УДК 539.3

М. В. Белубекян, С. Р. Мартиросян

ФЛАТТЕР ПЛАСТИНКИ ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ И НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССЫ НА КРОМКАХ

Рассматривается тонкая пластинка конечной длины, обтекаемая сверхзвуковым потоком газа. Массой пластинки пренебрегается, но принимается, что на шарнирно опертых кромках пластинки имеются сосредоточенные массы. Определяются критические скорости обтекания, приводящие к флаттерной неустойчивости.

1. Пусть тонкая пластинка в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \le x \le \ell$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Пластинка в направлении оси Ox обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком с невозмущенной скоростью V. Принимается справедливость гипотезы Кирхгофа и поршневой теории [2]. Считается, что в направлении оси Oy пластинка достаточно длинная, поэтому можно считать, что колебания пластинки имеют форму цилиндрической поверхности, т. е. не зависят от координаты y. При указанных допущениях уравнение изгибных колебаний пластинки имеет вид [2, 5]

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + a_0\rho_0\left(\frac{\partial w}{\partial t} + V\frac{\partial w}{\partial x}\right) + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0\,. \tag{1}$$

Здесь ρ, ρ_0 – плотности материала пластинки и газа соответственно; a_0 – скорость звука в газе; w – функция прогиба пластинки; D – жесткость на изгиб, $D = \dfrac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$.

Решение уравнения (1) при различных статических граничных условиях на кромках пластинки $x = 0$ и $x = \ell$ исследовано А. А. Мовчаном [4].

После представления решения уравнения (1) в виде

$$w = f(x)e^{i\omega t} \tag{2}$$

получаем обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка относительно функции $f(x)$, для нахождения общего решения которого необходимо найти корни характеристического уравнения четвертого порядка.

Задача устойчивости пластинки существенно упрощается, если применить статический метод Эйлера. Тогда вместо уравнения (1) необходимо решить уравнение [5]

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + s^3\frac{dw}{dx} = 0, \qquad s^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}. \tag{3}$$

Корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (3), определяем как

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = -s, \qquad p_{3,4} = 0.5(1 \pm i\sqrt{3}\,), \tag{4}$$

и общее решение уравнения (3) записываем в виде

$$w(x) = A_1 + A_2 e^{-sx} + \left[A_3\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right) + A_4\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sx\right)\right]e^{sx/2}. \tag{5}$$

Пусть одна из длинных кромок пластинки имеет свободное шарнирное опирание, а другая – неподвижное шарнирное опирание:

$$w = 0, \qquad w'' = 0, \qquad x = 0\,,$$

$$w = 0, \qquad w'' = 0, \qquad x = \ell\,. \tag{6}$$

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2006. – 49, № 3. – С. 162-167.

Подстановка (5) в (6) приводит к однородной системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_i, $i = 1,2,3,4$. Полагая определитель указанной системы равным нулю, получаем уравнение относительно параметра $s\ell$:

$$C(s\ell) \equiv \operatorname{ch}(s\ell) - e^{s\ell/2} \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} s\ell\right) - e^{-s\ell/2} \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} s\ell\right) = 0, \qquad (7)$$

имеющее только тривиальное решение $s\ell = 0$. А это означает, что пластинка не теряет устойчивости при статическом подходе, т. е. дивергенция отсутствует.

2. Так как уравнение (3) обладает замечательным свойством – соответствующее характеристическое уравнение имеет простые корни (4) – появляется идея исследования динамических задач (флаттерной неустойчивости), в которых динамические члены учитываются в граничных условиях. Такая идея явилась основополагающей в методе, который был использован В. В. Болотиным для решения задачи устойчивости балки, сжатой следящей силой [2]. В соответствии с этим вместо уравнения (1) рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + s^3 \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad s^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1}, \qquad (8)$$

т.е. динамическими силами в уравнении (1), как и в статическом подходе (3), пренебрегается. Предполагается, что на каждой из шарнирно опертых кромок $x = 0$ и $x = \ell$ имеется сосредоточенная масса, т.е. граничные условия (6) заменяются следующими условиями [3]:

$$w = 0, \qquad D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = I_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \qquad x = 0,$$

$$w = 0, \qquad D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -I_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2}, \qquad x = \ell. \qquad (9)$$

При подстановке в уравнение (8) решения в виде гармонических колебаний (2) получаем уравнение относительно функции $f(x)$, общее решение которого совпадает с решением (5). Подставив представление (2) в граничные условия (9), получим следующие условия относительно функции $f(x)$:

$$f = 0, \qquad f'' + \alpha_1 \omega^2 f' = 0, \qquad x = 0,$$

$$f = 0, \qquad f'' - \alpha_2 \omega^2 f' = 0, \qquad x = \ell, \qquad (10)$$

$$\alpha_1 = I_1 D^{-1}, \qquad \alpha_2 = I_2 D^{-1},$$

$\alpha_1 \ge 0$ и $\alpha_2 \ge 0$ – параметры, характеризующие сосредоточенные инерционные моменты, приложенные к соответствующим шарнирно опертым кромкам $x = 0$ и $x = \ell$ соответственно.

Далее, подстановка общего решения вида (5) в граничные условия (10) приводит к следующей однородной системе алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_i, $i = 1,2,3,4$:

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0,$$

$$(s - \alpha_1 \omega^2) A_2 - \frac{1}{2}(s - \alpha_1 \omega^2) A_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}(s + \alpha_1 \omega^2) A_4 = 0,$$

$$A_1 + e^{-s\ell} A_2 + e^{s\ell/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} s\ell\right) \cdot A_3 + e^{s\ell/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} s\ell\right) \cdot A_4 = 0,$$

$$(s+\alpha_2\omega^2)A_2 - e^{s\ell/2}\left[s\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}s\ell\right)+\alpha_2\omega^2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}s\ell\right)\right]\cdot A_3 +$$

$$+e^{s\ell/2}\left[s\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}s\ell\right)-\alpha_2\omega^2\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}s\ell\right)\right]\cdot A_4 = 0. \quad (11)$$

Приравнивая к нулю определитель системы (11), получаем алгебраическое уравнение относительно квадратов собственных частот колебаний пластинки:

$$\alpha_1\alpha_2 b^2 A(r)\omega^4 - 2(\alpha_1+\alpha_2)brB(r)\omega^2 + r^2C(r) = 0, \quad (12)$$

где

$$A(r) = \mathrm{ch}\,(r) - e^{r/2}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right) - e^{-r/2}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}r\right),$$

$$B(r) = \mathrm{sh}\left(\frac{r}{2}\right)\cdot\left[\mathrm{ch}\left(\frac{r}{2}\right)-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)\right],$$

$$C(r) = \mathrm{ch}\,(r) - e^{r/2}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}r\right) - e^{-r/2}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}r\right), \qquad r = s\ell. \quad (13)$$

С помощью графо-аналитических методов легко показать, что

$$A(r) > 0, \quad r\cdot B(r) > 0, \quad C(r) > 0, \qquad r \neq 0,$$

$$A(r) = B(r) = C(r) = 0, \qquad r = 0. \quad (14)$$

Если ввести в рассмотрение квадрат безразмерной частоты

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{\alpha_1\alpha_2 b}{\alpha_1+\alpha_2}\omega^2,$$

то решение уравнения (12) при $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$, $r \neq 0$ можно записать в виде

$$\tilde{\omega}_{1,2}^2 = r\cdot A^{-1}(r)\left[B(r) \pm \sqrt{B^2(r) - \frac{k}{(k+1)^2}A(r)C(r)}\right], \quad (15)$$

$$k = \alpha_1\alpha_2^{-1}, \qquad k \in (0,\infty).$$

Исследуем дискриминант уравнения (12)

$$D(r,k) = B^2(r) - \frac{k}{k+1}A(r)\cdot C(r) \quad (16)$$

или согласно (13)

$$D(r,k) = \mathrm{sh}^2\left(\frac{r}{2}\right)\cdot\left(\mathrm{ch}\,\frac{r}{2} - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 -$$

$$-\frac{k}{(1+k)^2}\left[\left(\mathrm{ch}\,r - \mathrm{ch}\,\frac{r}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 - 3\,\mathrm{sh}^2\,\frac{r}{2}\sin^2\frac{\sqrt{3}}{2}r\right]$$

при различных значениях $k \in (0,\infty)$ и $r \neq 0$.

Из соотношения (16) в силу (14) следует, что

$$\min_{k\in(0,\infty)} D(r,k) = D(r,1) = B^2(r) - \frac{1}{4}A(r)\cdot C(r), \qquad r \neq 0,$$

$$\max_{k\in(0,\infty)} D(r,k) = \lim_{k\to 0\,(k\to\infty)} D(r,k) = B^2(r), \qquad r \neq 0. \quad (17)$$

Нетрудно проверить, что функция $D(r,k)$ является четной функцией от аргумента r и может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Также выполняется следующее соотношение:

$$D(r,k_1) = D(r,k_2), \qquad k_2 = k_1^{-1}, \qquad k_1,\ k_2 \in (0,\infty)\,, \tag{18}$$

что вполне объяснимо симметрией, обусловленной постановкой задачи.

Из равенства (18) следует, что достаточно исследовать $D(r,k)$ при $k \in (0,1)$ или при $k \in (1,\infty)$, $r \neq 0$.

При $D(r,k) > 0$ квадраты безразмерных частот колебаний $\tilde{\omega}_1^2$ и $\tilde{\omega}_2^2$, а также соответствующие частоты колебаний $\pm\sqrt{\tilde{\omega}_1^2}$ и $\pm\sqrt{\tilde{\omega}_2^2}$ принимают комплексные значения. При подстановке комплексных значений частот колебаний в формулу (2) получаем колебания с нарастающей со временем амплитудой. Иными словами, имеет место явление флаттерной неустойчивости.

Переходя в уравнении (12) к пределу при $r \to 0$ $(V \to 0)$, получаем в принятом приближении уравнение относительно квадрата частоты свободных колебаний пластинки с соответствующими сосредоточенными инерционными моментами на кромках $x = 0$ и $x = \ell$ пластинки

$$\alpha_1\alpha_2 b^2\omega^4 - 4(\alpha_1 + \alpha_2)b\omega^2 + 12 = 0, \qquad \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0\,, \tag{19}$$

откуда

$$\tilde{\omega}_{1,2}^2 = 2\left(1 \pm \sqrt{1 - 3k(k+1)^{-2}}\,\right), \quad k = \alpha_1\alpha_2^{-1}, \quad \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad r = 0\,.$$

Ясно, что $\tilde{\omega}_1^2 > 0$, $\tilde{\omega}_2^2 > 0$ при $r = 0$.

3. Рассмотрим некоторые частные случаи.

3.1. Пусть

$$\alpha_1 = \alpha \neq 0, \quad \alpha_2 = 0 \qquad \text{или} \qquad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \alpha \neq 0\,. \tag{20}$$

При условиях (20) решение уравнения (12) примет вид

$$\tilde{\omega}^2(r) = \alpha b\omega^2(r) = \frac{1}{2}\,rC(r)B^{-1}(r), \qquad r \neq 0\,. \tag{21}$$

Подставляя условия (20) в уравнение (19), получаем

$$\tilde{\omega}^2 = 3, \qquad r = 0\,. \tag{22}$$

В соответствии с (14) из выражений (21) и (22) очевидно, что $\tilde{\omega}^2 > 0$ при всех r. Следовательно, если на одной из кромок пластинки $x = 0$ или $x = \ell$ сосредоточенная масса отсутствует, то движение пластинки устойчиво.

3.2. Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, т.е. $k = 1$. При этом согласно (15) и (19) получаем

$$\tilde{\omega}_{1,2}^2 = r \cdot A^{-1}(r)\left(B(r) \pm \sqrt{B^2(r) - \frac{1}{4}A(r)C(r)}\,\right), \qquad r \neq 0\,, \tag{23}$$

$$\tilde{\omega}_1^2 = 2\left(1 - \sqrt{1 - 3k(k+1)^{-2}}\,\right) = 1\,,$$

$$\tilde{\omega}_2^2 = 2\left(1 + \sqrt{1 - 3k(k+1)^{-2}}\,\right) = 3, \qquad r \to 0 \quad (V \to 0)\,. \tag{24}$$

С помощью графо-аналитических методов исследований можно показать, что подкоренное выражение в (23) отрицательно

$$D(r,1) = B^2(r) - \frac{1}{4}A(r)\cdot C(r) < 0 \tag{25}$$

при

$$r \in \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\quad \frac{5\pi}{2}+2\pi n\right), \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{26}$$

т.е. $\tilde{\omega}_1^2$ и $\tilde{\omega}_2^2$ при значениях r из интервалов (26) становятся комплексными числами, а движение пластинки приобретает характер колебаний с возрастающими амплитудами. Иными словами, при значениях (26) наблюдается явление флаттерной неустойчивости.

Первые два интервала значений (26), соответствующие соответственно значениям $n = 0$ и $n = 1$, следующие:

$$r_0 = (s\ell)_0 \in \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}\right) \approx (5.43,\ 9.05),$$

$$r_1 = (s\ell)_1 \in \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{7\pi}{2},\ \frac{9\pi}{2}\right) \approx (12.63,\ 16.25), \tag{27}$$

откуда согласно (3) легко определяются критические значения скорости потока $V_{k,0}$ и $V_{k,1}$:

$$V_{k,0} \approx 160\ D\, a_0^{-1}\rho_0^{-1}, \qquad\qquad V_{k,1} \approx 2000\ D\, a_0^{-1}\rho_0^{-1},$$

а также значения скоростей потока газа, соответствующие интервалам (27):

$$V_{F,0} \in (160,\ 740) D\, a_0^{-1}\rho_0^{-1}, \qquad\qquad V_{F,1} \in (2000,\ 4252) D\, a_0^{-1}\rho_0^{-1}.$$

При этих значениях скоростей потока газа имеют место флаттерные колебания пластинки.

Как следует из (17), критическое значение скорости потока $V_{k,0}$, приводящее к флаттерной неустойчивости, наименьшее при $k = 1$. А в интервалах $k \in (0,1)$ и $k \in (1,\infty)$ критическое значение скорости потока $V_{k,0}$ возрастает соответственно при $k \to 0$ и $k \to \infty$. При этом согласно (18) критические значения скорости потока при k_1 и $k_2 = k_1^{-1}$ равны.

Отметим, что в случае защемленной вдоль одной кромки и свободной вдоль другой кромки пластинки, обтекаемой потоком газа, и со сосредоточенной массой на свободном конце, наблюдаются как дивергентная, так и флаттерная неустойчивости [1]. При этом критическое значение скорости потока, при котором имеют место флаттерные колебания, на порядок меньше значения $V_{k,0}$, определяемого выражением (27).

Таким образом, в рассматриваемом случае – шарнирно опертой пластинки вдоль длинных кромок с сосредоточенными массами на опорах, обтекаемой потоком газа, имеют место только флаттерные колебания пластинки при всех $\alpha_1 \ne 0$, $\alpha_2 \ne 0$, а дивергенция для всех значений α_1, α_2 отсутствует.

1. *Белубекян М. В., Геворкян С. Х., Самра Г. А.* К задаче устойчивости пластинки при обтекании сверхзвуковым потоком // 5-я Междунар. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред» (Ереван 1–7 окт. 2005). – Ереван, 2005. – С. 88–92.
2. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи упругой устойчивости. – Москва: Физматгиз, 1961. – 340 с.
3. *Вибрации* в технике. Справочник: В 6 т. / Под ред. *В. В. Болотина*. – Москва: Машиностроение, 1978. – Т. 1. – 352 с.
4. *Мовчан А. А.* О колебаниях пластинки, движущейся в газе // Прикл. математика и механика. – 1956. – **20**. – С. 211–222.
5. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем. – Москва: Наука, 1979. – 384 с.

ФЛАТЕР ПЛАСТИНКИ ПРИ НАДЗВУКОВОМУ ОБТІКАННІ ТА ЗА НАЯВНОСТІ ЗОСЕРЕДЖЕНОЇ МАСИ НА КРАЯХ

Розглядається тонка пластинка скінченної довжини, яка обтікається надзвуковим потоком газу. Масою пластинки нехтується, зате приймається, що на шарнірно опертих краях пластинки розміщені зосереджені маси. Визначено критичні швидкості обтікання, які призводять до флатерної нестійкості.

ON PLATE FLUTTER PROBLEM IN SUPERSONIC FLOW IN A CASE OF CONCENTRATED MASS AT EDGES

The paper is devoted to the analysis of stability of a thin plate model in a supersonic air flow. The plate's mass is ignored, but it is considered that the concentrated mass is on the hinge supported edges. The critical velocity of the air flow is found, which is reduced to the fluttered instability.

Ин-т механики
НАН Армении, Ереван, Армения

Получено
19.11.05