\mu)}\left[\left(a_0 - (-\mu)^n\right),\right.$$
$$\left.\left(a_1 - C_n^{n-1}(-\mu)^{n-1}\right), \dots, \left(a_{n-2} - C_n^2\mu^2\right),\ \left(a_{n-1} + C_n^1(-\mu)\right)\right]. \qquad (16)$$

Столбцы матрицы $K = (K_1, K_2, \dots, K_n)$ определяются из рекуррентных соотношений (12).

Исходя из условия ***б***) задачи, передаточную функцию регулятора можно определить как

$$w(p) = \alpha_1 + \alpha_2 (p - \mu)^n, \qquad (17)$$

где $\alpha_i \neq 0,\ i = 1, 2$, – произвольные постоянные.

Тогда согласно (17) выражение (16) окончательно принимает вид

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, b_n) = \frac{1}{\alpha_1}\left[\left(a_0 - (-\mu)^n\right),\ \left(a_1 - C_n^{n-1}(-\mu)^{n-1}\right),\right.$$
$$\left.\left(a_1 - C_n^{n-1}(-\mu)^{n-1}\right), \dots, \left(a_{n-2} - C_n^2\mu^2\right),\ \left(a_{n-1} + C_n^1(-\mu)\right)\right].$$

Для решения аналогичной (1) нестационарной задачи можно воспользоваться методами, изложенными в [1]. При этом ее нулевое приближение совпадет с результатом, полученным в настоящей работе, а приближения порядка $m = 0, 1, 2, \dots$ будут иметь асимптотический характер [2].

1. *Абгарян К. А.* Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. – Москва: Наука, 1973. – 431 с.
2. *Бородін В. А., Самойленко В. Г.* Асимптотичні властивості розв'язків диференціального рівняння n-го порядку з імпульсною дією // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47,** № 4. – С. 76–81.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1988. – 552 с.
4. *Григорян Ф. П.* О стабилизации движения спутника // МАНЭБ. Вестн. – 2005. – **10**, № 5, вып. 2. – С. 260–262.

СИНТЕЗ КЕРУВАННЯ З НАПЕРЕД ЗАДАНИМ СПЕКТРОМ У СТАЦІОНАРНОМУ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОМУ СКАЛЯРНОМУ РІВНЯННІ n-ГО ПОРЯДКУ

Розглядається задача вибору одновимірного керування в стаціонарному інтегро-диференціальному скалярному рівнянні n-го порядку, коли наперед заданий спектр утворюється з одного числа μ кратності n.

SYNTHESIS OF CONTROL WITH PREASSIGNED SPECTRUM IN STATIONARY INTEGRO-DIFFERENTIAL SCALAR n-TH DEGREE EQUATION

The problem of univariate control selection in stationary integro-differential scalar n-th degree equation, when preassigned spectrum is generated from one number of μ multiplicity of n, is considered.

Ереван. гос. колледж
информатики, Ереван, Армения

Получено
15.11.05