

**ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ЧАСТКОВО ПРОЗОРОЇ ШАРУВАТОЇ ПЛАСТИНИ ПРИ ТЕПЛОВОМУ ОПРОМІНЕННІ**

*За умов ідеального теплового та механічного контактів складових частин досліджено характеристики теплових процесів і напружений стан у частково прозорій шаруватій пластині, спричинені дією теплового випромінювання від паралельної до неї нагрітої поверхні. Вивчено закономірності в розподілі тепловиділень, температури та компонент тензора напружень у пластині залежно від температури джерела випромінювання.*

Частково прозорі для теплового випромінювання матеріали – скло, кераміка, пластмаса, волокно – широко використовуються в інженерній практиці, зокрема, при створенні елементів конструкцій і приладів шаруватої структури, наприклад, скляних елементів із покриттями для електровакуумних приладів, світловодів, багатошарового скла, сонячних батарей, оптичних елементів для інфрачервоної техніки і т. п. [16, 21, 26, 32]. Сучасні технології термообробки таких елементів базуються на використанні для їх нагріву теплового випромінювання [2, 11, 24, 26]. Під дією такого випромінювання елементи конструкцій та прилади, зокрема, сонячні батареї, багатошарові скла, можуть перебувати також в умовах експлуатації [16, 17, 32]. Це викликало в останні роки дослідження процесів переносу теплового випромінювання та теплопровідності в шаруватих (композитних) частково прозорих (напівпрозорих) тілах, які проводилися, в основному, на модельних задачах для шаруватої пластини [29, 30, 33, 34, 35, 36, 37, 38].

Для побудови раціональних режимів термообробки з використанням теплового випромінювання чи експлуатації виробів шаруватої структури за умов дії випромінювання виникає необхідність моделювання у взаємозв'язку спричинених дією випромінювання теплових і механічних процесів у таких виробках та дослідження їх термонапруженого стану. Однак в літературі розвинуті лише варіанти термомеханіки однорідних частково прозорих тіл [3, 6, 22] чи тіл з домішками [12, 28] за умов дії теплового випромінювання, на основі яких досліджено термонапружений стан тіл канонічної форми [7, 8, 9, 10, 25, 31].

У цій статті досліджено термонапружений стан шаруватої пластини (за умов ідеального теплового та механічного контактів складових частин) при дії теплового випромінювання від паралельної до неї нагрітої поверхні. Вивчено залежність розподілів характеристик теплових процесів (тепловиділень і температури) і компонент тензора напружень в пластині від спектрального складу випромінювання (що визначається температурою джерела), поглинальних та відбивальних властивостей складових шарів і їх товщин.

Розглянемо пластину, що складається з двох частково прозорих контактуючих шарів завтовшки  $h_j$ ,  $j = 1, 2$ , з різними радіаційними властивостями. Зі сторони основи  $z = 0$  (вісь  $z$  напрямлена по нормалі до шарів,  $z = h_1$  – поверхня розділу,  $z = h_1 + h_2 = h$  – інша основа) пластина знаходиться під дією теплового випромінювання, створюваного нагрітою до постійної температури  $T_s$ , плоскою паралельною до неї поверхнею. Області зовнішнього середовища  $z < 0$  і  $z > h$  є реальним газовим середовищем (повітрям). Основи пластини  $z = 0$  і  $z = h$  вільні від силового навантаження, а краї закріплені одним із відомих способів (жорстко закріплені, жорстко зацемлені або вільні від зовнішніх зусиль і моментів) [6, 15]. Вважаємо, що на поверхні розділу  $z = h_1$  виконуються умови ідеального теплового та механічного контактів.

Для опису поширення теплового випромінювання від поверхні в складових шарах скористаємося рівняннями переносу в наближенні невідпромінюючого матеріалу, які в розглядуваному випадку матимуть вигляд [13, 22]

$$\frac{dI_{\lambda}^{\pm(j)}}{dz_j} \nu \pm h_j a_{\lambda}^{(j)} I_{\lambda}^{\pm(j)}(z_j, \nu) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (1)$$

де  $I_{\lambda}^{\pm(j)}(z_j, \nu)$  – спектральні інтенсивності випромінювання в шарах у напрямках, що утворюють з віссю  $z_*$  гострий кут  $\beta$  і кут  $\pi - \beta$ ;  $\nu = \cos \beta$ ;  $z_j$  – безрозмірні координати відносно товщин  $h_j$ ;  $a_{\lambda}^{(j)}$  – спектральні коефіцієнти поглинання матеріалів шарів. Будемо вважати, що інтенсивність теплового випромінювання поверхні пропорційна інтенсивності випромінювання абсолютно чорного тіла при температурі  $T_s$ , що визначається за законом Планка, і задається співвідношенням

$$I_{\lambda s} = k \frac{2\pi c_1}{\lambda^5 \exp(c_2 / \lambda T_s - 1)}, \quad k = \text{const}, \quad (2)$$

де  $c_1, c_2$  – відомі сталі [13], а коефіцієнт пропорційності  $k$  (який дозволяє врахувати енергетичні характеристики реального джерела випромінювання) не залежить від напрямку та довжини хвилі, тобто випромінювання поверхні є однорідним і дифузним.

Розв'язок рівняння (1) у шарах можна записати у вигляді

$$I_{\lambda}^{\pm(j)}(z_j, \nu) = I_{\lambda}^{\pm(j)}(b^{\pm}, \nu) \exp\left[\frac{c^{\pm}(z_j - b^{\pm})\theta_{\lambda}^{(j)}}{\nu}\right], \quad (3)$$

де  $I_{\lambda}^{+(j)}(0, \nu), I_{\lambda}^{-(j)}(1, \nu)$  – інтенсивності ефективного випромінювання на поверхнях  $z_j = 0, z_j = 1$ ;  $\theta_{\lambda}^{(j)} = h_j a_{\lambda}^{(j)}$  – оптичні товщини шарів [13];  $b^+ = 0, b^- = 1, c^+ = -1, c^- = 1$ . Вважаємо поверхні шарів дифузно-відбиваючими [13, 22] з коефіцієнтами дифузного відбивання  $R_{\lambda}^{(j)}$ . Тоді, базуючись на умовах балансу всіх потоків випромінювання, що підводяться до поверхонь (у тому числі від випромінюючої поверхні й перевідбитих усередині шарів), а також враховуючи заломлення випромінювання при переході через поверхню контакту для визначення інтенсивностей  $I_{\lambda}^{+(j)}(0, \nu), I_{\lambda}^{-(j)}(1, \nu)$  отримуємо систему чотирьох інтегральних рівнянь типу Фредгольма другого роду:

$$\begin{aligned} I_{\lambda}^{+(1)}(0, \nu) - 2R_{\lambda}^{(1)} \int_0^1 I_{\lambda}^{-(1)}(1, \nu) \nu \exp\left[-\frac{\theta_{\lambda}^{(1)}}{\nu}\right] d\nu = \\ = \begin{cases} n_{\lambda}^{(1)}(1 - R_{\lambda}^{(1)}) I_{\lambda s}(\xi_1), & \nu \leq \nu_{*0}, \\ 0, & \nu > \nu_{*0}, \end{cases} \\ I_{\lambda}^{-(1)}(1, \nu) - 2R_{\lambda}^{(1)} \int_0^1 I_{\lambda}^{+(1)}(0, \nu) \nu \exp\left[-\frac{\theta_{\lambda}^{(1)}}{\nu}\right] d\nu = \\ = \begin{cases} \left(\frac{n_{\lambda}^{(1)}}{n_{\lambda}^{(2)}}\right)^2 (1 - R_{\lambda}^{(2)})^2 I_{\lambda}^{-(2)}(1, \pi - \xi_{12}) \exp\left[\frac{-\theta_{\lambda}^{(2)}}{\pi - \xi_{12}}\right], & \nu \leq \nu_{*1}, \\ 0, & \nu > \nu_{*1}, \end{cases} \\ I_{\lambda}^{+(2)}(0, \nu) - 2R_{\lambda}^{(2)} \int_0^1 I_{\lambda}^{-(2)}(1, \nu) \nu \exp\left[-\frac{\theta_{\lambda}^{(2)}}{\nu}\right] d\nu = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \left( \frac{n_\lambda^{(2)}}{n_\lambda^{(1)}} \right)^2 (1 - R_\lambda^{(1)})^2 I_\lambda^{+(1)}(0, \xi_{21}) \exp \left[ -\frac{\theta_\lambda^{(1)}}{\xi_{21}} \right], & v \leq v_{*2}, \\ 0, & v > v_{*2}, \end{cases}$$

$$I_\lambda^{-(2)}(1, v) = 2R_\lambda^{(2)} \int_0^1 I_\lambda^{+(2)}(0, v) v \exp \left[ -\frac{\theta_\lambda^{(2)}}{v} \right] dv. \quad (4)$$

Тут  $\xi_1 = \arcsin \left( n_\lambda^{(1)} \sqrt{1 - v^2} \right)$ ,  $\xi_{ij} = \arcsin \left[ \frac{n_\lambda^{(i)}}{n_\lambda^{(j)}} \sqrt{1 - v^2} \right]$ ,  $v_{*j} = \cos \beta_{*j}$ ,

$\beta_{*0} = \arcsin \left( \frac{1}{n_\lambda^{(1)}} \right)$ ,  $\beta_{*1} = \arcsin \left( \frac{n_\lambda^{(2)}}{n_\lambda^{(1)}} \right)$ ,  $\beta_{*2} = \arcsin \left( \frac{n_\lambda^{(1)}}{n_\lambda^{(2)}} \right)$ ;  $n_\lambda^{(j)}$  – показники заломлення матеріалів шарів відносно повітря.

Вирази для інтенсивностей  $I_\lambda^{+(j)}(0, v)$ ,  $I_\lambda^{-(j)}(1, v)$  ефективного випромінювання на поверхнях шарів, визначені з системи (4), будуть

$$\begin{aligned} I_\lambda^{+(1)} &= f_\lambda + b_{1\lambda}, & I_\lambda^{-(1)} &= b_{3\lambda} \exp[-\theta_\lambda^{(2)}] + b_{4\lambda}, \\ I_\lambda^{+(2)} &= \frac{n_\lambda^{(2)}}{n_\lambda^{(1)}} (1 - R_\lambda^{(1)}) (f_\lambda + b_{1\lambda}) \exp[-\theta_\lambda^{(1)}] + b_{5\lambda}, & I_\lambda^{-(2)} &= b_{2\lambda}, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} f_\lambda &= n_\lambda^{(1)} (1 - R_\lambda^{(1)}) I_{\lambda s}(\xi_1), & b_{1\lambda} &= 4f_\lambda d_{1\lambda} E_3(\theta_\lambda^{(1)}), \\ b_{2\lambda} &= 2f_\lambda R_\lambda^{(2)} \left( \frac{n_\lambda^{(2)}}{n_\lambda^{(1)}} \right)^2 (1 - R_\lambda^{(1)}) (c_{2\lambda} + c_{4\lambda} d_{1\lambda}) \exp \left[ -\frac{\theta_\lambda^{(1)}}{v} \right], \\ b_{3\lambda} &= 2f_\lambda R_\lambda^{(2)} (1 - R_\lambda^{(1)}) (1 - R_\lambda^{(2)}) [c_{2\lambda} + 4c_{4\lambda} d_{1\lambda} E_3(\theta_\lambda^{(1)})] \exp \left[ -\frac{\theta_\lambda^{(1)}}{v} \right], \\ b_{4\lambda} &= 2f_\lambda R_\lambda^{(1)} [c_{3\lambda} + 4d_{1\lambda} E_3^2(\theta_\lambda^{(1)})], & b_{5\lambda} &= 2R_\lambda^{(2)} b_{2\lambda} E_3(\theta_\lambda^{(2)}), \\ d_{1\lambda} &= \frac{R_\lambda c_{1\lambda} c_{2\lambda} + R_\lambda^{(1)} R_\lambda^{(2)} c_{3\lambda}}{1 - c_{1\lambda} d_{2\lambda}}, & d_{2\lambda} &= R_\lambda c_{4\lambda} E_3(\theta_\lambda^{(1)}), \\ R_\lambda &= R_\lambda^{(1)} R_\lambda^{(2)} (1 - R_\lambda^{(1)}) (1 - R_\lambda^{(2)}), \\ c_{1\lambda} &= \exp \left[ -\frac{\theta_\lambda^{(2)}}{\sqrt{1 - \left( \frac{n_\lambda^{(1)}}{n_\lambda^{(2)}} \right)^2 (1 - v^2)}} - \frac{\theta_\lambda^{(1)}}{v} \right], & c_{2\lambda} &= \left[ 1 - \frac{1}{(n_\lambda^{(2)})^2} \right] E_3 \left( \frac{\theta_\lambda^{(2)}}{\sqrt{1 - \frac{1}{(n_\lambda^{(2)})^2}}} \right), \\ c_{3\lambda} &= \left[ 1 - \frac{1}{(n_\lambda^{(1)})^2} \right] E_3 \left( \frac{\theta_\lambda^{(1)}}{\sqrt{1 - \frac{1}{(n_\lambda^{(1)})^2}}} \right), & c_{4\lambda} &= \left[ 1 - \left( \frac{n_\lambda^{(1)}}{n_\lambda^{(2)}} \right)^2 \right] E_3 \left( \frac{\theta_\lambda^{(2)}}{\sqrt{1 - \left( \frac{n_\lambda^{(1)}}{n_\lambda^{(2)}} \right)^2}} \right), \end{aligned}$$

$E_3(x) = \int_0^1 \mu \exp \left[ -\frac{x}{\mu} \right] d\mu$  – інтегро-експоненціальна функція [13].

За відомими інтенсивностями  $I_\lambda^{\pm(j)}(z_j, v)$  випромінювання у шарах знаходимо об'ємні густини тепловиділень  $Q_j$  в них [3, 6]:

$$Q_j(z_j) = 2\pi \int_0^\infty a_\lambda^{(j)} \left\{ \int_0^1 [I_\lambda^{+(j)}(z_j, v) + I_\lambda^{-(j)}(z_j, v)] dv \right\} d\lambda. \quad (6)$$

Вони є об'ємними джерелами тепла в рівняннях теплопровідності, що описують процеси теплопереносу в складових шарах. Приймаючи густини  $\rho_j$  і теплофізичні характеристики матеріалів цих шарів (коефіцієнти теплопровідності  $\lambda_j$ , теплоємності  $c_{\epsilon j}$ ) усередненими на розглядуваному проміжку нагріву пластини, отримаємо систему рівнянь для визначення в ній температури  $T_j$ ,  $j = 1, 2$ , у вигляді [13, 15]

$$\frac{\partial^2 T_j}{\partial z^2} - \frac{\partial T_j}{\alpha_j \partial t} + \frac{Q_j(z, t)}{\lambda_j} = 0, \quad (7)$$

де  $t$  – час,  $\alpha_j = \lambda_j / (\rho_j c_{\epsilon j})$  – коефіцієнти температуропровідності матеріалів складових частин.

Початковий тепловий стан у пластині (при  $t=0$ ) характеризуємо однорідною за товщиною температурою  $T_0$ . Граничні умови на основах пластини, що описують особливості її теплообміну з зовнішнім середовищем (повітрям, температура якого дорівнює  $T_0$ ) – умови конвективного теплообміну й умови ідеального теплового контакту (рівності теплових потоків і температур), на поверхні розділу складових частин мають вигляд [13, 15, 18, 20]

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial T_1(0, t)}{\partial z} - H_1 [T_1(0, t) - T_0] &= 0, \\ \lambda_2 \frac{\partial T_2(h, t)}{\partial z} + H_2 [T_2(h, t) - T_0] &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial T_1(h_1, t)}{\partial z} &= \lambda_2 \frac{\partial T_2(h_1, t)}{\partial z}, \\ T_1(h_1, t) &= T_2(h_1, t). \end{aligned} \quad (9)$$

Тут  $H_1, H_2$  – коефіцієнти тепловіддачі з основ пластини.

Як показано в роботах [6, 8, 12], при реальних параметрах теплового випромінювання, що визначаються температурою його джерела ( $T_s < 5000$  К,  $k \leq 1$ ), впливом пондеромоторних сил дії випромінювання на напружений стан у частково прозорих тілах можна знехтувати. Тому термонапружений стан пластини будемо пов'язувати з наявністю об'ємних тепловиділень  $Q_j$ , зумовлених поглинанням зовнішнього випромінювання. Тоді компоненти тензора напружень у вільній від зовнішнього силового навантаження на основах  $z = 0, z = h$  пластині знаходимо з температурної задачі теорії пружності [6, 15]. Якщо механічні –  $E_j$  (модулі Юнга),  $\nu_j$  (коефіцієнти Пуассона), і термомеханічні  $\alpha_t^{(j)}$  (коефіцієнти лінійного температурного розширення) характеристики матеріалів шарів прийняти рівними їх усередненим значенням на проміжку нагріву, то, використовуючи обернені до співвідношень Дюгамеля – Неймана співвідношення, що пов'язують компоненти  $E_{\alpha\beta}^{(j)}$ ,  $\alpha, \beta = x, y, z$ , тензора деформації з компонентами  $\sigma_{\alpha\beta}^{(j)}$  тензора напружень у пластині, та умови сумісності деформації [1, 19], систему рівнянь теорії пружності можна записати відносно компонент тензора напружень  $\sigma_{\alpha\beta}^{(j)}$  [1, 6, 19]. При цьому отримаємо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \sigma_{zz}^{(j)}}{\partial z^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^{(j)}}{\partial z^2} - \frac{\nu_j}{1 + \nu_j} \frac{\partial^2 \sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}}{\partial z^2} + \frac{E_j}{1 + \nu_j} \frac{\partial^2 M_j}{\partial z^2} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \sigma_{yy}^{(j)}}{\partial z^2} - \frac{\nu_j}{1 + \nu_j} \frac{\partial^2 \sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}}{\partial z^2} + \frac{E_j}{1 + \nu_j} \frac{\partial^2 M_j}{\partial z^2} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \sigma_{zz}^{(j)}}{\partial z^2} - \frac{1 - \nu_j}{1 + \nu_j} \frac{\partial^2 \sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}}{\partial z^2} - \frac{2E_j}{1 + \nu_j} \frac{\partial^2 M_j}{\partial z^2} &= 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

де  $M_j(T_j) = \alpha_t^{(j)}(T_j - T_0)$ , а  $\sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}$  – перший інваріант тензора напружень. Підсумовуючи перше, друге і третє рівняння для кожного шару, виключимо величини  $\sigma_{\alpha\alpha}^{(j)}$  і систему рівнянь (10) остаточно подамо як

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \sigma_{zz}^{(j)}}{\partial z^2} &= 0, & \frac{\partial^2 \sigma_{xx}^{(j)}}{\partial z^2} + \frac{E_j}{1 - \nu_j} \frac{\partial^2 M_j}{\partial z^2} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \sigma_{yy}^{(j)}}{\partial z^2} + \frac{E_j}{1 - \nu_j} \frac{\partial^2 M_j}{\partial z^2} &= 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Компоненти  $e_{xx}^{(j)}$ ,  $e_{yy}^{(j)}$ ,  $e_{zz}^{(j)}$  тензора деформації за відомими компонентами  $\sigma_{xx}^{(j)}$ ,  $\sigma_{yy}^{(j)}$ ,  $\sigma_{zz}^{(j)}$  тензора напружень визначаються таким чином:

$$\begin{aligned}
e_{xx}^{(j)} &= \frac{1}{E_j} [\sigma_{xx}^{(j)} - \nu_j (\sigma_{yy}^{(j)} + \sigma_{zz}^{(j)})] + M_j, \\
e_{yy}^{(j)} &= \frac{1}{E_j} [\sigma_{yy}^{(j)} - \nu_j (\sigma_{xx}^{(j)} + \sigma_{zz}^{(j)})] + M_j, \\
e_{zz}^{(j)} &= \frac{1}{E_j} [\sigma_{zz}^{(j)} - \nu_j (\sigma_{xx}^{(j)} + \sigma_{yy}^{(j)})] + M_j.
\end{aligned} \tag{12}$$

Інтегруючи рівняння (11) з урахуванням рівнянь рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{zz}^{(j)}}{\partial z} = 0 \tag{13}$$

і граничних умов на основах пластини

$$\sigma_{zz}^{(1)}(0, t) = 0, \quad \sigma_{zz}^{(2)}(h, t) = 0, \tag{14}$$

знайдемо

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{(j)} &= 0, \\
\sigma_{xx}^{(j)} &= -\frac{\alpha_t^{(j)} E_j}{1 - \nu_j} (T_j - T_0) + C_1^{(j)} z + C_2^{(j)}, \\
\sigma_{yy}^{(j)} &= -\frac{\alpha_t^{(j)} E_j}{1 - \nu_j} (T_j - T_0) + C_3^{(j)} z + C_4^{(j)}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Сталі  $C_1^{(j)}, \dots, C_4^{(j)}$  визначаємо при конкретних способах закріплення країв  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $y \rightarrow \pm\infty$  пластини і умовах механічного контакту між складовими шарами. Зокрема, у випадку, коли умови механічного контакту є ідеальними [20]:

$$e_{xx}^{(1)} = e_{xx}^{(2)}, \quad e_{yy}^{(1)} = e_{yy}^{(2)}, \quad \frac{\partial e_{xx}^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial e_{xx}^{(2)}}{\partial z}, \quad \frac{\partial e_{yy}^{(1)}}{\partial z} = \frac{\partial e_{yy}^{(2)}}{\partial z}, \quad (16)$$

а краї  $x \rightarrow \pm\infty$ ,  $y \rightarrow \pm\infty$  вільні від зовнішніх зусиль і моментів:

$$\begin{aligned} \int_0^{h_1} \sigma_{xx}^{(1)} dz + \int_{h_1}^h \sigma_{xx}^{(2)} dz = 0, \quad \int_0^{h_1} (z - h_1) \sigma_{xx}^{(1)} dz + \int_{h_1}^h (z - h_1) \sigma_{xx}^{(2)} dz = 0, \\ \int_0^{h_1} \sigma_{yy}^{(1)} dz + \int_{h_1}^h \sigma_{yy}^{(2)} dz = 0, \quad \int_0^{h_1} (z - h_1) \sigma_{yy}^{(1)} dz + \int_{h_1}^h (z - h_1) \sigma_{yy}^{(2)} dz = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

вирази для постійних будуть

$$\begin{aligned} C_1^{(1)} = C_3^{(1)}, \quad C_2^{(1)} = C_4^{(1)}, \quad C_1^{(2)} = C_3^{(2)}, \quad C_2^{(2)} = C_4^{(2)}, \quad C_4^{(1)} = KC_4^{(2)}, \\ C_3^{(1)} = KC_3^{(2)}, \quad C_3^{(1)} = \frac{A_1 N - A_4 P}{A_2 A_4 - A_1 A_3}, \quad C_4^{(1)} = \frac{A_2 N - A_3 P}{A_2 A_4 - A_1 A_3}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} A_1 = -\frac{1}{2} h_1^2 + \frac{1}{2K} h_2^2, \quad A_2 = -\frac{1}{6} h_1^3 + \frac{1}{6K} (2h^3 - 3h_1 h^2 + h_1^3), \\ A_3 = h_1^2 + \frac{1}{2K} (h^2 - h_1^2), \quad A_4 = h_1 + \frac{1}{2K} h_2, \quad K = \frac{(1 - \nu_2) E_1}{(1 - \nu_1) E_2}, \\ N = \frac{\alpha_t^{(1)} E_1}{1 - \nu_1} \int_0^{h_1} (T_1 - T_0) dz + \frac{\alpha_t^{(2)} E_2}{1 - \nu_2} \int_{h_1}^h (T_2 - T_0) dz, \\ P = \frac{\alpha_t^{(1)} E_1}{1 - \nu_1} \int_0^{h_1} (z - h_1) (T_1 - T_0) dz + \frac{\alpha_t^{(2)} E_2}{1 - \nu_2} \int_{h_1}^h (z - h_1) (T_2 - T_0) dz. \end{aligned}$$

За наведеною схемою розв'язування задачі інтенсивності випромінювання, тепловиділення і характеристики термонапруженого стану в шарах визначали аналітико-числовим методом (з використанням чисельного інтегрування), а обчислення розв'язку сформульованої лінійної крайової задачі про визначення температури в пластині виконано методом скінченних різниць [4, 23].

Числові дослідження розподілів тепловиділень, температури, напружень в пластині проводили для випадків, коли матеріалами складових шарів є скло С95-3 та BS-37А при фіксованій товщині другого шару  $h_2 = 0.01$  м. Як і для більшості частково прозорих тіл, спектральні коефіцієнти поглинання апроксимували кусково-сталими функціями [8, 13, 14, 22]

$$a_\lambda^{(j)} = \begin{cases} a_1^{(j)}, & 0 < \lambda < \lambda_\Pi^{(j)}, \\ a_2^{(j)}, & \lambda_\Pi^{(j)} < \lambda < \infty, \end{cases}$$

де  $\lambda_\Pi^{(j)}$  – порогові довжини хвиль. Спектральні коефіцієнти дифузного відбивання  $R_\lambda^{(j)}$  і показники заломлення  $n_\lambda^{(j)}$  приймали рівними їх середньо-інтегральним значенням  $R^{(j)}$  і  $n^{(j)}$  у спектральному діапазоні  $0 \div 10^{-5}$  м.

Розглядали температури випромінюючої поверхні  $T_s = 1000, 2000, 3000$  К. В усіх випадках інтегральний потік випромінювання від неї у напрямку шарів

$$I_s = \int_0^\infty I_{\lambda,s} d\lambda$$

вибирали однаковим і таким, що дорівнює потоку при  $T_s = 1000$  К за рахунок вибору коефіцієнта  $k$  у співвідношенні (2):  $k = 0.04, 0.0025, 0.0005$  відповідно при  $T_s = 1000, 2000, 3000$  К. При цьому температури в шарах при дії випромінювання розглядуваної інтенсивності протягом 4 год. не перевищують температур трансформації розглядуваних видів скла – 730 і 700 К.

Характеристики матеріалів шарів згідно з [5, 14, 21, 27] вибирали такими:

– скло C95-3

$$R = 0.02, \quad \lambda_{\text{п}} = 2.73 \text{ мкм}, \quad a_1 = 150 \text{ м}^{-1}, \quad a_2 = 900 \text{ м}^{-1},$$

$$\lambda = 1.6 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), \quad \alpha = 8 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}, \quad \alpha_t = 8.8 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1},$$

$$H = 26.4 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}), \quad E = 6.54 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \nu = 0.215;$$

– скло BS-37A

$$R = 0.02, \quad n = 1.66, \quad \lambda_{\text{п}} = 4.80 \text{ мкм}, \quad a_1 = 70 \text{ м}^{-1}, \quad a_2 = 900 \text{ м}^{-1},$$

$$\lambda = 1.38 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}), \quad \alpha = 5.7 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}, \quad \alpha_t = 9.3 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1},$$

$$H = 22.4 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}), \quad E = 1.03 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \quad \nu = 0.277.$$

Розподіли тепловиділень  $Q_*(z) = Q_j(z)/Q(0)$  за товщиною пластини скло C95-3 – скло BS-37A (суцільні лінії) та скло BS-37A – скло C95-3 (штрихові лінії) при товщинах складових шарів  $h_1 = 0.001$  м,  $h_2 = 0.01$  м;  $h_1 = 0.005$  м,  $h_2 = 0.01$  м та  $h_1 = 0.01$  м,  $h_2 = 0.01$  м зображено відповідно на рис. 1–3.

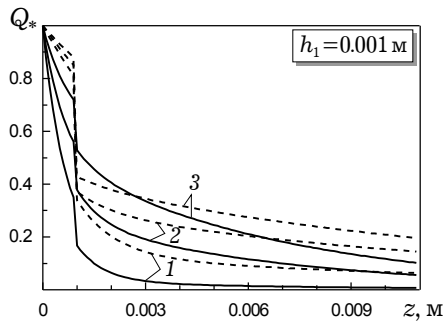


Рис. 1

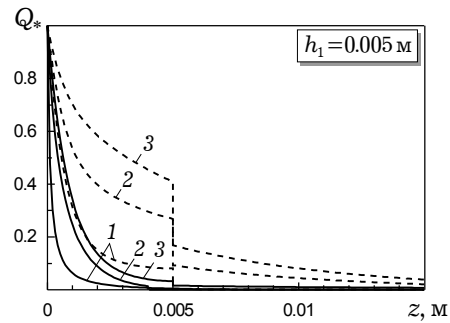


Рис. 2

Тут і надалі лінії 1–3 стосуються температур джерела  $T_s = 1000, 2000, 3000$  К. Видно, що характер розподілу тепловиділень (які зникають углиб пластини) визначається поглинальними властивостями матеріалів складових шарів. Якщо властивості першого шару такі, що випромінювання проникає в другий шар, то на границі розділу наявний скачок тепловиділень, величина якого зростає зі збільшенням температури джерела.

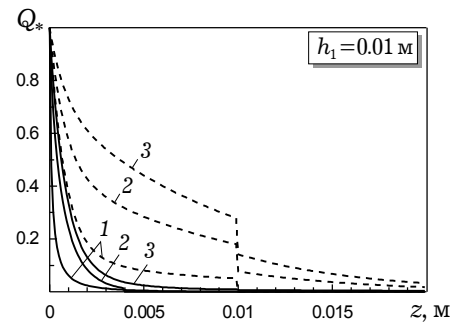


Рис. 3

Відповідні вищенаведеним тепловиділенням, умовам теплообміну (8) та умовам теплового контакту (9) розподіли температури  $T_j$  за товщиною пластини, що виникають в усталеному тепловому режимі ( $t = 4$  год.), показано на рис. 4–6.

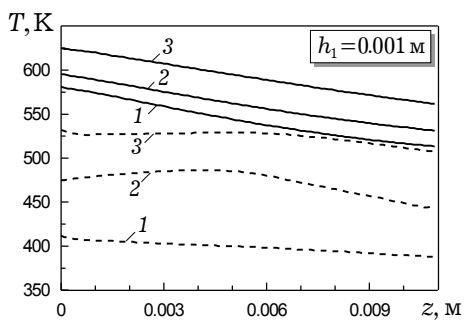


Рис. 4

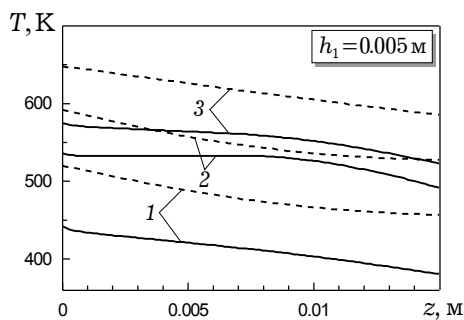


Рис. 5

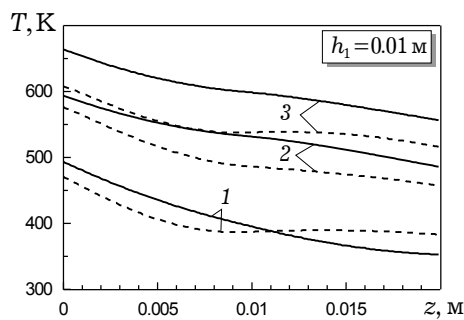


Рис. 6

Бачимо, що характер розподілу температури залежить як від температури  $T_s$  джерела випромінювання, так і від товщин і поглинальних властивостей складових шарів. При температурах джерела  $1000 \div 3000$  К нерівномірність нагріву зростає зі збільшенням товщини  $h = h_1 + h_2$  пластини. Для пластини скло С95-3 – скло BS-37А (коефіцієнти поглинання скла С95-3 вищі від коефіцієнтів поглинання скла BS-37А), як і для однорідної пластини [8, 10, 28], при всіх розглядуваних товщинах температура зменшується углиб, а її перепад по товщині зростає з пониженням температури джерела від 3000 до 1000 К. Для шару скло BS-37А – скло С95-3 найбільший перепад температури по товщині має місце при температурі джерела 2000 К (штрихові лінії 2 на рис. 4–6). Крім того, на відміну від однорідної пластини, при температурах джерела 2000, 3000 К максимум температури досягається на певній глибині (залежно від товщини складової зі скла С95-3), зокрема, в околі поверхні контакту (штрихові лінії 2, 3 на рис. 4, 5). При незначних товщинах скла С95-3 ( $h_1 < 0.005$  м) можна досягнути практично рівномірного нагріву по товщині джерелами з температурою 3000 К (штрихові лінії 3 на рис. 4, 5), а при товщинах  $h_1 < 0.001$  м – джерелами з температурою 1000 К.

Рис. 7–9 ілюструють розподіли за товщиною (в усталеному тепловому режимі) компонент  $\sigma = \sigma_{xx} = \sigma_{yy}$  тензора температурних напружень у пластині, краї якого вільні від зусиль і моментів, тобто для якої виконуються умови (17).

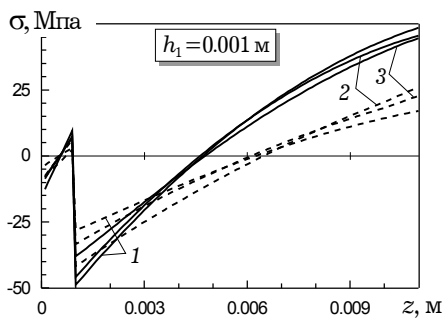


Рис. 7

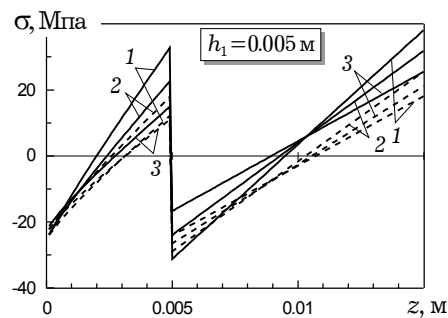


Рис. 8



Отримано, що для пластини скло С95-3-скло BS-37А максимальні рівні розтягувальних і стискувальних напружень, як і для однорідної пластини, зростають зі зниженням температури джерела  $T_s$  від 3000 до 1000 К. Максимальні стискувальні напруження виникають в околі  $z = h_1 + 0$  поверхні контакту, а розтягувальні – біля основи  $z = h$  (рис. 7, 8). Вони зміщуються до основи  $z = 0$  та околу поверхні контакту  $z = h_1 - 0$  при збільшенні товщини першого складового шару (рис. 9).

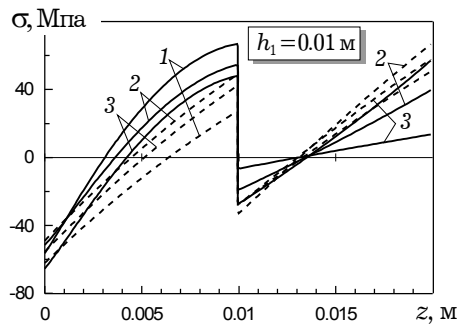


Рис. 9

При певних його товщинах рівень розтягувальних напружень (суцільна крива 1 на рис. 9) може досягати допустимого значення (для скла С95-3 допустимі напруження становлять: стискувальні 750 ÷ 900 МПа і розтягувальні 60 ÷ 100 МПа [21, 27]. Для шару скло BS-37А – скло С95-3 максимальні рівні розтягувальних і стискувальних напружень досягаються при температурі джерела 2000 К. Характер розподілу стискувальних напружень у цьому випадку такий же, як і в пластині скло С95-3 – скло BS-37А. Розтягувальні напруження при всіх розглядуваних товщинах пластини виникають в околі основи  $z = h$  і також (при певних товщинах шару зі скла BS-37А) досягають допустимих значень (штрихова лінія 2 на рис. 9).

Отримані результати можуть бути використані при вдосконаленні існуючих і розробці нових технологій термообробки виробів шаруватої структури з частково прозорих матеріалів за допомогою теплового випромінювання, а також для прогнозування термомеханічної поведінки таких виробів при експлуатації за умов дії теплового випромінювання.

1. Амензаде Ю. А. Теория упругости. – Москва: Высш. шк., 1976. – 272 с.
2. Будз С. Ф., Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Сосновий Ю. Р. Спосіб термовакуумної обробки електровакуумних приладів // Деклараційний патент України 45183 А на винахід від 15.03.2002 р. (Заявка 2001064014. Рішення від 27.11.2001 р.) – Опубл. 15.03.2002 р. Бюл. № 3.– С. 1–3.
3. Бурак Я. Й, Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф. Термомеханіка тіл низької електропровідності при дії електромагнітного випромінювання інфрачервоного діапазону // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 6. – С. 39–43.
4. Волков Е. А. Численные методы. – Москва: Наука, 1982. – 256 с.
5. Воронкова Е. М., Гречушников Б. Н., Дистлер Г. И., Петров И. П. Оптические материалы для инфракрасной техники. – Москва: Наука, 1965. – 335 с.
6. Гачкевич А. Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. – Киев: Наук. думка, 1992. – 192 с.
7. Гачкевич А. Р., Драбык В. О., Малкиель Б. С., Терлецький Р. Ф. Термонапряженное состояние стеклооболочки кинескопа при нагреве электромагнитным излучением // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1991. – Вып. 33. – С. 31–35.
8. Гачкевич А. Р., Курницький Т. Л., Терлецький Р. Ф. Напряженное состояние в стеклянных телах при их дегазации с использованием нагрева инфракрасным излучением // Прикл. механика и техн. физика. – 2002. – 43, № 2. – С. 155–165.
9. Гачкевич О. Р., Гуменчук О. Б. Термопружний стан скляної порожнистої кулі, що знаходиться під дією зовнішнього електромагнітного випромінювання // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1998. – № 341. – С. 82–92.
10. Гачкевич О. Р., Курницький Т. Л., Терлецький Р. Ф. Механотермодифузійні процеси в напівпрозорому твердому шарі при дії теплового інфрачервоного випромінювання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – 41, № 3. – С. 121–131.
11. Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф., Сосновий Ю. Р. Деякі проблеми вакуумних технологій виробництва чорно-білих і кольорових кінескопів // Вопр. атомної науки і техніки. Сер. Ядерно-физ. исследования (Теория и эксперимент). – 1994. – Вып. 1 (27). – С. 47–50.

12. *Гачкевич О. Р., Терлецький Р. Ф.* Математичне моделювання механотермодифузійних процесів у частково прозорих деформівних твердих тілах з газовими домішками за умов дії електромагнітного випромінювання світлового діапазону частот // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2003. – **46**, № 1. – С. 151–164.
13. *Зигель Р., Хауэлл Д.* Теплообмен излучением. – Москва: Мир, 1975. – 935 с.
14. *Излучательные свойства твердых материалов: Справочник / Под ред. А. Е. Шейдлина.* – Москва: Энергия, 1974. – 471 с.
15. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 307 с.
16. *Колтун М. М.* Солнечные элементы. – Москва: Наука, 1987. – 192 с.
17. *Кочубей Г. С.* Потери мощности солнечных батарей высокоорбитальных космических аппаратов при длительном воздействии потоков газа, плазмы и излучения // *Техн. механика.* – 2004. – № 2. – С. 64–70.
18. *Крейт Ф., Блэк У.* Основы теплопередачи. – Москва: Мир, 1983. – 512 с.
19. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. – Москва: Мир, 1970. – 256 с.
20. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В.* Термоупругость электропроводных тел. – Киев: Наук. думка, 1977. – 248 с.
21. *Производство цветных кинескопов / Под ред. В. И. Барановского.* – Москва: Энергия, 1978. – 366 с.
22. *Рубцов Н. А.* Теплообмен излучением в сплошных средах. – Новосибирск: Наука, 1984. – 277 с.
23. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1989. – 616 с.
24. *Степаньянц Ю. Р., Морозов М. В.* Экспериментальное исследование скоростей нагрева оболочки ЦЭЛТ при обезгаживании лучевым способом // *Оборудование электронного машиностроения, технология и робототехника: Межвуз. сб. научн. тр.* – Москва: МИЭМ, 1984. – С. 81–86.
25. *Терлецький Р. Ф., Похмурская А. В.* Температурные поля и напряжения в полупрозрачной полой сфере при нагреве электромагнитным излучением // *Материалы XI-й конф. молодых ученых Ин-та прикл. пробл. механики и математики АН УССР (Львов, 1–3.10. 1985).* – Ч. II. – С. 155–161. – Деп. в ВИНТИ 17.02.87, № 1089-В.
26. *Тидекен Р.* Волоконная техника и ее применение. – Москва: Мир, 1975. – 240 с.
27. *Эспе В.* Технология электровакуумных приборов: В 3 т. – Москва: Энергия, 1968. – Т. 2. – 448 с.
28. *Gachkevich A., Kournyts'kyi T., Terletskii R.* Investigation of molecular gas admixture diffusion, heat transfer and stress state in amorphous solid subjected to thermal infrared radiation // *Int. J. Eng. Sci.* – 2002. – **40**. – P. 829–857.
29. *Ho C. H., Ozisik M. N.* Combined conduction and radiation in a two-layer planar medium with flux boundarycondition // *Numyk. Heat Transfer.* – 1987. – **11**. – P. 321–340.
30. *Ho C. H., Ozisik M. N.* Simultaneous conduction and radiation in a two-layer planar medium // *J. Thermophys. Heat Transfer.* – 1987. – **1**, № 2. – P. 154–161
31. *Rubtsov N. A., Timmerman E. B.* Thermoelastic processes in semitransparent material under the condition of interaction between thermal and strain fields // *Numer. Heat Transfer.* – 1992. – **21**. – P. 249–260.
32. *Siegel R.* Transient effects of radiative transfer in semitransparent materials // *Int. J. Eng. Sci.* – 1998. – **36**. – P. 1701–1739.
33. *Siegel R.* Transient thermal analysis of parrallel translucent layers by using Green's functions // *J. Thermophys. Heat Transfer.* – 1999. – **13**, No. 1. – P. 10–17.
34. *Siegel R.* Two flux Green's function analysis for transient spectral radiation in a composite // *J. Thermophys. Heat Transfer.* – 1996. – **10**. – P. 681–688.
35. *Tan H. P., Wang P. Y., Xia X. L.* Transient coupled radiation and conduction in an absorbing and scattering composite layer // *J. Thermophys. Heat Transfer.* – 2000. – **14**, No. 1. – P. 77–87.
36. *Timoshenko V. P., Trener M. G.* A method for evaluating heat transfer in multilayer semitransparent materials // *Heat Transfer – Soviet Research.* – 1986. – **18**. – P. 321–340.
37. *Tsai C.-F., Nixon G.* Transient temperature distribution of a multilayer composite wall with effects of internal thermal radiation and conduction // *Numer. Heat Transfer.* – 1986. – **10**. – P. 95–101.
38. *Wang P.-Y., Cheng H.-E., Tan H.-P.* Transient thermal analysis of semitransparent composite layer with an opaque boundary // *Int. J. Heat Mass Transfer.* – 2002. – **45**. – P. 425–440.

### **ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЧАСТИЧНО ПРОЗРАЧНОЙ СЛОИСТОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ТЕПЛОВОМ ОБЛУЧЕНИИ**

*При идеальном тепловом и механическом контактах составных частей исследованы характеристики тепловых процессов и напряженное состояние в частично прозрачной слоистой пластине, вызванные действием теплового излучения от параллельной к ней нагретой поверхности. Изучены закономерности в распределении тепловыделений, температуры и компонент тензора напряжений в пластине в зависимости от температуры источника излучения.*

### **THERMOELASTIC STATE OF SEMI-TRANSPARENT COMPOSITE LAYER UNDER THERMAL RADIATION**

*The characteristics of thermal processes and stress state in a semi-transparent composite layer assuming ideal thermal and mechanical contacts between the layers are investigated. A composite is subjected to thermal radiation from a heated surface parallel to a composite surface. Dependences of heat sources, temperature and stresses in the layer on the radiation source temperature are studied.*

Ин-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
27.05.05