

ДОСЛІДЖЕННЯ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ПРЯМОКУТНИХ ОРТОТРОПНИХ ПЛАСТИН ЛІНІЙНО ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

Для розрахунку власних частот і форм коливань ортотропних прямокутних пластин лінійно змінної товщини при складних граничних умовах застосовується метод сплайн-колокації. Задача формулюється в рамках лінійної теорії малих коливань. Розглядаються матеріали з різними пружними характеристиками. Розрахунки проведено для різних законів лінійної зміни товщини і для різних розмірів в плані пластин. Виконано аналіз отриманих даних та зроблено порівняння з аналогічними даними для пластин сталої товщини еквівалентної ваги при аналогічних граничних умовах.

Постановка проблеми. У багатьох областях сучасної техніки широке застосування знаходять конструкції з ортотропних матеріалів, зокрема, пластини різної форми. Знання динамічних характеристик таких конструктивних елементів допомагає визначити оптимальні умови експлуатації конструкції в цілому.

Ця публікація присвячена дослідженню вільних коливань ортотропних пластин лінійно змінної товщини при різних типах граничних умов. У випадку пластин сталої товщини при деяких типах граничних умов можна – за аналогією з випадком ізотропного матеріалу – побудувати розв’язок задачі в замкнутому вигляді [6, 9, 10]. Але вже при жорстких умовах на всіх сторонах пластини змінні у вихідних рівняннях не відокремлюються і тому доводиться користуватися числовими методами розв’язування крайових задач. Задача про коливання пружних пластин зі змінною товщиною вивчалась багатьма авторами [1–5]. Аналіз відмічених публікацій дає можливість зробити висновок, що нема єдиної точки зору відносно застосування того чи іншого підходу до розв’язування вказаного класу задач. Останнім часом у задачах обчислювальної математики та механіки для їх розв’язування широко застосовують системи ортогональних функцій [3], зокрема системи сплайн-функцій, які утворюють базис у гільбертовому просторі. Основні переваги останніх зумовлені стійкістю сплайнів щодо локальних збурень, більш задовільною збіжністю сплайнів порівняно із застосуванням многочленів як функцій апроксимації, а також простотою і зручністю при обчисленні та реалізації сплайн-функцій на сучасних персональних комп’ютерах.

Метою пропонованої роботи є дослідження вільних коливань пружних ортотропних пластин лінійно змінної товщини з використанням методу сплайн-колокації.

1. Вихідні співвідношення. Розглянемо прямокутну ортотропну пластину змінної товщини $h(x, y)$ у декартовій системі координат (координатна площина xOy співпадає із серединною поверхнею пластини).

Задачу про вільні коливання формулюємо в рамках класичної теорії Кірхгофа – Лява за таких припущень:

- при деформації нормалі до серединної поверхні пластини залишаються прямими;
- нормальні напруження на площинках, паралельних до серединної поверхні, дорівнюють нулеві.

За таких припущень рівняння вільних коливань запишуться у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, & \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= Q_x, \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} &= Q_y. \end{aligned} \quad (1)$$

У рівнянні (1) x, y – прямокутні декартові координати ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$); t – час; w – прогин пластинки; ρ – густина матеріалу.

Для згинальних і крутильних моментів M_x, M_y, M_{xy} справджуються такі співвідношення:

$$\begin{aligned} M_x &= -\left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), & M_y &= -\left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ M_{xy} &= -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (2)$$

у яких жорсткісні характеристики пластини D_{ij} задаються формулами

$$D_{ij} = \frac{B_{ij} h^3(x, y)}{12},$$

де $B_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2}$; $B_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} = \frac{\nu_1 E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$; $B_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2}$; $B_{66} = G_{12}$; $E_1, E_2, G_{12}, \nu_1, \nu_2$ – відповідно модулі пружності, зсуву та коефіцієнти Пуассона.

З (1), підставивши два останні рівняння у перше і врахувавши (2), отримаємо еквівалентне диференціальне рівняння відносно прогину w :

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial D_{11}}{\partial x} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \\ + 2 \frac{\partial D_{22}}{\partial y} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial}{\partial y} (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 2 \frac{\partial}{\partial x} (D_{12} + \\ + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 D_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_{12}}{\partial y^2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 D_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_{22}}{\partial y^2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ + 4 \frac{\partial^2 D_{66}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

На сторонах $x = 0, x = a$ і $y = 0, y = b$ задають граничні умови, визначені через прогин. Наприклад, при $y = \text{const}$ задають такі граничні умови

– жорстко закріплений контур:

$$w \Big|_{y=0,b} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0,b} = 0; \quad (4)$$

– шарнірно опертий контур:

$$w \Big|_{y=0,b} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0,b} = 0; \quad (5)$$

– один контур шарнірно опертий, а другий – жорстко закріплений:

$$w \Big|_{y=0,b} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0,b} = 0. \quad (6)$$

Аналогічні умови можуть бути задані і на контурах $x = \text{const}$.

2. Метод розв'язування. Розв'язок рівняння (3) будемо шукати у вигляді

$$w = \sum_{i=0}^N w_i(x) \psi_i(y), \quad (7)$$

де $w_i(x)$, $i = 0, \dots, N$, – шукані функції, а функції $\psi_i(y)$ вибираються так,

щоб задовольнити граничні умови при $y = \text{const}$ за допомогою лінійних комбінацій В-сплайнів 5-го степеня [7].

Запишемо рівняння (3) в вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = & a_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + a_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + a_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + a_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_5 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + \\ & + a_6 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + a_7 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + a_8 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + a_9 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{10} w, \end{aligned} \quad (8)$$

де $a_i = a_i(x, y)$, $i = 1, 2, \dots, 9$, $a_{10} = a_{10}(x, y, \omega)$.

Враховувавши подання (7) у рівнянні (8), будемо вимагати, щоб рівняння задовольнялося у заданих точках колокації $\xi_k \in [0, b]$, $k = 0, \dots, N$, за які беруться корені многочлена Лежандра другого порядку на відрізку $[0, 1]$. Якщо ввести позначення

$$\Psi_j = [\Psi_i^{(j)}(\xi_k)], \quad k, i = 0, \dots, N, \quad j = 0, \dots, 4; \quad \bar{\mathbf{w}}^\top = \{w_0, w_1, \dots, w_N\};$$

$$\bar{\mathbf{a}}_r^\top = \{a_r(x, \xi_0), a_r(x, \xi_1), \dots, a_r(x, \xi_N)\}, \quad r = 1, \dots, 9,$$

$$\bar{\mathbf{a}}_{10}^\top = \{a_{10}(x, \xi_0, \omega), a_{10}(x, \xi_1, \omega), \dots, a_{10}(x, \xi_N, \omega)\},$$

а також для матриці $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, $i, j = 0, \dots, N$, та вектора $\bar{\mathbf{c}}^\top = \{c_0, c_1, \dots, c_N\}$ позначити через $\bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{A}$ матрицю $[c_i a_{ij}]$, то система звичайних диференціальних рівнянь набуде такого вигляду:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}^{IV} = & \Psi_0^{-1}(\bar{\mathbf{a}}_1 \cdot \Psi_0) \bar{\mathbf{w}}'''' + \Psi_0^{-1}(\bar{\mathbf{a}}_2 \cdot \Psi_2 + \bar{\mathbf{a}}_3 \cdot \Psi_1 + \bar{\mathbf{a}}_4 \cdot \Psi_0) \bar{\mathbf{w}}'' + \\ & + \Psi_0^{-1}(\bar{\mathbf{a}}_5 \cdot \Psi_2 + \bar{\mathbf{a}}_6 \cdot \Psi_1) \bar{\mathbf{w}}' + \Psi_0^{-1}(\bar{\mathbf{a}}_7 \cdot \Psi_4 + \bar{\mathbf{a}}_8 \cdot \Psi_3 + \\ & + \bar{\mathbf{a}}_9 \cdot \Psi_2 + \bar{\mathbf{a}}_{10} \cdot \Psi_0) \bar{\mathbf{w}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Отриману систему можна звести до нормального вигляду

$$\frac{d\bar{\mathbf{Y}}}{dx} = \mathbf{A}(x, \omega) \bar{\mathbf{Y}}, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (10)$$

Граничні умови (2)–(4) для системи (10) можна записати у вигляді

$$\mathbf{B}_1 \bar{\mathbf{Y}}(0) = \bar{\mathbf{0}}, \quad \mathbf{B}_2 \bar{\mathbf{Y}}(a) = \bar{\mathbf{0}}. \quad (11)$$

Задача на власні значення для системи звичайних диференціальних рівнянь (10) з граничними умовами (11) розв'язувалась методом дискретної ортогоналізації разом з методом покрокового пошуку [6, 9].

За допомогою запропонованої методики досліджували спектр власних коливань прямокутних пластин із волоконних склопластиків лінійно змінної товщини при різних граничних умовах на краях пластини. Товщина пластин змінювалась за законом $h = \frac{h_2 - h_1}{a} x + h_1$, де $0 \leq x \leq a$, а h_1 і h_2 – від-

повідно початкова та кінцева товщина пластини.

Пружні характеристики матеріалів – волоконних склопластиків, з яких виготовлені пластини, наведено в табл. 1.

Таблиця 1. Параметри пружності волоконних склопластиків

Код матеріалу, n	1	2	3
$E_x, 10^{10}$ Па	4.76	3.68	3.09
$E_y, 10^{10}$ Па	2.07	2.68	2.74
$G_{xy}, 10^{10}$ Па	0.531	0.505	0.396
ν_{xy}	0.149	0.105	0.123
ν_{yx}	0.065	0.077	0.110
$\rho, \text{кг/м}^3$	1880	1870	1760

На рис. 1 наведено перші чотири власні форми квадратних пластин ($a = 0.18$ м, $b = 0.18$ м) лінійно змінної товщини з $h_1 = 0.004$ м, $h_2 = 0.006$ м для випадку, коли контур пластин жорстко закріплений (тут n – код матеріалу з табл. 1).

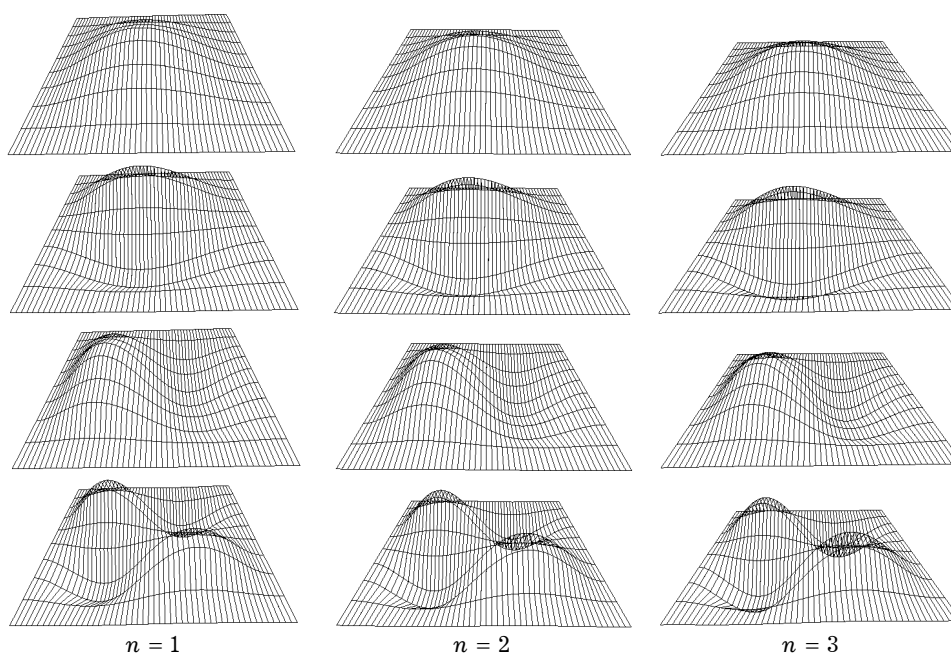


Рис. 1

На рис. 2 зображено графіки залежності частот для квадратних пластин ($a = 0.18$ м, $b = 0.18$ м) лінійно змінної товщини (з $h_1 = 0.002$ м, $h_2 = 0.006$ м) від пружних характеристик матеріалу при жорсткому закріпленні всього контуру (пунктиром позначено частоти пластин сталої товщини еквівалентної ваги з $h_0 = 0.004$ м). Аналогічні графіки можна побудувати і для інших типів граничних умов, окрім деяких, про які буде мова нижче.

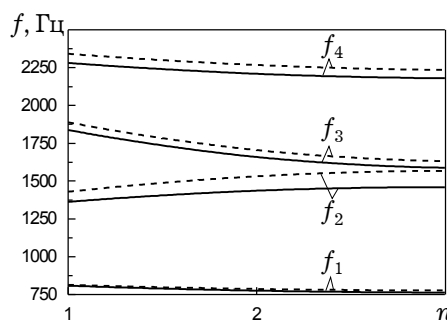


Рис. 2

Розрахунки, які було проведено за допомогою методу сплайн-колокації при різній кількості точок колокації, практично співпадають ($N = 8$, $N = 10$, $N = 12$). Тому дані обчислень наведено для $N = 10$. У табл. 2, 3 і 4 наведено значення перших чотирьох резонансних частот для пластин лінійно змінної товщини з $h_1 = 0.004$ м і $h_2 = 0.006$ м (у дужках з $h_1 = 0.002$ м і $h_2 = 0.006$ м) при розмірах в плані відповідно: $a = 0.18$ м і $b = 0.18$ м; $a = 0.12$ м і $b = 0.18$ м; $a = 0.09$ м і $b = 0.18$ м. Для порівняння у табл. 5 наведено власні частоти пластин сталої товщини еквівалентної ваги з $h_0 = 0.005$ м ($h_0 = 0.004$ м). Усі частоти розраховувалися при таких граничних умовах: жорстке закріплення по всіх краях пластини, жорстке закріплення по трьох сторонах і шарнірне опирання по четвертій стороні, жорстке закріплення двох протилежних сторін і шарнірне опирання двох інших сторін, жорстке закріплення двох суміжних сторін і шарнірне опирання двох інших сторін.

Таблиця 2. Власні частоти пластин лінійно змінної товщини з $h_1 = 0.004$ м, $h_2 = 0.006$ м ($h_1 = 0.002$ м, $h_2 = 0.006$ м) і розмірами в плані $a = 0.18$ м, $b = 0.18$ м

Частота f_i , Гц			
Код матеріалу, n	1	2	3
Номер частоти, i			
$w _{x=0,a; y=0,b} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=a} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} _{y=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} _{y=b} = 0$			
1	1015.5 (807.8)	981.3 (775.5)	968.1 (762.8)
2	1773.3 (1362.3)	1895.4 (1436.4)	1938.6 (1460.0)
3	2351.4 (1838.3)	2122.9 (1659.4)	2031.6 (1588.1)
4	2915.8 (2281.8)	2824.3 (2209.8)	2783.8 (2180.5)
$w _{x=0,a; y=0,b} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=a} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} _{y=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} _{y=b} = 0$			
1	937.7 (750.7)	876.6 (698.7)	852.0 (677.7)
2	1548.9 (1201.1)	1624.7 (1245.6)	1650.8 (1259.1)
3	2314.0 (1809.2)	2071.2 (1619.0)	1973.6 (1542.6)
4	2730.1 (2035.6)	2630.9 (2054.5)	2571.3 (2009.4)
$w _{x=0,a; y=0,b} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=a} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} _{y=0} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} _{y=b} = 0$			
1	888.0 (714.1)	809.4 (649.3)	777.3 (622.8)
2	1361.6 (1064.9)	1394.5 (1080.4)	1404.2 (1083.5)
3	2287.7 (1788.8)	2036.1 (1591.7)	1934.9 (1512.5)
4	2402.5 (1811.5)	2476.5 (1932.1)	2401.2 (1874.1)
$w _{x=0,a; y=0,b} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=0} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} _{x=a} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} _{y=0} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} _{y=b} = 0$			
1	721.8 (579.8)	702.9 (565.0)	694.0 (557.8)
2	1446.7 (1144.5)	1558.1 (1216.6)	1595.9 (1238.1)
3	1895.9 (1475.6)	1709.7 (1332.2)	1633.7 (1273.7)
4	2428.1 (1910.3)	2358.2 (1865.5)	2323.7 (1843.2)

Таблиця 3. Власні частоти пластин лінійно змінної товщини з

$$h_1 = 0.004 \text{ м}, h_2 = 0.006 \text{ м} (h_1 = 0.002 \text{ м}, h_2 = 0.006 \text{ м})$$

і розмірами в плані $a = 0.12 \text{ м}, b = 0.18 \text{ м}$

Частота f_i , Гц			
Код матеріалу, n	1	2	3
Номер частоти, i			
$w _{x=0,a; y=0,b} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=a} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} _{y=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} _{y=b} = 0$			
1	1947.8 (1568.1)	1769.4 (1420.1)	1699.1 (1362.9)
2	2510.1 (1985.5)	2478.7 (1945.9)	2464.4 (1928.3)
3	3663.8 (2831.5)	3870.9 (2955.6)	3943.0 (2994.1)
4	5072.2 (3968.5)	4501.8 (3521.8)	4275.8 (3344.9)
$w _{x=0,a; y=0,b} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=a} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} _{y=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} _{y=b} = 0$			
1	1905.7 (1537.2)	1710.7 (1377.9)	1632.9 (1314.4)
2	2348.0 (1866.4)	2268.3 (1791.7)	2234.4 (1760.1)
3	3349.3 (2604.0)	3489.2 (2683.9)	3536.2 (2707.1)
4	5029.1 (3808.6)	4473.7 (3499.8)	4244.6 (3320.6)
$w _{x=0,a; y=0,b} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=a} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} _{y=0} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} _{y=b} = 0$			
1	1877.8 (1516.6)	1672.9 (1350.0)	1590.8 (1283.4)
2	2219.6 (1771.9)	2099.4 (1667.7)	2048.8 (1623.9)
3	3072.0 (2402.2)	3148.1 (2438.6)	3170.8 (2445.9)
4	4573.2 (3488.4)	4452.9 (3483.8)	4222.0 (3303.1)
$w _{x=0,a; y=0,b} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=0} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} _{x=a} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} _{y=0} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} _{y=b} = 0$			
1	1337.4 (1067.0)	1224.9 (979.1)	1178.6 (942.6)
2	1932.0 (1554.0)	1948.9 (1564.4)	1949.8 (1562.9)
3	3102.7 (2461.3)	3325.0 (2606.6)	3399.5 (2649.5)
4	4078.2 (3168.5)	3621.7 (2814.8)	3439.4 (2673.7)

Таблиця 4. Власні частоти пластин лінійно змінної товщини з

$$h_1 = 0.004 \text{ м}, h_2 = 0.006 \text{ м} (h_1 = 0.002 \text{ м}, h_2 = 0.006 \text{ м})$$

і розмірами в плані $a = 0.09 \text{ м}, b = 0.18 \text{ м}$

Частота f_i , Гц			
Код матеріалу, n	1	2	3
Номер частоти, i			
$w _{x=0,a; y=0,b} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=a} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} _{y=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} _{y=b} = 0$			
1	3324.8 (2685.1)	2966.2 (2393.0)	2824.4 (2277.7)
2	3755.3 (3006.1)	3510.7 (2798.0)	3412.3 (2714.2)
3	4703.0 (3708.7)	4694.2 (3672.0)	4684.7 (3651.8)
4	6438.6 (4979.7)	6792.8 (5191.2)	6916.1 (5256.8)
$w _{x=0,a; y=0,b} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=a} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} _{y=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} _{y=b} = 0$			

1	3298.0 (2665.4)	2929.1 (2365.8)	2782.8 (2247.1)
2	3641.6 (2922.5)	3357.8 (2685.6)	3242.6 (2589.5)
3	4449.9 (3522.8)	4371.5 (3436.0)	4334.5 (3396.4)
4	5928.8 (4611.1)	6170.7 (4748.5)	6251.6 (4788.0)
$w _{x=0,a; y=0,b} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=a} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} _{y=0} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} _{y=b} = 0$			
1	3279.2 (2651.5)	2904.0 (2347.3)	2755.1 (2226.7)
2	3552.5 (2856.8)	3238.0 (2597.4)	3109.7 (2491.7)
3	4233.0 (3363.3)	4091.8 (3230.9)	4029.4 (3173.1)
4	5529.2 (4320.0)	5680.9 (4396.0)	5727.5 (4413.3)
$w _{x=0,a; y=0,b} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=0} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} _{x=a} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} _{y=0} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} _{y=b} = 0$			
1	2243.9 (1783.0)	2012.7 (1601.4)	1919.2 (1527.6)
2	2736.0 (2196.5)	2613.7 (2101.2)	2558.9 (2057.3)
3	3774.3 (3033.0)	3865.7 (3094.7)	3888.8 (3106.5)
4	5486.8 (4353.8)	5875.5 (4608.2)	5998.7 (4659.1)

Таблиця 5. Власні частоти пластин сталюї товщини з $h_0 = 0.005$ м
($h_0 = 0.004$ м) і розмірами в плані $a = 0.18$ м, $b = 0.18$ м

Частота f_i , Гц			
Код матеріалу, n	1	2	3
Номер частоти, i			
$w _{x=0,a; y=0,b} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=a} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} _{y=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} _{y=b} = 0$			
1	1016.5 (813.2)	983.5 (786.8)	970.8 (776.6)
2	1786.5 (1429.2)	1914.4 (1531.6)	1960.5 (1568.4)
3	2361.1 (1888.9)	2131.7 (1705.3)	2040.0 (1632.0)
4	2928.0 (2342.4)	2834.9 (2267.9)	2793.3 (2234.7)
$w _{x=0,a; y=0,b} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=a} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} _{y=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} _{y=b} = 0$			
1	937.4 (749.9)	877.1 (701.6)	852.8 (682.2)
2	1557.9 (1246.3)	1637.5 (1310.0)	1665.3 (1332.2)
3	2323.5 (1858.8)	2079.8 (1663.8)	1981.8 (1585.4)
4	2766.5 (2213.2)	2642.0 (2113.6)	2581.6 (2065.3)
$w _{x=0,a; y=0,b} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=a} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} _{y=0} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} _{y=b} = 0$			
1	887.0 (709.6)	808.8 (647.1)	776.9 (621.5)
2	1367.3 (1093.8)	1402.7 (1122.2)	1413.6 (1130.8)
3	2297.1 (1837.7)	2044.6 (1635.7)	1942.9 (1554.3)
4	2428.9 (1943.2)	2487.6 (1990.1)	2411.7 (1929.4)
$w _{x=0,a; y=0,b} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} _{x=0} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} _{x=a} = 0, \frac{\partial w}{\partial y} _{y=0} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} _{y=b} = 0$			
1	730.9 (584.7)	707.6 (566.1)	697.3 (557.8)
2	1436.3 (1149.1)	1547.4 (1237.9)	1585.8 (1268.7)
3	1921.9 (1537.5)	1731.5 (1385.2)	1654.1 (1323.3)
4	2440.6(1952.5)	2363.8 (1891.0)	2326.5 (1861.2)

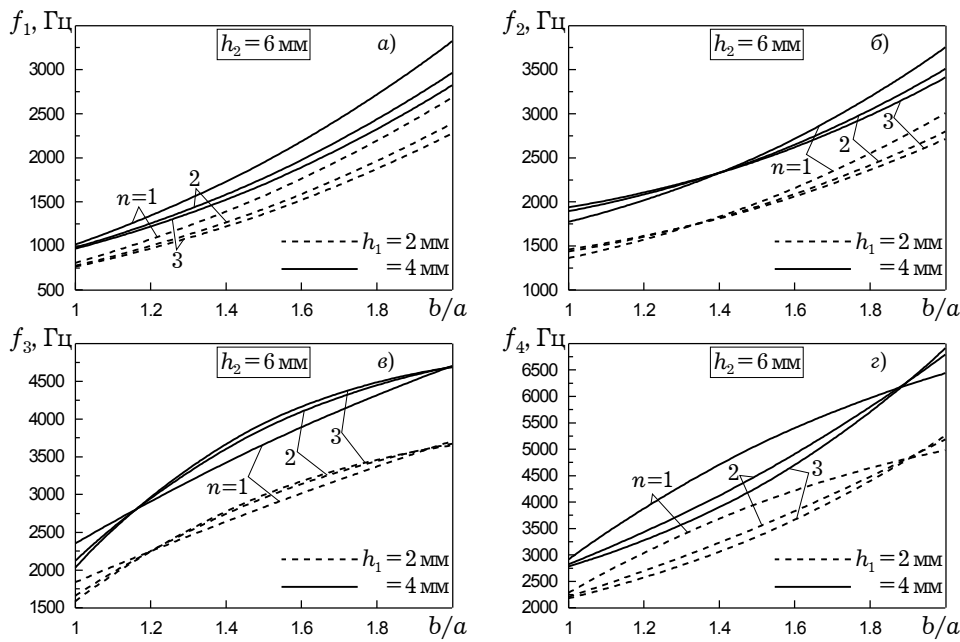


Рис. 3

На рис. 3 наведено графіки залежностей власних частот f_i , $i = 1, \dots, 4$, жорстко закріплених по контуру пластин від їхніх розмірів у плані b/a .

3. Висновки.

- З аналізу даних табл. 2–4 випливає, що при одночасному спаданні E_x , ν_{xy} , G_{xy} і зростанні E_y , ν_{yx} майже всі власні частоти пластин зменшуються при зменшенні жорсткості закріплення контурів.

Але для квадратних пластин (табл. 2) друга власна частота при такій зміні пружних характеристик матеріалу зростає при зменшенні жорсткості закріплення. Для прямокутних пластин спостерігається аналогічне зростання, але вже третьої (табл. 3) і четвертої (табл. 4) власної частоти. Цей ефект має місце при всіх розглянутих у роботі типах граничних умов; для прямокутних пластин при шарнірному опиранні двох суміжних сторін і жорсткому закріпленні двох інших сторін пластин поряд із значним зростанням третьої ($b/a = 1.5$) і четвертої ($b/a = 3$) власної частоти спостерігається незначне зростання відповідно другої та третьої частоти. Однак при зменшенні жорсткості закріплення контурів пластин всі власні частоти зменшуються (див. рис. 2).

- Пластинам лінійно змінної товщини з даними властивостями матеріалу і даними розмірами в плані при $h_1 = 0.004$ м і $h_2 = 0.006$ м ($h_1 = 0.002$ м і $h_2 = 0.006$ м) еквівалентні за масою пластини сталої товщини з $h_0 = 0.005$ м ($h_0 = 0.004$ м). З аналізу даних табл. 2 і 5 випливає, що власні частоти пластин сталої товщини можуть бути як більшими, так і меншими від відповідних частот пластин лінійно змінної товщини еквівалентної маси. Ймовірно, це залежить від співвідношення параметрів ортотропії і визначається також жорсткістю закріплення. Між першими власними частотами пластин сталої й лінійно змінної товщини еквівалентної маси спостерігається незначна різниця, яка збільшується зі збільшенням величини h_2/h_1 . Вищі ж частоти пластин лінійно змінної товщини здебільшого менші від відповідних частот пластин сталої товщини, хоча друга власна частота квадратних пластин зростає як при сталій, так і при змінній товщині пластини при описаній вище зміні параметрів ортотропії.

- На рис. 1 можна відмітити зміщення максимальних амплітуд як у напрямі зменшення товщини, так і в напрямі з меншим модулем Юнга, що є

природним наслідком збільшення інтенсивності процесу хвилеутворення при зменшенні жорсткості конструкції в даному напрямі.

- З аналізу рис. 3 випливає, що при зменшенні однієї із сторін пластини швидкість зростання величини резонансної частоти визначається не лише співвідношенням сторін у плані, але й характером анізотропії пластини.

- Отже, підбираючи відповідним чином параметри зміни товщини пластини, співвідношення сторін і параметри ортотропії, можна керувати її власним спектром та інтенсивністю хвилеутворення у бажаному для конструкції напрямку.

1. Григоренко А. Я. Расчет собственных колебаний прямоугольных пластин переменной толщины методом сплайн-колокации // Прикл. механика. – 1990. – **26**, № 12. – С. 116–119.
2. Григоренко Я. М., Беспалова Е. И., Китайгородский А. Б., Шинкаръ А. И. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1986. – 171 с.
3. Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики. – Київ: Либідь, 1995. – С. 260–272.
4. Курпа Л. В., Чистилина А. В. Исследование собственных колебаний многослойных пологих оболочек и пластин сложной формы в плане // Проблемы прочности. – 2003. – № 2. – С. 112–123.
5. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник: В 3 т. / Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. – Москва: Машиностроение, 1968. – Т. 3. – 567 с.
6. Appl F. C., Vayars N. R. Fundamental frequency of simply supported rectangular plates with linearly varying thickness // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1965. – **32**. – P. 163–168.
7. Bnat R. B. Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh – Ritz method // J. Sound and Vibr. – 1985. – **102**, No. 4. – P. 493–499.
8. Leissa A. W. Plate vibration research: 1976–1980 // The Shock and Vibr. Digest. – 1981. – **10**. – P. 19–36.
9. Leissa A. W. Recent studies in plate vibrations // The Shock and Vibr. Digest. – 1987. – **19**. – P. 10–24.
10. Ng S. F., Araar Y. Free vibration and buckling analysis of clamped rectangular plates of variable thickness by the Galerkin method // J. Sound and Vibr. – 1989. – **135**, No. 2. – P. 263–274.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ЛИНЕЙНО ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Для расчета собственных частот и форм колебаний ортотропных прямоугольных пластин линейно-переменной толщины при сложных предельных условиях применяется метод сплайн-колокации. Задача формулируется в рамках линейной теории малых колебаний. Рассматриваются материалы с разными упругими характеристиками. Расчеты проведены для разных законов линейного изменения толщины и для разных по размерам в плане пластин. Проведен анализ полученных данных и сделано сравнение с аналогичными данными для пластин постоянной толщины эквивалентного веса при аналогичных краевых условиях.

STUDY OF NATURAL VIBRATIONS OF RECTANGULAR ORTHOTROPIC PLATES OF LINEARLY VARIABLE THICKNESS

For calculation of eigen frequencies and eigen forms of vibrations of orthotropic rectangular plates of linearly variable thickness under complex boundary conditions the method of spline-collocation is used. The problem is formulated within the framework of linear theory of small vibrations. The materials with different elastic properties are considered. Calculations are made for different laws of linear change of thickness and for different sizes (in the plan) of plates. The obtained data analysis is conducted and comparison is made with the same information for the plates of constant thickness and equivalent weight under the similar boundary conditions.

¹ Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ,

² Миколаїв. держ. ун-т
ім. В. О. Сухомлинського, Миколаїв

Одержано
12.10.05