

ПОДАТЛИВА НА ЗСУВ ОРТОТРОПНА ЦИЛІНДРИЧНА ОБОЛОНКА З ПОЗДОВЖНИМИ РОЗРІЗАМИ ЗА АНТИСИМЕТРИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

На основі методу дисторсій в теорії тонких оболонок задача про пружну рівновагу податливої на зсув ортотропної оболонки з поздовжнім одним і двома розрізами зведена до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Досліджено вплив ортотропії і довжини розрізу на коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів у випадку антисиметричного навантаження.

Вплив ортотропії матеріалу на напружений стан в околі вершин тріщин досліджувався, в основному, для оболонок під дією симетричного навантаження (внутрішній тиск, розтяг, згин). Випадок антисиметричного навантаження як для поздовжніх, так і для поперечних тріщин розглядався у рамках теорії оболонок Кірхгофа – Лява, яка не враховує трансверсального зсуву. При цьому класична теорія дозволяє задовольнити на контурі тріщини лише 4 граничні умови замість природних 5 для усереднених складових напруженого стану, а перерізуючі сили в околі тріщини мають вищий порядок особливостей, ніж решта зусиль і моментів. Вказані недоліки враховують уточнені теорії, зокрема теорія Тимошенка, в рамках якої досліджувався випадок антисиметричного навантаження ортотропної циліндричної оболонки з системою поперечних колінеарних розрізів [8].

У цій роботі розглядаємо непологу циліндричну оболонку радіуса R і товщини $2h$, на серединній поверхні якої введено криволінійну ортогональну систему координат $\alpha_1 O \alpha_2$, де α_1, α_2 – відповідно віднесені до R відстані вздовж твірної та напрямного кола. Матеріал оболонки є ортотропним (головні напрямки пружності співпадають з напрямками відповідних координатних ліній) і для нього є характерною низька жорсткість на поперечний зсув. Пружні сталі матеріалу такі: $E_1, E_2, G_{12}, \nu_1, \nu_2$ – відповідно модулі Юнга, зсуву та коефіцієнти Пуассона за напрямками α_1 і α_2 (при цьому $E_2 \nu_1 = E_1 \nu_2$); G_{13}, G_{23} – модулі трансверсального зсуву [1]. Оболонка послаблена одним і двома поздовжніми розрізами однакової довжини.

Оболонка з одним поздовжнім розрізом. Нехай оболонка послаблена поздовжнім розрізом завдовжки $2\ell_0$, до берегів якого прикладені рівні за величиною, але протилежно напрямлені: зсувне зусилля S , перерізуюча сила Q і крутильний момент H :

$$S(\alpha_1, 0) = f_1(\alpha_1), \quad Q(\alpha_1, 0) = f_2(\alpha_1), \quad R^{-1}H(\alpha_1, 0) = f_3(\alpha_1). \quad (1)$$

Моделюючи оболонку з розрізами суцільною оболонкою, в якій на місці розрізів зосереджені внутрішні джерела напружень [5], а також взявши за вихідні рівняння уточненої теорії ортотропних оболонок типу Тимошенка [7], яка враховує деформації трансверсального зсуву, отримаємо систему п'яти диференціальних неоднорідних рівнянь у переміщеннях для ортотропної оболонки з власними напруженнями:

$$\sum_{k=1}^5 L_{nk} u_k = R F_n(\varepsilon_{ml}^0, \alpha_{ml}^0), \quad n = 1, \dots, 5, \quad (2)$$

де L_{nk} – симетричні диференціальні оператори, не вище другого порядку [8], у які входять пружні сталі оболонки, параметр тонкостінності $c_0 = h/(\sqrt{3}R)$ та k' – коефіцієнта зсуву [6]; $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$ – перемі-

щення серединної поверхні оболонки, а $u_4 = \gamma_1$, $u_5 = \gamma_2$ – кути повороту нормального елемента оболонки; ε_{mn}^0 , x_{ml}^0 – дисторсії, якими моделюється наявність розрізу [5]. Вирази для $F_n(\varepsilon_{mn}^0, x_{ml}^0)$ наведено у [4].

У випадку поздовжнього розрізу та антисиметричного навантаження дисторсії виражаються через такі стрибки узагальнених переміщень на розрізі $[u]$, $[w]$, $[\gamma_1]$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^0 = \varepsilon_{22}^0 = \varepsilon_{13}^0 = x_{11}^0 = x_{22}^0 = 0, \quad \varepsilon_{12}^0 = \frac{1}{R} [u(\alpha_1)] \delta(\alpha_2), \\ \varepsilon_{23}^0 = \frac{1}{R} [w(\alpha_1)] \delta(\alpha_2), \quad x_{12}^0 = \frac{1}{R} [\gamma_1(\alpha_1)] \delta(\alpha_2). \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} [u(\alpha_1)] &= u^+(\alpha_1, +0) - u^-(\alpha_1, -0), \quad [w(\alpha_1)] = w^+(\alpha_1, +0) - w^-(\alpha_1, -0), \\ [\gamma_1(\alpha_1)] &= \gamma_1^+(\alpha_1, +0) - \gamma_1^-(\alpha_1, -0), \quad |\alpha_1| \leq \lambda_0, \\ [u(\alpha_1)] &= [w(\alpha_1)] = [\gamma_1(\alpha_1)], \quad |\alpha_1| > \lambda_0, \quad \lambda_0 = \ell_0 / R. \end{aligned}$$

За допомогою операторного методу розв'язування системи (2) зведено до одного ключового рівняння 10-го порядку, для якого побудовано 2π -періодичний за коловою координатою фундаментальний розв'язок і досліджено його властивості [7]. На основі цього розв'язку та операції згортки записано інтегральні зображення зусиль і моментів, де густинами є невідомі стрибки узагальнених переміщень $[u]$, $[w]$, $[\gamma_1]$. Задовольняючи граничні умови (1) на берегах розрізу, після деяких перетворень отримуємо систему трьох сингулярних інтегральних рівнянь для визначення похідних від невідомих стрибків переміщень:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^3 \int_{-1}^1 \varphi_j(t) \mathcal{K}_{ij}(t - \tau) dt = f_i(\tau), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4)$$

При цьому повинні виконуватись умови, що впливають з однозначності переміщень у вершинах розрізу [5]:

$$\int_{-1}^1 \varphi_i(\tau) d\tau = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Тут

$$\varphi_1 = \frac{d}{d\alpha_1} [u(\alpha_1)], \quad \varphi_2 = \frac{d}{d\alpha_1} [w(\alpha_1)], \quad \varphi_3 = \frac{d}{d\alpha_1} [\gamma_1(\alpha_1)].$$

Ядра системи є симетричними, $\mathcal{K}_{ij}(z) = \mathcal{K}_{ji}(z)$, і залежать від параметра тонкостінності c_0 , пружних характеристик матеріалу, а також від зведеної довжини розрізу $\lambda_0 = \ell_0 / R$.

У випадку $i = 1, 3$ та $j = 2$ ці ядра мають логарифмічну особливість

$$\mathcal{K}_{ij}(z) = \lambda_0 (d_{ij} \ln |z| + \mathcal{K}_{ij}^0(z)),$$

а для решти випадків значень індексів i, j – особливість типу Коші

$$\mathcal{K}_{ij}(z) = \frac{d_{ij}}{z} + \lambda_0 \mathcal{K}_{ij}^0(z).$$

Систему (4) розв'язуємо чисельно за допомогою методу механічних квадратур, де невідомі густини апроксимуємо інтерполяційними поліномами Лагранжа за чебишевськими вузлами розбиття [3]. За відомими розв'язками системи (4) можна обчислити коефіцієнти інтенсивності зсувного зусил-

ля K_S , перерізувальної сили K_Q та крутильного моменту K_H . Для числових розрахунків вибрано оболонки двох типів, виготовлені з епоксидних склопластиків з різною ортотропією пружних властивостей [2]:

I – композит на епоксидній основі, армований графітними волокнами:

$$E_1 = 14.9 \text{ Мпа}, E_2 = 0.6 \text{ Мпа}, G_{12} = 0.4 \text{ Мпа}, \nu_1 = 0.31;$$

II – композит на епоксидній основі, армований волокнами з S -скла:

$$E_1 = 6.25 \text{ Мпа}, E_2 = 2.12 \text{ Мпа}, G_{12} = 0.9 \text{ Мпа}, \nu_1 = 0.251.$$

Розрахунки проведено для різних випадків орієнтації головного напрямку пружності з більшим модулем Юнга відносно ліній головних кривин оболонки:

- (а) уздовж твірної оболонки (поздовжнє розміщення армуючих волокон);
- (б) уздовж напрямного кола (поперечне розміщення армуючих волокон).

На рис. 1, 2 наведено визначені на основі розв'язку системи (4) залежності віднесених до $P\sqrt{\lambda_0}$ коефіцієнтів інтенсивності зсувного зусилля K_S , перерізувальної сили K_Q і крутильного моменту K_H (віднесеного до $RP\sqrt{\lambda_0}$) від довжини розрізу λ_0 . Параметр тонкостінності оболонки $c_0 = 0.01$.

Криві на рис. 1 відповідають випадку, коли на берегах розрізу діє лише постійне зсувне зусилля

$$f_1(\alpha_1) = P, \quad f_2(\alpha_1) = 0, \quad f_3(\alpha_1) = 0, \quad (6)$$

а на рис. 2 – коли на берегах розрізу діє постійна перерізувальна сила

$$f_1(\alpha_1) = 0, \quad f_2(\alpha_1) = P, \quad f_3(\alpha_1) = 0. \quad (7)$$

На рис. 1–4 кривими 1 позначено коефіцієнти інтенсивності, обчислені для матеріалу I та орієнтації головного напрямку пружності (а); кривими 2 – для цього ж матеріалу та орієнтації головного напрямку (б); кривими 3 – для матеріалу II та орієнтації головного напрямку пружності (а); кривими 4 – для матеріалу II та орієнтації головного напрямку (б).

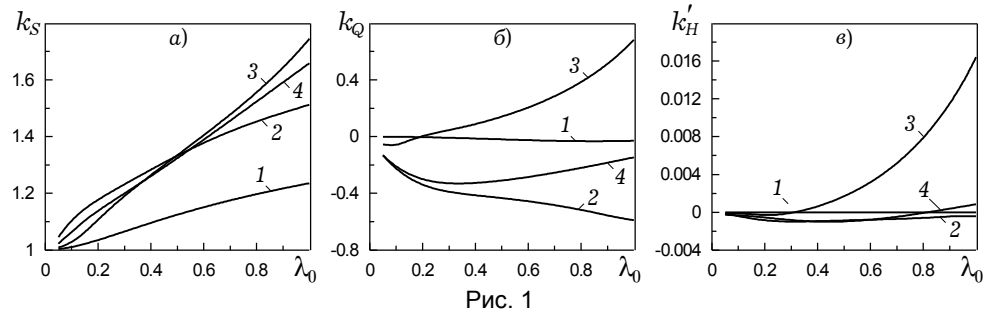


Рис. 1

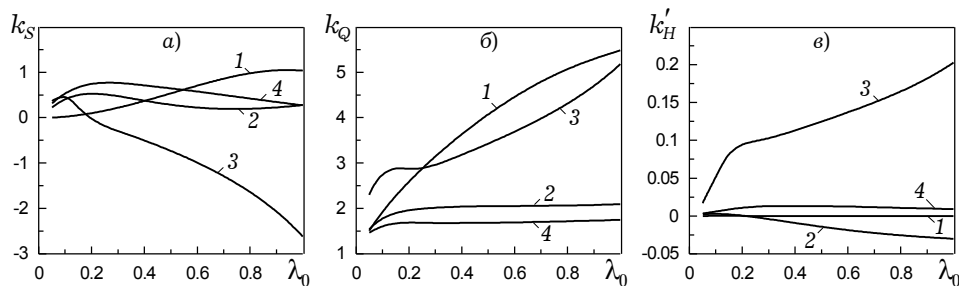


Рис. 2

Оболонка з двома поздовжніми колінеарними розрізами. Нехай оболонка послаблена двома колінеарними поздовжніми розрізами довжини $2\ell_0$, відстань між центрами яких рівна $2L_0$, $L_0 > \ell_0$. Береги розрізів знаходяться під однаковим навантаженням (6) або (7). Система розв'язувальних сингулярних інтегральних рівнянь задачі має вигляд

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^3 \int_{-1}^1 \varphi_j(t+d_0) \widehat{\mathcal{K}}_{ij}(t, \tau) dt = f_i(\tau), \quad i = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Тут $d_0 = L_0 / \ell_0$, $\widehat{\mathcal{K}}_{ij}(t, \tau) = \mathcal{K}_{ij}(t - \tau) + \mathcal{K}_{ij}(t + \tau + 2d_0)$, де $\mathcal{K}_{ij}(z)$ – ядра системи інтегральних рівнянь, що відповідають задачі для ортотропної оболонки, послабленої одним розрізом довжини $2\ell_0$.

Ядра $\widehat{\mathcal{K}}(t, \tau)$ системи (8) для випадку навантаження (6) мають вигляд

$$\widehat{\mathcal{K}}_{ij}(t, \tau) = \begin{cases} \mathcal{K}_{ij}(t - \tau) - \mathcal{K}_{ij}(t + \tau + 2d_0) & \text{для } i = 1, 3, \quad j = 2, \\ \mathcal{K}_{ij}(t - \tau) + \mathcal{K}_{ij}(t + \tau + 2d_0) & \text{для решти } i, j. \end{cases}$$

Для випадку навантаження (7) вони мають вигляд

$$\widehat{\mathcal{K}}_{ij}(t, \tau) = \begin{cases} \mathcal{K}_{ij}(t - \tau) + \mathcal{K}_{ij}(t + \tau + 2d_0) & \text{для } i = 1, 3, \quad j = 2, \\ \mathcal{K}_{ij}(t - \tau) - \mathcal{K}_{ij}(t + \tau + 2d_0) & \text{для решти } i, j. \end{cases}$$

На рис 3, 4 наведено визначені на основі розв'язку системи (8) залежності віднесених до $P\sqrt{\lambda_0}$ коефіцієнтів інтенсивності зсувного зусилля K_S , перерізувальної сили K_Q і крутильного моменту K'_H (віднесеного до $RP\sqrt{\lambda_0}$) при $\lambda_0 = 0.2$ та $c_0 = 0.01$ від величини $1/d_0 = d_0^*$ для внутрішніх кінців розрізів. Розрахунки проводились для тих самих випадків пружних сталей і орієнтації головних напрямків ортотропії, що й для одного розрізу, тому позначення кривих на графіках аналогічне. Рис. 3 відповідає навантаженню (6), рис. 4 – навантаженню (7).

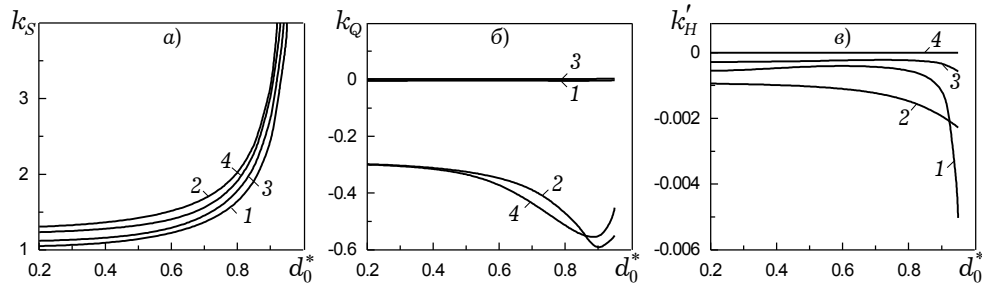


Рис. 3

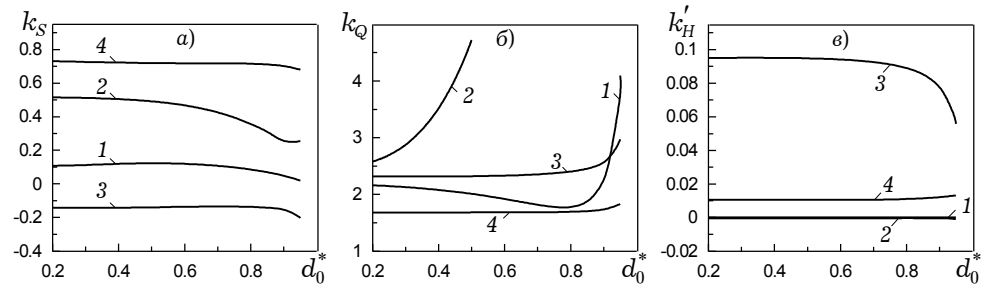


Рис. 4

Висновки. Числовий аналіз показав, що у випадку одного розрізу, незалежно від того, чи до його берегів прикладено зсувне зусилля чи перерізувальна сила, найбільшими за величиною є значення усіх коефіцієнтів інтенсивності для оболонок, виготовлених зі слабоортотропного матеріалу для поздовжнього армування. Як бачимо на рисунках, у випадку, коли до берегів розрізу прикладено зсувне зусилля, ортотропія матеріалу суттєво впливає на значення коефіцієнтів k_S та k'_H для випадку поздовжнього армування. Значення коефіцієнта k_Q зі збільшенням довжини розрізу для сла-

боортотропного матеріалу зростають для випадку поздовжнього армування, а для сильноортотропного – для випадку поперечного армування спадають.

У випадку, коли до берегів розрізу прикладено зсувне зусилля, коефіцієнти k_Q досягають великих значень для оболонок зі слабоортотропного матеріалу для поздовжнього армування і з сильноортотропного – для поперечного армування, коли до берегів взаємодіючих розрізів прикладені зсувні зусилля. Ортотропія мало порівняно з способом армування впливає на коефіцієнт інтенсивності перерізувальної сили k_Q . Для випадку, коли береги взаємодіючих розрізів знаходяться під дією перерізувальної сили, значення цього коефіцієнта інтенсивності є більшими для сильноортотропного матеріалу. Натомість, для коефіцієнтів інтенсивності зсувного зусилля більші значення, незалежно від армування, отримуються для слабоортотропного матеріалу.

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
2. Ашкенази Е. К., Ганов Э. В. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. – Ленинград: Машиностроение, 1980. – 247 с.
3. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. – Москва: Наука, 1973. – 304 с.
4. Николишин М., Сеньків Л., Уханська О. Математична модель та дослідження напруженого стану ортотропної циліндричної оболонки з тріщиною // Машинознавство. – 2002. – № 8. – С. 9–12.
5. Осадчук В. А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 221 с.
6. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.
7. Прокопович І. Б., Сеньків Л. М. Фундаментальний розв'язок рівнянь рівноваги анізотропної циліндричної оболонки зі скінченною зсувною жорсткістю // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. – 31, № 2. – С. 56–57.
8. Сеньків Л. М. Рівновага пружної податливої на зсув непологої ортотропної циліндричної оболонки з поперечними симетрично навантаженими розрізами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – 43, № 4. – С. 108–113.

ПОДАТЛИВАЯ НА СДВИГ ОРТОТРОПНАЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ОБОЛОЧКА С ПРОДОЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ ПРИ АНТИСИММЕТРИЧНОМ НАГРУЖЕНИИ

На основе метода дисторсий в теории тонких оболочек задача об упругом равновесии податливой на сдвиг ортотропной оболочки с продольным одним и двумя разрезами сведена к системе сингулярных интегральных уравнений. Исследовано влияние ортотропии и длины разреза на коэффициенты интенсивности усилий и моментов в случае антисимметричного нагружения.

SHEAR-COMPLIANT ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH LONGITUDINAL SLITS UNDER ANTISYMMETRIC LOADING

On the base of distorsion method in the theory of thin shells the problem on elastic equilibrium of shear-compliant orthotropic shell with one and two longitudinal slits is reduced to a system of singular integral equations. The effect of orthotropy and crack length on intensity factors of efforts and moments is studied in the case of antisymmetric loading.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
14.06.05