УДК 539.3

С. А. Калоеров, О. И. Бороненко, Е. В. Авдюшина

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИТОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ПЬЕЗОМАГНИТНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА И СЛОЯ С ПОЛОСТЯМИ И ТРЕЩИНАМИ

На основании известных методов решения с использованием комплексных потенциалов двумерных и плоских задач магнитоупругости для тел с отверстиями и трещинами предложена методика построения приближенных решений таких задач для полупространства (полуплоскости) и слоя (полосы) с произвольно расположенными отверстиями и трещинами, в том числе выходящими на плоские (прямолинейные) границы. Приведены результаты числовых исследований для полуплоскости и полосы с отверстиями и трещинами.

Введение. Несмотря на то, что первые исследования магнитных эффектов, возникающих в твердых телах, были проведены Дж. П. Джоулем более 150 лет назад, до сих пор многие вопросы магнитоупругости остаются открытыми и представляют большой интерес для механики деформируемого твердого тела [1, 2, 9]. Это вызвано широкими перспективами использования магнитных материалов в современной электронике, технике и приборостроении [5], открывающимися благодаря современной вычислительной технике и межотраслевому научному и практическому сотрудничеству, а также возможностями прогнозирования, моделирования эффективных свойств пьезомагнитных (магнитострикционных) материалов и оптимизации магнитоупругих характеристик различных конструкций [6, 7]. В связи с этим при решении конкретных задач теории магнитоупругости повышенное внимание уделяется определению магнитоупругого состояния многосвязных тел. В работах [4, 8] предложен метод решения двумерной и плоской задач магнитоупругости для пьезомагнитных (магнитострикционных) тел с отверстиями и трещинами, основанный на введении комплексных потенциалов. В данной статье этим методом решены задачи магнитоупругости для многосвязных полупространства (полуплоскости) и слоя (полосы) из пьезомагнитного (магнитострикционного) материала с произвольно расположенными отверстиями и трещинами, в том числе выходящими на плоские (прямолинейные) границы.

1. Постановка задачи и построение общих представлений комплексных потенциалов. Рассмотрим вначале находящееся в двумерном магнитоупругом состоянии многосвязное анизотропное нижнее полупространство из пьезомагнитного (магнитострикционного) материала, ослабленное эллиптическими цилиндрическими полостями, образующие которых параллельны друг другу и плоской границе. Поверхности полостей могут касаться, пересекаться, образовывать плоские трещины или полости любой формы, а также пересекать плоскую границу полупространства. Отнесем полупространство к прямоугольной системе координат $Oxyz$, направив ось Oz по направлению образующих цилиндрических поверхностей, оси Oy и Ox – соответственно перпендикулярно и параллельно плоской границе. В поперечном сечении полупространства плоскостью Oxy будем иметь полуплоскость S, ограниченную прямолинейной границей L^+ и эллиптическими контурами L_ℓ с полуосями a_ℓ и b_ℓ, $\ell = 1, \ldots, \mathscr{L}$ (рис. 1). Обозначим расстояние от нача-

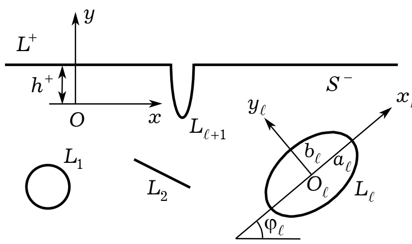

Рис. 1

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2006. – 49, № 3. – С. 96-105.

ла координат до прямолинейной границы через h^+. Будем считать, что угол жесткого поворота ω_3^∞ полупространства как целого равен нулю, плоская граница свободна от внешних воздействий, поэтому $\sigma_y^\infty = \tau_{xy}^\infty = \tau_{yz}^\infty = B_y^\infty (H_y^\infty) = 0$. Полупространство находится под воздействием растягивающих усилий $\sigma_x^\infty = p$ или однородного магнитного поля с напряженностью $H_x^\infty = \varepsilon$. На поверхностях полостей внешние усилия и индукция поля равны нулю.

Определение магнитоупругого состояния рассматриваемого полупространства сводится к нахождению производных комплексных потенциалов $\Phi_k'(z_k)$, $k = 1,\dots,4$, из граничных условий на плоской границе и на поверхностях полостей [8]

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4} g_{ki}^0\,\delta_k \Phi_k'(t_k) = 0, \qquad i = 1,\dots,4. \tag{1}$$

Здесь

$$g_{k1}^0 = \lambda_{2k}, \qquad g_{k2}^0 = \lambda_{6k}, \qquad g_{k3}^0 = \lambda_{4k}, \qquad g_{k4}^0 = \lambda_{8k},$$

$$\delta_k = \frac{dz_k}{ds} = \frac{x' + \mu_k y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}},$$

λ_{ik} – постоянные, зависящие от материала полупространства; μ_k – корни известного характеристического уравнения; x', y' – производные по параметру параметрического задания контура.

Искомые комплексные потенциалы $\Phi_k(z_k)$ определены в областях S_k, получаемых из S аффинными преобразованиями $z_k = x + \mu_k y$. При этом границе L^+ и контурам отверстий L_ℓ в областях S_k будут соответствовать прямолинейные границы L_k^+, совпадающие с L^+, и контуры $L_{k\ell}$.

Граничные условия (1) для плоской границы можно записать также в виде [4]

$$\Phi_k'(z_k) + \bar{r}_k \overline{\Phi_k'(z_k)} + \bar{s}_{k+1} \overline{\Phi_{k+1}'(z_{k+1})} +$$
$$+ \bar{e}_{k+2} \overline{\Phi_{k+2}'(z_{k+2})} + \bar{n}_{k+3} \overline{\Phi_{k+3}'(z_{k+3})} = 0, \tag{2}$$

где $\bar{r}_k$, $\bar{s}_{k+1}$, $\bar{e}_{k+2}$, $\bar{n}_{k+3}$ – известные постоянные, зависящие от магнитоупругих свойств материала; k – индекс, принимающий значения 1, ..., 4, причем значение индекса $k + j$, когда оно больше 4, формально полагается равным $k + j - 4$. При этом для точек прямолинейной границы $z_k = t_k = x + \mu_k h^+$, $\bar{z}_{k+j} = t_k + (\bar{\mu}_{k+j} - \mu_k) h^+$, $j = 0,\dots,3$.

Если контуры L_ℓ не пересекают линию L^+ и не касаются ее, то из (2), учитывая общие представления комплексных потенциалов для многосвязной области, методом интегралов типа Коши находим [4]

$$\Phi_k'(z_k) = \Gamma_k + \sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_{k\ell n} \varphi_{k\ell n}'(z_k) - \bar{r}_k \bar{a}_{k\ell n} \overline{\varphi'}_{k\ell n}^{+}(z_k) -$$
$$- \bar{s}_{k+1}\, \bar{a}_{k+1,\ell n} \overline{\varphi'}_{k+1,\ell n}^{+}(z_k) - \bar{e}_{k+2}\, \bar{a}_{k+2,\ell n} \overline{\varphi'}_{k+2,\ell n}^{+}(z_k) -$$
$$- \bar{n}_{k+3} \bar{a}_{k+3,\ell n} \overline{\varphi'}_{k+3,\ell n}^{+}(z_k) \Big], \tag{3}$$

где $a_{k\ell n}$ – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий на контурах отверстий; Γ_k – постоянные, определяемые из системы

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}\left(\lambda_{1k},\lambda_{2k},\lambda_{4k},\lambda_{5k},\lambda_{6k},\lambda_{7k}(-r_k^0),\lambda_{8k}(-\mu_k r_k^0),q_k-\mu_k p_k\right)\Gamma_k =$$

$$=\left(\sigma_x^\infty,\,0,\,0,\,\tau_{xz}^\infty,\,0,\,B_x^\infty(H_x^\infty),\,0,\,0\right),$$

$$\varphi'_{k\ell n}(z_k)=-\frac{n}{\zeta_{k\ell}^{n-1}R_{k\ell}\left(\zeta_{k\ell}^2-m_{k\ell}\right)},$$

$$\overline{\varphi'}^{\,+}_{k+j,\ell n}(z_k)=-\frac{n}{\overline{\zeta}^{+n-1}_{k+j,\ell}\overline{R}_{k+j,\ell}\left(\overline{\zeta}^{+2}_{k+j,\ell}-\overline{m}_{k+j,\ell}\right)}.$$

Здесь $\overline{\zeta}^{+}_{k+j,\ell}$ – переменные, вычисляемые из конформных отображений внешности единичного круга на внешности эллипсов $L^+_{k\ell}$, симметричных относительно прямой L^+:

$$z_k=\overline{z}_{0,k+j,\ell}+(\mu_k-\overline{\mu}_{k+j})h^+ +\overline{R}_{k+j,\ell}\left(\overline{\zeta}^{+}_{k+j,\ell}+\frac{\overline{m}_{k+j,\ell}}{\overline{\zeta}^{+}_{k+j,\ell}}\right),$$

где

$$z_{0,k+j,\ell}=x_{0\ell}+\mu_{k+j}y_{0\ell},$$

$$R_{k+j,\ell}=\frac{1}{2}\left[a_\ell(\cos\varphi_\ell+\mu_{k+j}\sin\varphi_\ell)+ib_\ell(\sin\varphi_\ell-\mu_{k+j}\cos\varphi_\ell)\right],$$

$$m_{k+j,\ell}=\frac{1}{2R_{k+j,\ell}}\left[a_\ell(\cos\varphi_\ell+\mu_{k+j}\sin\varphi_\ell)-i\,b_\ell(\sin\varphi_\ell-\mu_{k+j}\cos\varphi_\ell)\right].$$

Если хотя бы один из контуров отверстий или трещин поперечного сечения полупространства пересекает прямолинейную границу, то применять метод интегралов типа Коши невозможно. Но вид комплексных потенциалов (3) можно сохранить и в этом случае, выбирая постоянные $\overline{a}_{k\ell n}$ независимыми от коэффициентов $a_{k\ell n}$ и обозначая их через $\overline{b}_{k\ell n}$:

$$\Phi'_k(z_k)=\Gamma_k+\sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[a_{k\ell n}\varphi'_{k\ell n}(z_k)-\overline{r}_k\overline{b}_{k\ell n}\overline{\varphi'}^{\,+}_{k\ell n}(z_k)-$$

$$-\overline{s}_{k+1}\,\overline{b}_{k+1,\ell n}\overline{\varphi'}^{\,+}_{k+1,\ell n}(z_k)-\overline{e}_{k+2}\,\overline{b}_{k+2,\ell n}\overline{\varphi'}^{\,+}_{k+2,\ell n}(z_k)-$$

$$-\overline{n}_{k+3}\overline{b}_{k+3,\ell n}\overline{\varphi'}^{\,+}_{k+3,\ell n}(z_k)\Big]. \qquad (4)$$

При этом постоянные $b_{k\ell n}$, как и $a_{k\ell n}$, будем определять, удовлетворяя граничным условиям как на контурах отверстий L_l, так и на прямолинейной границе L^+. И здесь наиболее удобным является метод наименьших квадратов.

Рассмотрим теперь многосвязный слой, ограниченный параллельными плоскостями. В этом случае в поперечном сечении слоя плоскостью Oxy получим полосу S, ограниченную прямыми L^+, L^- и имеющую отверстия с контурами L_ℓ, $\ell=1,\ldots,\mathscr{L}$ (рис. 2). Обозначим расстояния от начала координат до прямолинейных

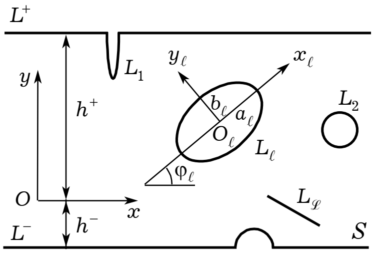

Рис. 2

границ L^+ и L^- соответственно через h^+ и h^-. В качестве частного рассмотрим и случай полосы с произвольно расположенными отверстиями и трещинами, находящейся в условиях обобщенного плоского магнитоупругого состояния.

Исходя из приведенного выше решения задачи для полупространства (4), производные комплексных потенциалов для рассматриваемого слоя выберем в виде

$$\Phi'_k(z_k) = \Gamma_k + \sum_{\ell=1}^{\mathscr{L}} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_{k\ell n}\varphi'_{k\ell n}(z_k) - \bar{r}_k^+ \bar{b}_{k\ell n} \overline{\varphi'}^+_{k\ell n}(z_k) -$$

$$- \bar{s}^+_{k+1}\bar{b}_{k+1,\ell n}\overline{\varphi'}^+_{k+1,\ell n}(z_k) - \bar{e}^+_{k+2}\bar{b}_{k+2,\ell n}\overline{\varphi'}^+_{k+2,\ell n}(z_k) -$$

$$- \bar{n}^+_{k+3}\bar{b}_{k+3,\ell n}\overline{\varphi'}^+_{k+3,\ell n}(z_k) - \bar{r}_k^- \bar{c}_{k\ell n}\overline{\varphi'}^-_{k\ell n}(z_k) -$$

$$- \bar{s}^-_{k+1}\bar{c}_{k+1,\ell n}\overline{\varphi'}^-_{k+1,\ell n}(z_k) - \bar{e}^-_{k+2}\bar{c}_{k+2,\ell n}\overline{\varphi'}^-_{k+2,\ell n}(z_k) -$$

$$- \bar{n}^-_{k+3}\bar{c}_{k+3,\ell n}\overline{\varphi'}^-_{k+3,\ell n}(z_k) \Big]. \tag{5}$$

Здесь величины с верхними индексами «+» и «−» относятся к L^+ и L^-;

$$\overline{\varphi'}^-_{k+j,\ell n}(z_k) = -\frac{n}{\bar{\zeta}^{-\,n-1}_{k+j,\ell}\bar{R}_{k+j,\ell}\left(\bar{\zeta}^{-\,2}_{k+j,\ell} - \bar{m}_{k+j,\ell}\right)}, \qquad j = 0,\ldots,3;$$

$\bar{\zeta}^-_{k+j,\ell}$ – переменные, вычисляемые из неявных зависимостей

$$z_k = \bar{z}^0_{k+j,\ell} - (\mu_k - \bar{\mu}_{k+j})h^- + \bar{R}_{k+j,\ell}\left(\bar{\zeta}^-_{k+j,\ell} + \frac{\bar{m}_{k+j,\ell}}{\bar{\zeta}^-_{k+j,\ell}}\right);$$

$a_{k\ell n}$, $b_{k\ell n}$, $c_{k\ell n}$ – неизвестные постоянные, которые будем определять из условий на всех границах, в том числе и на поверхностях полостей.

2. Нахождение комплексных потенциалов. Исходя из граничных условий (1), составим функционал [3, 8]

$$I = \sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{4}\left|\sum_{k=1}^{4}\Big[g^0_{ki}\,\delta_k\,\Phi'_k(t_{km}) + \bar{g}^0_{ki}\,\bar{\delta}_k\,\overline{\Phi'_k(t_{km})}\Big]\right|^2, \tag{6}$$

где t_m, $m = 1,\ldots,M$, – точки, выбираемые на контурах L_ℓ, а также на некоторых, так называемых «коллокационных отрезках» прямолинейных границ L^+, L^-, где локальное влияние отверстий и трещин значительно и пренебречь им нельзя.

Удовлетворив условиям минимума функционала (6)

$$\frac{\partial I}{\partial a_{k\ell n}} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial b_{k\ell n}} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial c_{k\ell n}} = 0, \quad k = 1,\ldots,4, \quad \ell = 1,\ldots,\mathscr{L}, \quad n = 1,2,\ldots,$$

для определения неизвестных коэффициентов $a_{k\ell n}$, $b_{k\ell n}$, $c_{k\ell n}$ получим такую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{4}\sum_{s=1}^{4}\sum_{r=1}^{\mathscr{L}}\sum_{p=1}^{\infty}\big[a_{srp}\alpha_{isrp}\alpha_{ik\ell n} + \bar{a}_{srp}\bar{\alpha}_{isrp}\alpha_{ik\ell n} + b_{srp}\beta_{isrp}\alpha_{ik\ell n} +$$

$$+ \bar{b}_{srp}\bar{\beta}_{isrp}\alpha_{ik\ell n} + c_{srp}\gamma_{isrp}\alpha_{ik\ell n} + \bar{c}_{srp}\bar{\gamma}_{isrp}\alpha_{ik\ell n}\big] =$$

$$= -\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{4}\sum_{s=1}^{4}\alpha_{ik\ell n}\big[g^0_{si}\delta_s\Gamma_s + \bar{g}^0_{si}\bar{\delta}_s\bar{\Gamma}_s\big],$$

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{4}\sum_{s=1}^{4}\sum_{r=1}^{\mathscr{L}}\sum_{p=1}^{\infty}\left[a_{srp}\alpha_{isrp}\beta_{ik\ell n}+\bar{a}_{srp}\bar{\alpha}_{isrp}\beta_{ik\ell n}+b_{srp}\beta_{isrp}\beta_{ik\ell n}+\right.$$

$$\left.+\bar{b}_{srp}\bar{\beta}_{isrp}\beta_{ik\ell n}+c_{srp}\gamma_{isrp}\beta_{ik\ell n}+\bar{c}_{srp}\bar{\gamma}_{isrp}\beta_{ik\ell n}\right]=$$

$$=-\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{4}\sum_{s=1}^{4}\beta_{ik\ell n}\left[g_{si}^{0}\delta_{s}\Gamma_{s}+\bar{g}_{si}^{0}\bar{\delta}_{s}\bar{\Gamma}_{s}\right],$$

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{4}\sum_{s=1}^{4}\sum_{r=1}^{\mathscr{L}}\sum_{p=1}^{\infty}\left[a_{srp}\alpha_{isrp}\gamma_{ik\ell n}+\bar{a}_{srp}\bar{\alpha}_{isrp}\gamma_{ik\ell n}+b_{srp}\beta_{isrp}\gamma_{ik\ell n}+\right.$$

$$\left.+\bar{b}_{srp}\bar{\beta}_{isrp}\gamma_{ik\ell n}+c_{srp}\gamma_{isrp}\gamma_{ik\ell n}+\bar{c}_{srp}\bar{\gamma}_{isrp}\gamma_{ik\ell n}\right]=$$

$$=-\sum_{m=1}^{M}\sum_{i=1}^{4}\sum_{s=1}^{4}\gamma_{ik\ell n}\left[g_{si}^{0}\delta_{s}\Gamma_{s}+\bar{g}_{si}^{0}\bar{\delta}_{s}\bar{\Gamma}_{s}\right],$$

$$k=1,\ldots,4,\quad \ell=1,\ldots,\mathscr{L},\quad n=1,2,\ldots. \tag{7}$$

Здесь

$$\alpha_{ik\ell n}=g_{ki}^{0}\delta_{k}\varphi_{k\ell n}'(t_{km}),$$

$$\beta_{ik\ell n}=-r_{k}\bar{g}_{ki}^{0}\bar{\delta}_{k}\overline{\bar{\varphi}'^{+}_{k\ell n}(t_{km})}-s_{k}\bar{g}_{k+3,i}^{0}\bar{\delta}_{k+3}\overline{\bar{\varphi}'^{+}_{k\ell n}(t_{k+3,m})}-$$

$$-e_{k}\bar{g}_{k+2,i}^{0}\bar{\delta}_{k+2}\overline{\bar{\varphi}'^{+}_{k\ell n}(t_{k+2,m})}-n_{k}\bar{g}_{k+1,i}^{0}\bar{\delta}_{k+1}\overline{\bar{\varphi}'^{+}_{k\ell n}(t_{k+1,m})},$$

$$\gamma_{ik\ell n}=-r_{k}^{-}\bar{g}_{ki}^{0}\bar{\delta}_{k}\overline{\bar{\varphi}'^{-}_{k\ell n}(t_{km})}-s_{k}^{-}\bar{g}_{k+3,i}^{0}\bar{\delta}_{k+3}\overline{\bar{\varphi}'^{-}_{k\ell n}(t_{k+3,m})}-$$

$$-e_{k}^{-}\bar{g}_{k+2,i}^{0}\bar{\delta}_{k+2}\overline{\bar{\varphi}'^{-}_{k\ell n}(t_{k+2,m})}-n_{k}^{-}\bar{g}_{k+1,i}^{0}\bar{\delta}_{k+1}\overline{\bar{\varphi}'^{-}_{k\ell n}(t_{k+1,m})}.$$

После решения системы (7) комплексные потенциалы (5) станут известными, что позволит вычислять основные характеристики магнитоупругого состояния в любых точках тела:

$$(\sigma_x,\sigma_y,\tau_{yz},\tau_{xz},\tau_{xy})=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}(\lambda_{1k},\lambda_{2k},\lambda_{4k},\lambda_{5k},\lambda_{6k})\,\Phi_k'(z_k),$$

$$(u,v,w,\psi)=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}(p_k,q_k,s_k^0,r_k^0)\Phi_k(z_k)+(-\omega_3 y+u_0,\omega_3 x+v_0,w_0,\psi_0),$$

$$(B_x,B_y)=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}(\lambda_{7k},\lambda_{8k})\,\Phi_k'(z_k),$$

$$(H_x,H_y)=-2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{4}(r_k^0,\mu_k r_k^0)\,\Phi_k'(z_k),$$

а также коэффициенты интенсивности напряжений, индукции и напряженности поля (КИНИН) для вершин трещин:

$$k_1^{\pm}=\lim_{r\to 0}\sqrt{2r}\left[\sigma_x\sin^2\varphi_\ell+\sigma_y\cos^2\varphi_\ell-2\tau_{xy}\cos\varphi_\ell\sin\varphi_\ell\right],$$

$$k_2^{\pm}=\lim_{r\to 0}\sqrt{2r}\left[(\sigma_y-\sigma_x)\sin\varphi_\ell\cos\varphi_\ell+\tau_{xy}(\cos^2\varphi_\ell-\sin^2\varphi_\ell)\right],$$

$$k_3^{\pm}=\lim_{r\to 0}\sqrt{2r}\,(\tau_{yz}\cos\varphi_\ell-\tau_{xz}\sin\varphi_\ell),$$

$$k_B = \lim_{r \to 0} \sqrt{2r}\,(B_y \cos\varphi_\ell - B_x \sin\varphi_\ell),$$

$$k_H = \lim_{r \to 0} \sqrt{2r}\,(H_x \cos\varphi_\ell + H_y \sin\varphi_\ell).$$

Здесь r − расстояние от конца трещины до выбранной точки.

Если вместо слоя рассматривается полоса с отверстиями и трещинами, то приведенное выше решение сохраняется, только в нем нужно все величины с индексом $k = 4$ положить равными нулю, а если вместо слоя рассматривается полупространство, то в приведенном выше решении необходимо положить равными нулю коэффициенты $c_{k\ell n}$. Для решения задачи в случае полуплоскости в полученном для полупространства решении все величины с индексом $k = 4$ следует положить равными нулю.

3. Описание и анализ результатов численных исследований. Были проведены численные исследования магнитоупругого состояния многосвязной полосы (рис. 3) и полуплоскости, изготовленных из магнитострикционного Terfenol-D (материал М1) и пьезомагнитной керамики (материал М2) [6−8] при растяжении усилиями $\sigma_x^\infty = p$ или действии магнитного поля с напряженностью $H_x^\infty = \varepsilon$.

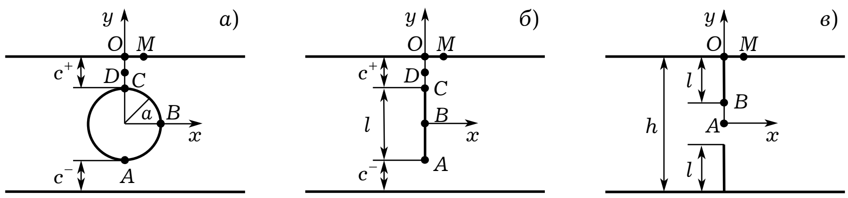

Рис. 3

При проведении исследований в зависимости от расположения отверстий и трещин друг относительно друга и относительно прямолинейных границ количество членов в рядах (3) и (6) изменялось от 10 до 50, количество точек на контурах отверстий и на «коллокационных отрезках» прямолинейных границ − от 90 до 200. Значения этих параметров увеличивались до тех пор, пока граничные условия не удовлетворялись с достаточной высокой степенью точности (погрешность граничных значений основных характеристик по отношению к интенсивности приложенной нагрузки составляла не более 10^{-3}). «Коллокационные отрезки» выбирались такой длины и в таком месте, чтобы за ними можно было пренебречь влиянием отверстий и трещин на магнитоупругое состояние.

Ниже описаны некоторые из полученных результатов. При этом напряжения, индукция, напряженность поля и КИНИН даны с точностью до интенсивности приложенной нагрузки (p или ε) в качестве множителя. При этом приняты следующие обозначения: c^+, c^- − расстояния от данного контура (трещины) до границ L^+, L^- соответственно, причем значения величин при $c^- = \infty$ относятся к случаю, когда вместо полосы рассматривается полуплоскость; a − радиус кругового отверстия (рис. 3*а*); l − длина внутренней трещины (рис. 3*б*) или краевых трещин (рис. 3*в*).

На рис. 4 и 5 приведены соответственно графики напряжений σ_x (при $\sigma_x^\infty = p$) и индукции $B_x \cdot 10^6$ (при $H_x^\infty = \varepsilon$) в полуплоскости (сплошные линии) и полосе (пунктирные линии) с центральным круговым отверстием в зависимости от отношения c/a длины перемычки c между границей полуплоскости (полосы) и контуром отверстия ($c^+ = c^- = c$) к радиусу отверстия a. В качестве материала принимали М1. Значения величин приведены в точках $A(0; -a)$, $C(0; a)$, $D\left(0; a+\frac{c}{2}\right)$, $M\left(\frac{a}{2}; a+c\right)$ (см. рис. 3*а*).

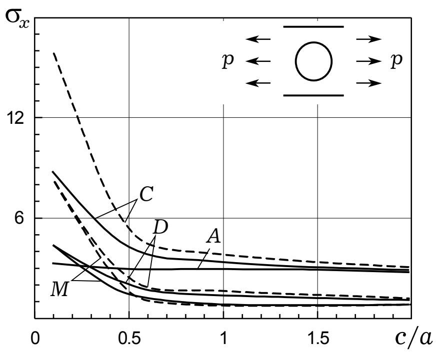

Рис. 4

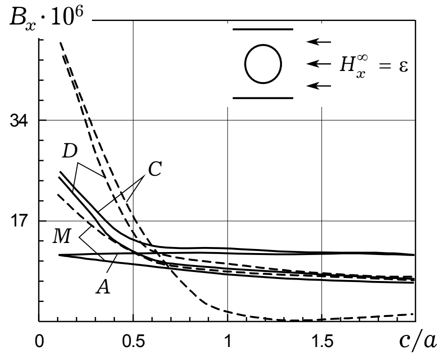

Рис. 5

Из анализа рис. 4, 5 и других полученных результатов следует, что в случае силового воздействия значения магнитных характеристик (компонент векторов индукции и напряженности) малы, но не пренебрежимо, по сравнению с напряжениями, а если на полуплоскость (полосу) действует магнитное поле, то существенных значений достигают не только компоненты векторов индукции и напряженности, но и напряжения.

При уменьшении отношения c/a значения основных характеристик магнитоупругого состояния резко возрастают в зонах между отверстием и прямолинейной границей (границами). Особенно больших значений они достигают в точках перемычки (перемычек), близких к контуру отверстия. На значения магнитоупругих характеристик существенно влияют и степени анизотропии материалов полуплоскости и полосы по упругим и магнитным свойствам, характеризуемые соответственно отношениями $\frac{s_{11}^B}{s_{22}^B}$ и $\frac{\mu_{11}^\sigma}{\mu_{22}^\sigma}$, где s_{mn}^B и μ_{ij}^σ, $m,n = 1,\dots,6$; $i,j = 1,2,3$, − коэффициенты деформации, измеренные при постоянной индукции, и коэффициенты магнитной проницаемости материала. Как для силовых, так и для магнитных воздействий увеличение жесткости и магнитной проницаемости материала (уменьшение значений s_{ij}^B и μ_{ij}^σ) приводит к значительному росту напряжений и индукции. Из сравнения данных для полуплоскости и полосы следует, что наличие второй прямолинейной границы приводит к существенному увеличению значений магнитоупругих характеристик. Взаимным влиянием отверстия и прямолинейных границ (границы) можно пренебречь, если длины перемычек не менее диаметра отверстия.

В табл. 1, 2 соответственно для полуплоскости и полосы с центральной трещиной (рис. 3*б*) длины l приведены значения некоторых магнитоупругих характеристик в зависимости от отношения c/l длины перемычки c между границей полуплоскости (полосы) и трещиной к длине трещины l для случаев действия механических усилий или магнитного поля. Значения величин рассчитаны в точках $A\left(0; -\frac{l}{2}\right)$, $C\left(0; \frac{l}{2}\right)$, $D\left(0; \frac{l+c}{2}\right)$.

Таблица 1

Точка	Величина	Мате-риал	c/l				
			2.0	1.0	0.5	0.1	0
			Действие усилий $\sigma_x^\infty = p$				
A	k_1^-	М1	0.715	0.728	0.751	0.836	0.983
C	k_1^+	М1	0.717	0.736	0.781	1.064	–
D	σ_x	М1	1.077	1.203	1.467	3.277	–
	σ_y	М1	0.044	0.106	0.218	0.867	–
			Действие поля напряженности $H_x^\infty = \varepsilon$				
A	$k_B^- \cdot 10^6$	М1	3.815	3.845	3.904	4.144	5.370
		М2	10.893	11.022	11.347	13.844	15.257
	k_H^-	М1	0.710	0.716	0.727	0.772	1.000
C	$k_B^+ \cdot 10^6$	М1	3.819	3.864	3.979	4.862	–
		М2	10.882	10.969	11.140	11.843	–
	k_H^+	М1	0.711	0.720	0.741	0.905	–
D	$B_x \cdot 10^6$	М1	5.754	6.392	7.785	18.118	–
		М2	16.407	18.221	22.172	51.488	–
	H_x	М1	1.071	1.190	1.450	3.374	–
	τ_{xy}	М1	-0.041	-0.142	-0.410	-2.405	–
		М2	-0.655	-2.514	-8.021	-55.020	–

Таблица 2

Точка	Величина	Мате-риал	c/l			
			2.0	1.0	0.5	0.1
			Действие усилий $\sigma_x^\infty = p$			
C	k_1^+	М1	0.724	0.758	0.837	1.325
D	σ_x	М1	1.082	1.224	1.536	3.952
	σ_y	М1	0.045	0.109	0.235	1.101
			Действие поля напряженности $H_x^\infty = \varepsilon$			
C	$k_B^+ \cdot 10^6$	М1	3.852	3.961	4.230	6.092
		М2	10.989	11.309	12.037	17.237
	k_H^+	М1	0.717	0.738	0.788	1.134
D	$B_x \cdot 10^6$	М1	5.795	6.534	8.237	22.632
		М2	16.531	18.642	23.409	63.848
	H_x	М1	1.079	1.217	1.534	4.215
	τ_{xy}	М1	-0.017	-0.076	-0.246	-1.550
		М2	-0.186	-1.160	-4.620	-36.000

Из табл. 1, 2 и других полученных результатов для полуплоскости и полосы с центральной трещиной следуют выводы, аналогичные приведенным выше для полуплоскости и полосы с круговым отверстием, а именно: при уменьшении отношения c/l значения магнитоупругих характеристик и КИНИН увеличиваются; взаимным влиянием прямолинейных границ (границы) и трещины можно пренебречь, если длины перемычек больше длины трещины. Влияние жесткости и магнитной проницаемости материала на значения характеристик магнитоупругого состояния при действии механических сил незначительно и весьма велико в случае магнитного воздействия. Так, для материала M2 значения k_B, индукции и напряжений вблизи прямолинейных границ и в точках перемычки значительно больше, чем для материала M1. Следует также отметить, что коэффициент k_H не зависит от анизотропии материала.

Таблица 3

Точка	Величина	l/h				
		0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
		Действие усилий $\sigma_x^\infty = p$				
A	σ_x	0.979	0.951	1.089	1.649	4.306
	σ_y	0.006	0.244	0.504	1.121	3.641
B	k_1	0.175	0.456	0.544	0.819	1.347
M	σ_x	0.967	0.568	0.540	0.347	0.289
		Действие поля напряженности $H_x^\infty = \varepsilon$				
A	$B_x \cdot 10^6$	5.411	5.696	7.449	11.302	30.030
	H_x	1.008	1.061	1.388	2.105	5.594
B	$k_B \cdot 10^6$	1.704	2.878	4.194	5.736	9.415
	k_H	0.317	0.536	0.782	1.068	1.754
M	$B_x \cdot 10^6$	5.259	4.481	4.072	3.552	3.112
	H_x	0.979	0.835	0.758	0.661	0.579

В табл. 3 для полосы постоянной ширины h, изготовленной из материала M1, с двумя симметричными краевыми трещинами (рис. 3*в*) в зависимости от отношения l/h длины трещины к ширине полосы приведены значения некоторых характеристик магнитоупругого состояния и КИНИН в точках $A(0;\,0)$, $B\left(0;\,\frac{h}{2}-l\right)$, $M\left(\frac{h}{4};\,\frac{h}{2}\right)$.

Как видно из табл. 3 и других полученных результатов, увеличение длин краевых трещин в полосе приводит к существенному росту значений магнитоупругих характеристик. Как и для полосы с поперечной центральной трещиной, в случае магнитного воздействия влияние анизотропии и магнитной проницаемости материала значительно на значения индукции, коэффициента интенсивности k_B и напряжений.

4. Выводы. С использованием обобщенных комплексных потенциалов решена задача об определении магнитоупругого состояния полупространства (полуплоскости) и слоя (полосы) с отверстиями и трещинами при произвольном их расположении и сочетании с приближенным методом наименьших квадратов, удовлетворением граничным условиям как на контурах отверстий и трещин, так и на плоских (прямолинейных) границах. Описаны результаты численных исследований магнитоупругого состояния полосы (полуплоскости) с круговым отверстием или поперечной трещиной и полосы с двумя симметричными краевыми трещинами при растяжении и действии однородного магнитного поля. Выявлено влияние геометрических и магнитоупругих характеристик полуплоскости и полосы на значения основных характеристик магнитоупругого состояния и КИНИН.

1. *Гачкевич А. Р.* Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. – Киев: Наук. думка, 1992. – 192 с.
2. *Гузь А. Н., Махорт Ф. Г.* Акустоэлектромагнитоупругость – Киев: Наук. думка, 1988. – 284 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 3.)

3. *Калоеров С. А., Бороненко О. И.* Двумерная и плоская задачи для пьезомагнитного тела с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 42. – С. 111–123.
4. *Калоеров С. А., Глущенко Ю. А.* Приближенный метод определения электроупругого состояния слоя и полосы с отверстиями и трещинами // Теорет. и прикл. механика. – 2004. – Вып. 39. – С. 115–126.
5. *Магнитные* и диэлектрические приборы / Под ред. Г. В. Катца: В 2 ч. – Москва – Ленинград: Энергия, 1964. – Ч. 1. – 416 с.
6. *Маслов Б. П., Лещенко П. В.* Прогнозирование эффективных свойств пьезомагнитной керамики, упрочненной дискретными волокнами // Прикл. механика. – 1981. – **17**, № 8. – С. 114–118.
7. *Liu Y. X., Wan J. G., Liu J.-M., Nan C. W.* Effect of magnetic bias field on magnetoelectric coupling in magnetoelectric composites // J. Appl. Phys. – 2003. – **94**, No. 8. – P. 5118–5122.
8. *Kaloerov S. A., Boronenko O. I.* Two-dimensional magnetoelastic problem for a multiply connected piezomagnetic body // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No. 10. – P. 1138–1148.
9. *Shul'ga N. A.* Propagation of coupled waves interacting with an electromagnetic field in periodically inhomogeneous media // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 10. – P. 1146–1172.

НАБЛИЖЕНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ МАГНІТОПРУЖНОГО СТАНУ П'ЄЗОМАГНІТНОГО ПІВПРОСТОРУ ТА ШАРУ З ОТВОРАМИ Й ТРІЩИНАМИ

На основі відомих методів розв'язування з використанням комплексних потенціалів двовимірних і плоских задач магнітопружності для тіл з отворами та тріщинами запропоновано методику побудови наближених розв'язків таких задач для півпростору (півплощини) і шару (смуги) з довільно розміщеними отворами й тріщинами, зокрема, коли вони виходять на плоскі (прямолінійні) границі. Наведено результати числових досліджень для півплощини та смуги з отворами і тріщинами.

APPROXIMATE METHOD OF MAGNETOELASTIC STATE DETERMINATION FOR PIEZOMAGNETIC HALF-SPACE AND LAYER WITH CAVITIES AND CRACKS

A method for solution of the magnetoelastic problems based on the theory of complex variable functions is proposed in [3, 8]*. The basic relations for complex potentials are given. The methods for solution of two-dimensional and plane problems are described for solids with cavities and cracks. In the paper, using this method, the approximate solutions for such problems for the half-space (half-plane) and layer (strip) with arbitrarily situated cavities and cracks are constructed. It is assumed, that the cavities and cracks are able to cross linear (plane) boundaries. As a numerical illustration, the half-plane and strip with cavities and cracks under surface mechanical and magnetic loads are analyzed.*

Донецк. нац. ун-т, Донецк

Получено
24.05.06