

О ПРЕДЕЛЬНОМ СОСТОЯНИИ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТРЕЩИН ПРИ ДВУХОСНОМ НАГРУЖЕНИИ

На основании модифицированной δ_c -модели проведено исследование предельного состояния ортотропной пластины, материал которой удовлетворяет условию прочности общего вида, ослабленной периодической системой коллинеарных трещин, в условиях двухосного нагружения. С использованием комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили получено решение задачи в общем виде и основные уравнения для определения напряжений в зонах предразрушения. Приведены выражения размера зон предразрушения через внешнюю нагрузку и геометрические параметры задачи. Изучено влияние двухосности нагружения на процесс формирования зон предразрушения возле вершин трещин и предельное состояние пластины.

Введение. Как известно, в механике разрушения существуют классы задач, которые не могут быть решены в рамках классических подходов. Одной из таких проблем является исследование влияния внешней нагрузки, действующей вдоль плоскости расположения трещин, на процесс разрушения. Это связано с тем, что указанная составляющая внешней нагрузки не входит в выражения для коэффициента интенсивности напряжений K_I , J -интеграла и раскрытия в вершине трещины, определяемые для трещины нормального отрыва на основании известных моделей и, следовательно, характеристики разрушения, рассчитанные по этим классическим моделям, не зависят от двухосности нагружения [1, 12, 13].

При исследовании подобных задач разработано несколько неклассических подходов, позволяющих учесть влияние напряжений, действующих параллельно трещине, на характеристики разрушения.

1. При исследовании задач о сжатии тел с трещинами усилиями, направленными вдоль плоскостей трещин, А. Н. Гузем в качестве критерия разрушения предложен критерий потери устойчивости материала в локальной области вблизи трещины [1]. Основные результаты в рамках такой постановки для различных схем нагружения и расположения трещин содержатся в работах [1, 15].

2. В работах [13, 14, 16, 17] предлагается подход, основанный на более полном учете распределения напряжений у края трещины нормального отрыва, а не только его сингулярной части. Этот подход предусматривает введение второго, дополнительно к K_I или J_I , параметра T , являющегося несингулярным членом в разложении напряжений в окрестности вершины трещины. Такой подход получил название $K_I - T$ -теории.

3. В работах [2, 3] предложен подход к решению этой проблемы для тонких пластин, на основе обобщения известной δ_c -модели [7, 9]. В предлагаемой модели материал вблизи вершины трещины моделируется в виде тонкой полосы идеально пластического материала. В работе [3] в рамках такого подхода исследована задача о разрушении ортотропной пластины с одиночной трещиной при двухосном нагружении.

В данной работе на основании модифицированной δ_c -модели трещины, предложенной в [5], решена задача о предельном состоянии ортотропной пластины, ослабленной периодической системой коллинеарных трещин, при двухосном нагружении. Получено решение задачи в общем виде: выражения для комплексных потенциалов Колосова – Мусхелишвили, напряжения в зонах предразрушения и раскрытие в вершинах трещин. Исследовано

влияние двухосности нагружения на процесс формирования зон предразрушения вблизи вершин трещин и предельное состояние пластины. Численные результаты получены для материала, удовлетворяющего условию прочности Мизеса – Хилла.

Постановка задачи. Рассмотрим бесконечную тонкую ортотропную пластину, ослабленную периодической системой трещин (разрезов) длины 2ℓ , расположенных вдоль действительной оси Ox , с центрами в точках $x_n = \pm 2nD$, $y = 0$. Оси ортотропии материала параллельны осям Ox и Oy . Берега разрезов свободны от нагрузки, а на бесконечности пластина подвергается действию однородного двухосного нагружения

$$\sigma_y = p > 0, \quad \sigma_x = q, \quad \tau_{xy} = 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad (z = x + iy).$$

Предположим, что материал пластины удовлетворяет условию прочности общего вида

$$F(\sigma_1, \sigma_2, C_i) = 0, \quad (1)$$

где C_i – постоянные материала, определяемые экспериментально; σ_1, σ_2 – главные напряжения. Далее в работе не накладываются какие-либо ограничения на вид поверхности (1). Надо заметить, что достаточно широкое распространение для ортотропных материалов получили критерии прочности Мизеса – Хилла и его разновидности [6], поэтому численные результаты получены на примере условия прочности Мизеса – Хилла

$$\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{0x}^2} + \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{0y}^2} - \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{0x} \sigma_{0y}} = 1, \quad (2)$$

где σ_{0x}, σ_{0y} – пределы прочности в направлениях x, y соответственно. При расчетах полагалось $\sigma_{0x}/\sigma_{0y} = 0.8$.

Под действием внешних нагрузок на продолжении трещин возникают зоны предразрушения, напряжения в которых удовлетворяют условию (1). Заменим эти зоны дополнительными разрезами длины d , к берегам которых приложены напряжения σ_x^0, σ_y^0 . Вследствие симметрии задачи направления x, y являются главными и, следовательно, напряжения σ_x^0, σ_y^0 удовлетворяют условию прочности (1). Таким образом, получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \begin{cases} 0, & |x - x_n| < \ell, & y = 0, \\ \sigma_y^0, & \ell \leq |x - x_n| \leq \mathcal{L} = \ell + d, & y = 0, \end{cases} \\ F(\sigma_x^0, \sigma_y^0, C_i) &= 0, \quad \ell \leq |x - x_n| \leq \mathcal{L}, \quad y = 0, \\ \tau_{xy} &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 0, \\ \sigma_x &= q, \quad \sigma_y = p, \quad \tau_{xy} = 0, \quad |x + iy| \rightarrow \infty, \\ v &= 0, \quad |x - x_n| \geq \mathcal{L}, \quad y = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Метод решения. Выражения для комплексных потенциалов. Для решения поставленной задачи воспользуемся методом комплексных потенциалов Колосова – Мухелишвили. Как известно [11], напряженно-деформированное состояние анизотропного тела при плоском напряженном состоянии характеризуется двумя комплексными функциями $\omega_1(z_1), \omega_2(z_2)$ комплексных переменных $z_1 = x + S_1 y, z_2 = x + S_2 y$, где $S_1, S_2, \bar{S}_1, \bar{S}_2$ – корни характеристического уравнения

$$a_{11}S^4 - 2a_{16}S^3 + (2a_{12} + a_{66})S^2 - 2a_{26}S + a_{22} = 0, \quad (4)$$

которое соответствует основному уравнению плоской теории упругости анизотропной среды

$$a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} - 2a_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} = 0,$$

где a_{ij} – упругие постоянные, входящие в обобщенный закон Гука

$$\varepsilon_i = \sum_{j=1}^6 a_{ij} \sigma_{ij}, \quad i = 1, \dots, 6,$$

$U(x, y)$ – функция напряжений.

Для ортотропных материалов $a_{26} = a_{16} = 0$. Кроме того, для большинства ортотропных материалов, оси симметрии упругих свойств которых совпадают с осями координат, имеет место [8]

$$S_1 = i\beta_1, \quad S_2 = i\beta_2, \quad \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

В дальнейшем будем полагать, что выполняется условие (5).

Выражения для компонент тензора напряжений и перемещений через комплексные потенциалы $\omega_1(z_1)$, $\omega_2(z_2)$ при плоском напряженном состоянии имеют вид [8]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} [S_1^2 \omega_1(z_1) + S_2^2 \omega_2(z_2)], \\ \sigma_y &= 2 \operatorname{Re} [\omega_1(z_1) + \omega_2(z_2)], \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re} [S_1 \omega_1(z_1) + S_2 \omega_2(z_2)], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u &= 2 \operatorname{Re} [p_1 \Phi_1(z_1) + p_2 \Phi_2(z_2)], \\ v &= 2 \operatorname{Re} [q_1 \Phi_1(z_1) + q_2 \Phi_2(z_2)], \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{где } \frac{d\Phi_i(z_i)}{dz_i} = \omega_i(z_i), \quad p_i = a_{11}S_i^2 + a_{12}, \quad q_i = \frac{a_{12}S_i^2 + a_{22}}{S_i}, \quad i = 1, 2.$$

С помощью преобразования [10]

$$w = \sin \frac{\pi z}{2D} \quad (8)$$

перейдем от плоскости $z = x + iy$ на параметрическую плоскость $w = \tilde{x} + i\tilde{y}$, где

$$\tilde{x} = \sin \frac{\pi x}{2D} \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi y}{2D}, \quad \tilde{y} = \cos \frac{\pi x}{2D} \cdot \operatorname{sh} \frac{\pi y}{2D}.$$

При этом внешность периодической системы разрезов плоскости z перейдет на бесконечнолистную риманову поверхность с одним разрезом $(-\sin \frac{\pi \mathcal{L}}{2D}; \sin \frac{\pi \mathcal{L}}{2D})$.

Используя общие выражения для потенциалов, полученное в [4] для случая анизотропной плоскости, ослабленной прямолинейными разрезами, находим потенциалы $\omega_1(w_1)$, $\omega_2(w_2)$ для плоскости с одним разрезом $[-\mathcal{L}, \mathcal{L}]$:

$$\begin{aligned} \omega_1(w_1) &= \frac{1}{S_2 - S_1} \left\{ \frac{S_2}{2\pi i X(w_1)} \int_{-L}^L \frac{X(t)P_1(t)}{t - w_1} dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{X(w_1)} [S_2 P'(w_1) - P''(w_1)] + S_2 M_1 - M_2 \right\}, \end{aligned}$$

$$\omega_2(w_2) = \frac{1}{S_1 - S_2} \left\{ \frac{S_1}{2\pi i X(w_2)} \int_{-L}^L \frac{X(t)P_1(t)}{t - w_2} dt + \right. \\ \left. + \frac{1}{X(w_2)} [S_1 P'(w_2) - P''(w_2)] + S_1 M_1 - M_2 \right\}, \quad (9)$$

где $X(z) = \sqrt{z^2 - \tilde{\mathcal{L}}^2}$, $P'(z) = C_0' z + C_1'$, $P''(z) = C_0'' z + C_1''$,
 $C_0' = p/2$, $C_0'' = C_1' = C_1'' = 0$,
 $M_1 = 0$, $M_2 = i \frac{\beta_1 \beta_2 p - q}{2(\beta_1 + \beta_2)}$.

Вычислив в (9) необходимые интегралы, с учетом (6), (7) и (8) находим решение искомой задачи (3) в виде

$$\sigma_x = 2 \operatorname{Re} [S_1^2 \omega_1(w_1) + S_2^2 \omega_2(w_2)], \\ \sigma_y = 2 \operatorname{Re} [\omega_1(w_1) + \omega_2(w_2)], \\ \tau_{xy} = -2 \operatorname{Re} [S_1 \omega_1(w_1) + S_2 \omega_2(w_2)], \quad (10)$$

$$u = 2 \operatorname{Re} [p_1 \Phi_1(w_1) + p_2 \Phi_2(w_2)], \\ v = 2 \operatorname{Re} [q_1 \Phi_1(w_1) + q_2 \Phi_2(w_2)], \quad (11)$$

где

$$\omega_1(w_1) = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left\{ i \frac{\beta_2 \sigma_y^0 w_1}{\pi \sqrt{\tilde{\mathcal{L}}^2 - w_1^2}} \arccos \frac{\tilde{\ell}}{\tilde{\mathcal{L}}} - i \frac{\beta_2 p w_1}{2 \sqrt{\tilde{\mathcal{L}}^2 - w_1^2}} + \right. \\ \left. + \frac{\beta_2 \sigma_y^0}{2\pi i} \ln \frac{\tilde{\mathcal{L}}^2 - w_1 \tilde{\ell} + \sqrt{(\tilde{\mathcal{L}}^2 - \tilde{\ell}^2)(\tilde{\mathcal{L}}^2 - w_1^2)}}{\tilde{\mathcal{L}}^2 + w_1 \tilde{\ell} + \sqrt{(\tilde{\mathcal{L}}^2 - \tilde{\ell}^2)(\tilde{\mathcal{L}}^2 - w_1^2)}} + \right. \\ \left. + \frac{\beta_2 \sigma_y^0}{2\pi i} \ln \frac{\tilde{\ell} + w_1}{\tilde{\ell} - w_1} - |M_2| \right\}, \\ \omega_2(w_2) = \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \left\{ i \frac{\beta_1 \sigma_y^0 w_2}{\pi \sqrt{\tilde{\mathcal{L}}^2 - w_2^2}} \arccos \frac{\tilde{\ell}}{\tilde{\mathcal{L}}} - i \frac{\beta_1 p w_2}{2 \sqrt{\tilde{\mathcal{L}}^2 - w_2^2}} + \right. \\ \left. + \frac{\beta_1 \sigma_y^0}{2\pi i} \ln \frac{\tilde{\mathcal{L}}^2 - w_2 \tilde{\ell} + \sqrt{(\tilde{\mathcal{L}}^2 - \tilde{\ell}^2)(\tilde{\mathcal{L}}^2 - w_2^2)}}{\tilde{\mathcal{L}}^2 + w_2 \tilde{\ell} + \sqrt{(\tilde{\mathcal{L}}^2 - \tilde{\ell}^2)(\tilde{\mathcal{L}}^2 - w_2^2)}} + \right. \\ \left. + \frac{\beta_1 \sigma_y^0}{2\pi i} \ln \frac{\tilde{\ell} + w_2}{\tilde{\ell} - w_2} - |M_2| \right\}, \quad (12)$$

$$w_1 = \tilde{x} + i S_1 \tilde{y}, \quad w_2 = \tilde{x} + i S_2 \tilde{y},$$

$$\tilde{\ell} = \sin \frac{\pi \ell}{2D}, \quad \tilde{\mathcal{L}} = \sin \frac{\pi \mathcal{L}}{2D}, \quad |M_2| = \frac{\beta_1 \beta_2 p - q}{2(\beta_1 + \beta_2)}.$$

Определение размера зон предразрушения. Очевидно, что, поскольку напряжения линейно выражаются через комплексные потенциалы $\omega_1(w_1)$ и $\omega_2(w_2)$, необходимым условием ограниченности напряжений во всей плоскости и, следовательно, при $|\tilde{x}| = \tilde{\mathcal{L}}$, $\tilde{y} = 0$ (что эквивалентно $|x - x_n| = \mathcal{L}$, $y = 0$), является условие

$$\arccos \frac{\tilde{l}}{\tilde{L}} = \frac{\pi p}{2\sigma_y^0},$$

которое эквивалентно следующему:

$$\frac{\sin \frac{\pi \ell}{2D}}{\sin \frac{\pi \mathcal{L}}{2D}} = \cos \frac{\pi p}{2\sigma_y^0}. \quad (13)$$

Соотношение (13) позволяет определить размер зон предразрушения в зависимости от параметров нагружения (p, σ_y^0) и геометрии задачи (ℓ, D).

Перепишем соотношение (13) в безразмерном виде

$$\frac{d}{\ell} = \frac{2}{\pi} \frac{D}{\ell} \arcsin \left\{ \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2D\ell} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{p/\sigma_{0y}}{\sigma_y^0/\sigma_{0y}} \right)} \right\} - 1, \quad (14)$$

где σ_{0y} – предел прочности материала при растяжении в направлении y . Поскольку $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$, то при $D \rightarrow \infty$ имеем

$$\sin \frac{\pi \ell}{2D} \sim \frac{\pi \ell}{2D}, \quad \sin \frac{\pi \mathcal{L}}{2D} \sim \frac{\pi \mathcal{L}}{2D},$$

и из (13) получаем выражение длины зоны предразрушения для одиночной трещины в бесконечной пластине [5]

$$\frac{\ell}{\mathcal{L}} = \cos \frac{\pi p}{2\sigma_y^0}. \quad (15)$$

На рис. 1 приведены зависимости размера зоны предразрушения d/ℓ от расстояния между трещинами D/ℓ при $p/\sigma_{0y} = 0.1$ (рис. 1а), $p/\sigma_{0y} = 0.5$ (рис. 1б), $p/\sigma_{0y} = 0.9$ (рис. 1в). Кривые 1–6 соответствуют значениям $q/\sigma_{0y} = 0.0, -0.3, -0.6, 0.3, 0.6, 0.8$.

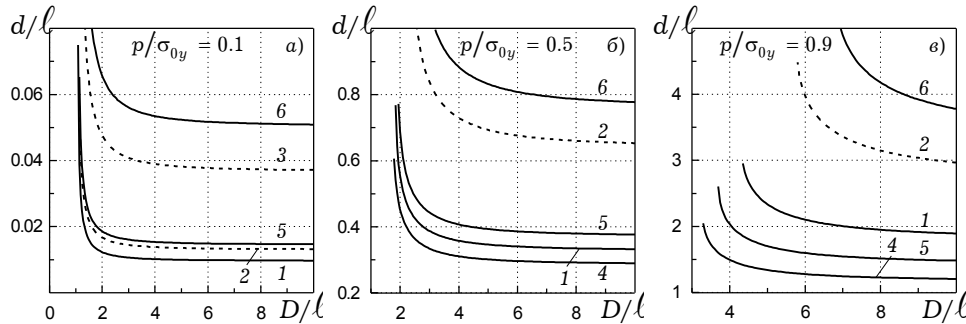


Рис. 1

На рис. 2 приведены зависимости размера зон предразрушения d/ℓ от нагрузки q/σ_{0y} , действующей вдоль линии расположения трещин, при $p/\sigma_{0y} = 0.4$. Кривые 1–3 соответствуют значениям $D/\ell = 2.0, 3.0, 10.0$.

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы. Во-первых, при увеличении расстояния между трещинами уменьшается их взаимное влияние, причем, чем выше уровень внешней нагрузки, тем

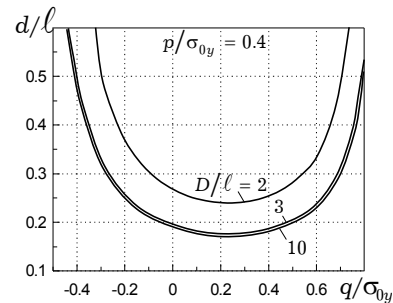


Рис. 2

дольше сказывается наличие соседних трещин на процесс формирования зон предразрушения. Во-вторых, наличие компоненты внешней нагрузки, действующей вдоль линии расположения трещин, оказывает существенное влияние на размер этих зон.

Необходимо заметить, что при достижении длиной пластической зоны значения $D - \ell$ происходит слияние пластических зон двух соседних трещин, т. е. условие

$$d = D - \ell \quad (16)$$

является одним из условий предельного состояния пластины, ослабленной системой коллинеарных трещин. С учетом (14) это условие принимает вид

$$\frac{D}{\ell} = \frac{\pi}{2 \arcsin \left(\cos \left(\frac{\pi p}{2 \sigma_y^0} \right) \right)}. \quad (17)$$

Соотношение (17) определяет расстояние между трещинами, при котором при данной нагрузке произойдет слияние зон предразрушения двух соседних трещин.

На рис. 3 показаны кривые, определенные на основании условия (17), для $D/\ell = 1.5, 5.0, 10$ (кривые 1-3).

Сплошные линии соответствуют значениям $\beta = 0.3$, пунктирные - $\beta = 0.9$.

Кривая 4 соответствует кривой прочности пластины без трещин (1). Очевидно, что компонента нагрузки, действующая вдоль линии расположения трещин, оказывает существенное влияние на предельную нагрузку, при которой происходит слияние зон предразрушения, по сравнению с одноосным растяжением.

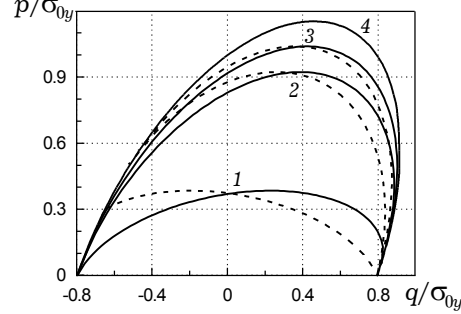


Рис. 3

Напряжения в зонах предразрушения. Для определения напряжений в зонах предразрушения σ_x^0, σ_y^0 воспользуемся выражением напряжений через комплексные потенциалы (10). Подставив полученные значения $\omega_1(w_1)$ и $\omega_2(w_2)$ (12) в первое из соотношений (10), выразим напряжение σ_x^0 через напряжение σ_y^0 . Поскольку

$$\operatorname{Re} \omega_1(w_1) \Big|_{\bar{y}=0} = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left(\frac{\beta_2 \sigma_y^0}{2} - |M_2| \right),$$

$$\operatorname{Re} \omega_2(w_2) \Big|_{\bar{y}=0} = \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \left(\frac{\beta_1 \sigma_y^0}{2} - |M_2| \right),$$

с учетом (13) получаем

$$\sigma_x^0 = \beta_1 \beta_2 \sigma_y^0 - 2(\beta_1 + \beta_2) |M_2| = \beta_1 \beta_2 (\sigma_y^0 - p) + q. \quad (18)$$

Соотношение (18) в совокупности с условием прочности (1) образуют замкнутую систему двух линейных уравнений для определения напряжений в зонах предразрушения σ_x^0, σ_y^0 . Очевидно, что σ_x^0, σ_y^0 не зависят от геометрических параметров задачи, а определяются только внешней нагрузкой и условием прочности материала.

Раскрытие в вершинах трещин. Для определения раскрытия в вершинах трещин воспользуемся выражением перемещений через комплексные потенциалы (11). Проинтегрировав выражения для комплексных потенци-

алов $\omega_1(w_1)$ и $\omega_2(w_2)$ (12) по w_1 и w_2 соответственно, с учетом (13) находим выражения для $\Phi_1(w_1)$ и $\Phi_2(w_2)$:

$$\begin{aligned}\Phi_1(w_1) &= \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \left\{ \frac{\beta_2 \sigma_y^0}{2\pi i} \left[w_1 \ln \frac{\tilde{\mathcal{E}}^2 - w_1 \tilde{\ell} + \sqrt{(\tilde{\mathcal{E}}^2 - \tilde{\ell}^2)(\tilde{\mathcal{E}}^2 - w_1^2)}}{\tilde{\mathcal{E}}^2 + w_1 \tilde{\ell} + \sqrt{(\tilde{\mathcal{E}}^2 - \tilde{\ell}^2)(\tilde{\mathcal{E}}^2 - w_1^2)}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + w_1 \ln \frac{\tilde{\ell} + w_1}{\tilde{\ell} - w_1} - 2\tilde{\ell} \ln \frac{\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}^2 - w_1^2} + \sqrt{\tilde{\mathcal{L}}^2 - \tilde{\ell}^2}}{\sqrt{w_1^2 - \tilde{\ell}^2}} \right] - |M_2| w_1 \right\}, \\ \Phi_2(w_2) &= \frac{1}{\beta_2 - \beta_1} \left\{ \frac{\beta_1 \sigma_y^0}{2\pi i} \left[w_2 \ln \frac{\tilde{\mathcal{E}}^2 - w_2 \tilde{\ell} + \sqrt{(\tilde{\mathcal{E}}^2 - \tilde{\ell}^2)(\tilde{\mathcal{E}}^2 - w_2^2)}}{\tilde{\mathcal{E}}^2 + w_2 \tilde{\ell} + \sqrt{(\tilde{\mathcal{E}}^2 - \tilde{\ell}^2)(\tilde{\mathcal{E}}^2 - w_2^2)}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + w_2 \ln \frac{\tilde{\ell} + w_2}{\tilde{\ell} - w_2} - 2\tilde{\ell} \ln \frac{\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}^2 - w_2^2} + \sqrt{\tilde{\mathcal{L}}^2 - \tilde{\ell}^2}}{\sqrt{w_2^2 - \tilde{\ell}^2}} \right] - |M_2| w_2 \right\}. \quad (19)\end{aligned}$$

Подставляя (19) в (11), находим перемещение берегов трещины ($y = 0$):

$$\begin{aligned}v(\tilde{x}) &= \frac{\sigma_y^0 (|q_1| \beta_2 - |q_2| \beta_1)}{\pi(\beta_2 - \beta_1)} \left\{ \tilde{x} \ln \frac{\left(\tilde{\mathcal{E}}^2 - \tilde{x} \tilde{\ell} + \sqrt{(\tilde{\mathcal{E}}^2 - \tilde{x}^2)(\tilde{\mathcal{E}}^2 - \tilde{\ell}^2)} \right) (\tilde{x} + \tilde{\ell})}{\left(\tilde{\mathcal{E}}^2 + \tilde{x} \tilde{\ell} + \sqrt{(\tilde{\mathcal{E}}^2 - \tilde{x}^2)(\tilde{\mathcal{E}}^2 - \tilde{\ell}^2)} \right) (\tilde{x} - \tilde{\ell})} - \right. \\ &\quad \left. - 2\tilde{\ell} \ln \frac{\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}^2 - \tilde{x}^2} + \sqrt{\tilde{\mathcal{L}}^2 - \tilde{\ell}^2}}{\sqrt{\tilde{x}^2 - \tilde{\ell}^2}} \right\}. \quad (20)\end{aligned}$$

Тогда, учитывая (13), находим раскрытие в вершинах трещин $|x - x_n| = \ell$, $y = 0$, что соответствует $\tilde{x} = \tilde{\ell}$, $\tilde{y} = 0$:

$$\begin{aligned}\delta(\ell) &= 2v(\ell) = \frac{\sigma_y^0 \tilde{\ell} (|q_1| \beta_2 - |q_2| \beta_1)}{\pi(\beta_2 - \beta_1)} \ln \cos \frac{\pi p}{2\sigma_y^0} = \\ &= \frac{4T_0}{\pi} \sigma_y^0 \sin \frac{\pi \ell}{2D} \ln \sec \frac{\pi p}{2\sigma_y^0}, \quad (21)\end{aligned}$$

$$\text{где } T_0 = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \sqrt{2 \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} - \nu_{12} \right) + \frac{E_1}{G_{12}}}.$$

Предельное состояние пластины. Если в качестве критерия разрушения выбрать критерий критического раскрытия трещины, то развитие трещины произойдет, когда раскрытие в вершине трещины достигнет некоторого предельного значения δ_c :

$$\delta(\ell) = \delta_c. \quad (22)$$

Тогда на основании (21) поле предельных нагрузок (p_*, q_*) определяется соотношением

$$\frac{4T_0 \sigma_y^0(p_*, q_*)}{\pi} \sin \frac{\pi \ell}{2D} \ln \sec \frac{\pi p_*}{2\sigma_y^0(p_*, q_*)} = \delta_c, \quad (23)$$

где $\sigma_y^0(p_*, q_*)$ определяется из решения системы уравнений (1), (18) при $p = p_*$, $q = q_*$.

Если пластина подвергнута одноосному растяжению ($q = 0$), то ее предельное состояние определяется следующим образом:

$$\frac{4T_0\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0)}{\pi} \sin \frac{\pi\ell}{2D} \ln \sec \frac{\pi p_*^{(0)}}{2\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0)} = \delta_c, \quad (24)$$

где $p_*^{(0)}$ – предельная нагрузка при одноосном нагружении.

Сравнивая (23) и (24), получаем

$$\sigma_y^0(p_*, q_*) \ln \cos \frac{\pi p_*}{2\sigma_y^0(p_*, q_*)} = \sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0) \ln \cos \frac{\pi p_*^{(0)}}{2\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0)}. \quad (25)$$

Соотношение (25) определяет поле предельных нагрузок (p_*, q_*) в зависимости от предельной нагрузки при одноосном растяжении.

Значение J -интеграла в рассматриваемом случае [12]:

$$J = - \int_0^{\delta} \sigma_y d\delta = \sigma_y^0 \delta(\ell) = \frac{4T_0(\sigma_y^0)^2}{\pi} \sin \frac{\pi\ell}{2D} \ln \sec \frac{\pi p}{2\sigma_y^0}. \quad (26)$$

Если в качестве критерия разрушения принять критическое значение J -интеграла J_c , то предельная нагрузка p_* определяется соотношением

$$\frac{4T_0(\sigma_y^0(p_*))^2}{\pi} \sin \frac{\pi\ell}{2D} \ln \sec \frac{\pi p_*}{2\sigma_y^0(p_*)} = J_c \quad (27)$$

или через предельную нагрузку при одноосном растяжении:

$$[\sigma_y^0(p_*, q_*)]^2 \ln \cos \frac{\pi p_*}{2\sigma_y^0(p_*, q_*)} = [\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0)]^2 \ln \cos \frac{\pi p_*^{(0)}}{2\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0)}. \quad (28)$$

Однако необходимо заметить, что предельное состояние плоскости, ослабленной системой трещин, не всегда определяется критериями разрушения типа (24) или (27). Если внешняя нагрузка такова, что выполняется условие (16), происходит слияние зон предразрушения двух соседних трещин, что также можно считать условием предельного состояния. Таким образом, предельное состояние плоскости, ослабленной системой трещин, определяется совокупностью условий (17) и (23) (или (17) и (28)). В частном случае одноосного растяжения критическую нагрузку можно определить следующим образом:

$$p_* = \min(p_*^{(d)}, p_*^{(\delta)}),$$

где $p_*^{(d)}$ – критическая нагрузка, определяемая из условия слияния пластических зон (17), $p_*^{(\delta)}$ – критическая нагрузка, определяемая по критерию роста трещины (δ_c или J_c).

На рис. 4 представлены кривая прочности бездефектного материала (кривая 5) и кривые предельного состояния пластины, ослабленной системой коллинеарных трещин при $D/\ell = 5.0$. Кривые 1–3 соответствуют значениям $p_*^{(0)}/\sigma_{0y} = 0.1, 0.5, 0.7$. Сплошные участки соответствуют предельной нагрузке, определенной по δ_c -критерию, пунктирные – по J_c -критерию. Кривая 4 соответствует нагрузке, при которой происходит слияние зон предразрушения (условие (17)).

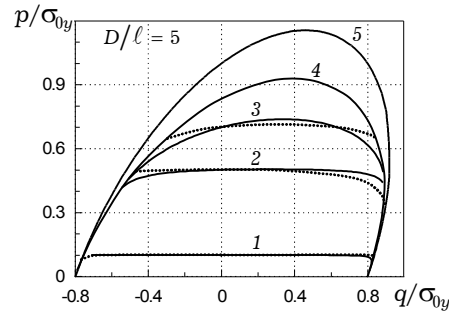


Рис. 4

Выводы. На основании модифицированной δ_c -модели исследована задача о предельном состоянии ортотропной пластины, ослабленной периодической системой коллинеарных трещин, в условиях двухосного нагружения. Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

– при увеличении расстояния между трещинами уменьшается их взаимное влияние, причем, чем выше уровень внешней нагрузки, действующей перпендикулярно линии расположения трещин, тем дольше сказывается наличие соседних трещин на процесс формирования зон предразрушения;

– наличие компоненты внешней нагрузки, действующей вдоль линии расположения трещин, оказывает существенное влияние на размер зон предразрушения, причем эта компонента может как увеличивать, так и уменьшать размер этих зон по сравнению с одноосным растяжением;

– предельное состояние пластины, ослабленной системой трещин, определяется не только критериями разрушения типа δ_c - или J_c -критериев, но также и условием слияния зон предразрушения – для произвольной длины трещины существует такая комбинация внешней нагрузки, действующей вдоль и перпендикулярно линии расположения трещин, при которой происходит слияние зон предразрушения соседних трещин;

– наличие компоненты внешней нагрузки, действующей вдоль линии расположения трещин, оказывает существенное влияние на предельное состояние пластины по сравнению с одноосным растяжением, причем это влияние тем сильнее, чем выше предельная нагрузка при одноосном нагружении.

1. Гузь А. Н., Дышель М. Ш., Назаренко В. М. Разрушение и устойчивость материалов с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1992. – 456 с. – (Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. – Т. 4., кн. 1.)
2. Галатенко Г. В. Упругопластическое разрушение изотропной пластины с трещиной при двухосном нагружении // Прикл. механика. – 1989. – **25**, № 6. – С. 36–42.
3. Галатенко Г. В., Дегтярева О. С., Каминский А. А. Упругопластическое разрушение ортотропной пластины с трещиной при двухосном нагружении // Прикл. механика. – 1990. – **26**, № 8. – С. 93–99.
4. Загубиженко П. А. Про напруження в анізотропній площині, ослабленій прямолінійними тріщинами // Доп. АН УРСР. – 1954. – № 6. – С. 424–430.
5. Каминский А. А., Богданова О. С. Моделирование процесса разрушения ортотропных материалов при двухосном нагружении // Прикл. механика. – 1996. – **32**, № 10. – С. 81–87.
6. Композиционные материалы / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
7. Кушнир Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
8. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Гостехиздат, 1950. – 299 с.
9. Панасюк В.В. Механика квазихрупкого разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1991. – 416 с.
10. Партон В. З., Морозов Е. М. Механика упруго-пластического разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 416 с.
11. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.
12. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.
13. Adams N. J. I. Some comments on the effect of biaxial stress on fatigue crack growth and fracture // Eng. Fract. Mech. – 1973. – No. 5. – P. 983–989.
14. Eftis J., Jones L., Liebowitz H. Load biaxiality and fracture: synthesis and summary // Eng. Fract. Mech. – 1990. – No. 4. – P. 537–574.
15. Guz A. N. On some nonclassical problems of fracture mechanics taking into account the stresses along cracks // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 8. – P. 937–941.

16. Larsson S. G., Carlsson A. J. Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic plastic materials // J. Mech. Phys. Solids. – 1973. – **21**. – P. 17–26.
17. Leevers P. S., Radon J. Inherent stress biaxiality in various fracture specimen geometries // Int. J. Fract. – 1982. – **19**. – P. 311–325.

ПРО ГРАНИЧНИЙ СТАН ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН ПРИ ДВОВІСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

На основі модифікованої δ_c -моделі тріщини проведено дослідження граничного стану ортотропної пластини, матеріал якої задовольняє умову міцності загального вигляду і яка послаблена періодичною системою колінеарних тріщин, в умовах двовісного навантаження. З використанням комплексних потенціалів Колосова – Мухелішвілі отримано розв'язок задачі в загальному вигляді, а також основні рівняння для визначення напружень у зоні передруйнування. Наведено вирази для розміру зон передруйнування через зовнішнє навантаження і геометричні параметри задачі. Вивчено вплив двовісності навантаження на процес формування зон передруйнування біля вершин тріщин і граничний стан пластини.

ON LIMITED STATE OF ORTHOTROPIC PLATE WITH PERIODIC SYSTEM OF COLLINEAR CRACKS UNDER BIAXIAL LOADING

In this paper the limited state of orthotropic plate with periodic system of collinear cracks under biaxial loading is considered basing on the modified δ_c -model. The material of plate satisfies the strength condition of arbitrary form. The solution in general form is obtained using the Kolosov – Mushelishvili complex potentials. The basic equations to determine the stresses in the process zones are formulated. The equations for determination of the process zone size are given. The influence of biaxiality of external loading on the process zone near the crack tip and the critical state of the cracked plate is analyzed.

Ин-т механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, Киев

Получено
03.03.06