УДК 517.95

А. О. Лопушанський

ЧИСЛЕННЯ СЕКТОРІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ З ВІД'ЄМНИМ ТИПОМ І КОМПЛЕКСНІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ШКАЛИ

Описано властивості степеневої півгрупи в класі секторіальних операторів з від'ємним типом. Встановлено, що однопараметрична шкала областей визначення $V_\vartheta = D((-J)^\vartheta)$, $\vartheta > 0$, для секторіального оператора J співпадає із інтерполяційною шкалою, породженою комплексним методом Ліонса – Кальдерона.

У цій роботі досліджуються властивості однопараметричної півгрупи в класі секторіальних операторів з від'ємним типом. Вводиться поняття правильного проміжного простору для банахової пари секторіального оператора, досліджується збурення такого оператора на правильному проміжному просторі, будується шкала правильних проміжних просторів областей визначення $V_\vartheta = D((-J)^\vartheta)$, $\vartheta > 0$ для секторіального оператора J. Показано, що ця шкала співпадає з інтерполяційною шкалою, породженою комплексним методом Ліонса – Кальдерона [4–6]. Робота є безпосереднім продовженням праці автора [2] і використовуються прийняті там позначення. Без спеціального нагадування використовуються поняття з відомих монографій [1, 3, 7].

1. Нехай $l_\omega := \{re^{i\omega} : r \ge 0\}$ – промінь із заданим кутом $\omega \in [0, 2\pi]$ і фіксованому куту $\omega_0 \in (\pi/2, \pi)$ зіставлено в $\mathbb{C}$ замкнений сектор $\Lambda := \{l_\omega : \omega \in \in [-\omega_0, \omega_0]\}$. Для заданої пари комплексних банахових просторів $(V_0, \|\cdot\|_0)$ та $(V_1, \|\cdot\|_1)$ з неперервним і щільним вкладенням $E_{10} : V_1 \to V_0$ розглядаємо множину секторіальних операторів

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} := \left\{ A \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(V_1; V_0) : \sup_{\lambda \in \Lambda} \left\| (\lambda E_{10} - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0; V_1)} := K(A) < \infty \right\}$$

від'ємного типу $r(A) := \sup \{\mathrm{Re}\,\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$. Нехай $E_{00} : V_0 \mapsto V_0$ – одиничний оператор в алгебрі $\boldsymbol{\mathcal{L}}(V_0)$. У резольвентній множині $\rho(A) := \{\lambda : : (\lambda E_{10} - A)^{-1} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(V_0; V_1)\}$ є визначеною та аналітичною функція $R(\lambda, A) := := E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1} \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(V_0)$. Зрозуміло, що існує залежне від A число a таке, що $0 < a < -r(A)$ і $\Lambda_a \subset \rho(A)$, де $\Lambda_a := \Lambda \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le a\}$. Для будь-якого оператора $A \in \mathcal{A}$ контур $\Gamma_{a,\omega} := \Gamma^+_{a,\omega} \cup \Gamma^-_{a,\omega} \cup \Gamma^0_a \subset \rho(A)$ обходить спектр оператора $\sigma(A)$ в додатному напрямку, якщо $\omega : \omega_0 - c \le \omega \le \omega_0$ і $\Gamma^+_{a,\omega} := = \{re^{i\omega} : r \ge a\}$, $\Gamma^-_{a,\omega} := \{re^{-i\omega} : r \ge a\}$, $\Gamma^0_a := \{ae^{i\tau} : \tau \in [\omega, 2\pi - \omega]\}$.

Банахів комплексний простір $(U, \|\cdot\|_U)$ називають *проміжним* для пари банахових просторів $\{V_0; V_1\}$, якщо правильні неперервні (не обов'язково щільні) вкладення $V_1 \subset U \subset V_0$. Проміжний простір U для пари $\{V_0; V_1\}$ будемо називати *правильним*, якщо виконується одна з двох умов:

(***a***) $\quad U = V_1$

або

(***b***) $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_\varepsilon > 0 : \ \|x\|_U \le \varepsilon \|x\|_1 + C_\varepsilon \|x\|_0 \qquad \forall x \in V_1$.

Зрозуміло, що простір $U = V_0$ також буде правильним проміжним для пари $\{V_0; V_1\}$. Таким чином, правильними проміжними будуть обидва крайні простори пари V_0 і V_1, а також усі такі, що задовольняють умову (***b***) наведеного означення.

Твердження 1. *Нехай* U *– правильний проміжний банахів простір для пари банахових просторів* $\{V_0; V_1\}$. *Тоді для будь-якого оператора* $A \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ *існує таке число* $\delta > 0$, *що для всіх операторів* $X \in \boldsymbol{\mathcal{L}}(U; V_0)$, *для яких* $\| X \|_{\mathcal{L}(U;V_0)} < \delta$, *виконуються умови*

$$A + X\Big|_{V_1} \in A, \qquad \Lambda \subset \rho(A) \bigcap \rho(A + X),$$

та справджується нерівність

$$\| R(\lambda, A + X) \|_{\mathcal{L}(V_0)} \le 2 \| R(\lambda, A) \|_{\mathcal{L}(V_0)} \qquad \forall \lambda \in \Lambda. \qquad (1)$$

Д о в е д е н н я. Випадок $U = V_1$ розглянуто в роботі [2]. Тому нехай простір U задовольняє умову (***b***) означення правильного проміжного простору. Зафіксуємо довільне число $a > 0$ і розглянемо оператор вкладення $E_{1U} : V_1 \mapsto U$. Для будь-яких чисел $\varepsilon > 0$ і всіх елементів $x \in V_0$ згідно з [2, твердження 1] існує така стала $C > 0$, що

$$\left\| E_{1U}(\lambda E_{10} - A)^{-1} x \right\|_U \le \varepsilon \left\| (\lambda E_{10} - A)^{-1} x \right\|_1 + C_\varepsilon \| R(\lambda, A) x \|_0 \le$$

$$\le C\left(\varepsilon + \frac{C_\varepsilon}{|\lambda|} \right) \| x \|_0 \le C\left(\varepsilon + \frac{C_\varepsilon}{a} \right) \| x \|_0$$

або

$$\left\| E_{1U}(\lambda E_{10} - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0;U)} \le C\left(\varepsilon + \frac{C_\varepsilon}{a} \right) \qquad \forall \lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda \in C : |\lambda| \le a\}.$$

З іншого боку, очевидно, маємо

$$\left\| E_{1U}(\lambda E_{10} - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0;U)} \le \| E_{1U} \|_{\mathcal{L}(V_1;U)} \left\| (\lambda E_{10} - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} \le$$

$$\le K(A) \| E_{1U} \|_{\mathcal{L}(V_1;U)} \qquad \forall \lambda \in \Lambda \bigcap \{\lambda \in C : |\lambda| \le a\},$$

тобто існує така стала

$$K'(A) := \max\left\{ K(A) \| E_{1U} \|_{\mathcal{L}(V_1;U)} ;\; C\left(\varepsilon + \frac{C_\varepsilon}{a} \right) \right\},$$

що

$$\left\| E_{1U}(\lambda E_{10} - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0;U)} \le K'(A) \qquad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Повторимо тепер основні фрагменти доведення твердження 1 з [2], заміняючи в них функцію $X(\lambda E_{10} - A)^{-1}$ на $XE_{1U}(\lambda E_{10} - A)^{-1}$. З нерівності

$$\left\| XE_{1U}(\lambda E_{10} - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \| X \|_{\mathcal{L}(U;V_0)} \left\| E_{1U}(\lambda E_{10} - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0;U)}$$

випливає, що при $\| X \|_{\mathcal{L}(U;V_0)} \le 1/2K'(A)$ у банаховій алгебрі $\mathcal{L}(V_0)$ збігається ряд

$$\left[E_{00} - XE_{1U}(\lambda E_{10} - A)^{-1} \right]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} [XE_{1U}(\lambda E_{10} - A)^{-1}]^k,$$

при цьому справджується оцінка $\left\| \left[E_{00} - XE_{1U}(\lambda E_{10} - A)^{-1} \right]^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le 2$ для всіх $\lambda \in \Lambda$. Звідси та з тотожності

$$(\lambda E_{10} - A - XE_{1U})^{-1} = (\lambda E_{10} - A)^{-1} \left[E_{00} - XE_{1U}(\lambda E_{10} - A)^{-1} \right]^{-1}$$

випливає нерівність

$$\left\| (\lambda E_{10} - A - XE_{1U})^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0;U)} \le 2 \left\| (\lambda E_{10} - A)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)}$$

для всіх $\lambda \in \Lambda$ та всіх $X \in \mathcal{L}(U; V_0)$ з околу $\| X \|_{\mathcal{L}(U;V_0)} \le 1/2K'(A)$. Звідси так само, як і вище, відразу отримуємо твердження: для будь-якого оператора $A \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ його окіл

$$\{X \in \mathcal{L}(V_1; V_0) : \| X \|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)} \le \delta(A) = 1/2K'(A)\}$$

міститься в $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Твердження доведено. ◊

2. Зафіксуємо деякий оператор $J \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$. Для будь-якого числа $\vartheta > 0$ функція

$$\mathbb{C} \setminus [0, +\infty) \ni \lambda \mapsto (-\lambda)^{-\vartheta} = e^{-\vartheta \ln(-\lambda)},$$

де вибрана гілка функції $\ln(-\lambda)$ задовольняє умову $\ln(1) = 0$, належить означеній у [2] алгебрі $\mathcal{H}(\Lambda^c)$ голоморфних в $\Lambda^c := \mathbb{C} \setminus \left[\{l_\omega : \omega \in [-\omega_0 + c, \omega_0 - c]\} \cup \{0\}\right]$ і неперервних у замиканні з виколотою точкою $\bar{\Lambda}^c \setminus \{0\}$ функцій. Тому згідно з твердженням 2 з [2] можемо означити дробові степені оператора

$$(-J)^{-\vartheta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{R(\lambda, J)}{(-\lambda)^{\vartheta}} d\lambda \in \mathcal{L}(V), \tag{2}$$

де інтеграл не залежить від вибору числа $a : 0 < a < -r(A)$ і кута $\omega : \omega_0 - c \le \le \omega \le \omega_0$. Сім'я операторів $(-J)^{-\vartheta}$ має півгрупову властивість

$$(-J)^{-\vartheta}(-J)^{-\vartheta'} = (-J)^{-\vartheta-\vartheta'} \qquad \forall\ \vartheta, \vartheta' > 0. \tag{3}$$

Справді, для будь-яких $0 < a' < a < r(A)$ та $\omega_0 - c \le \omega < \omega' \le \omega_0$, маємо

$$\begin{aligned}(-J)^{-\vartheta}(-J)^{-\vartheta'} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_{a,\omega}} \int_{\Gamma_{a',\omega'}} \frac{R(\lambda, J) R(\mu, J)}{(-\lambda)^{\vartheta}(-\mu)^{\vartheta'}} d\lambda\, d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{R(\lambda, J)}{(-\lambda)^{\vartheta}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a',\omega'}} \frac{d\mu}{(-\mu)^{\vartheta'}(\mu - \lambda)} \right] d\lambda - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a',\omega'}} \frac{R(\mu, J)}{(-\mu)^{\vartheta'}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{d\lambda}{(-\lambda)^{\vartheta'}(\mu - \lambda)} \right] d\mu = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{R(\lambda, J)}{(-\lambda)^{\vartheta+\vartheta'}} d\lambda = (-J)^{-\vartheta-\vartheta'},\end{aligned}$$

оскільки за теоремою Коші

$$(-\lambda)^{\vartheta'} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a',\omega'}} \frac{d\mu}{(-\mu)^{\vartheta'}(\mu - \lambda)}, \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{a,\omega}} \frac{d\lambda}{(-\lambda)^{\vartheta'}(\mu - \lambda)} = 0,$$

де контур $\Gamma_{a,\omega}$ знаходиться всередині контуру $\Gamma_{a',\omega'}$, а тому для всіх $\mu \in \in \Gamma_{a',\omega'}$ підінтегральна функція є аналітичною і прямує до нуля на безмежності всередині $\Gamma_{a,\omega}$.

Оператор $(-J)^{-\vartheta}$ є оборотним. Справді, якщо $(-J)^{-\vartheta} x = 0$ для деякого елемента $x \in V_0$, то, беручи в отриманій рівності $\vartheta' = n \in \mathbb{N}$, для всіх $n > \vartheta$ будемо мати

$$(-J)^{-n} x = (-J)^{-(n-\vartheta)}(-J)^{-\vartheta} x = 0.$$

Звідси випливає, що $x = 0$. Отже, побудований оператор $(-J)^{-\vartheta} \in \mathcal{L}(V_0)$ має нульове ядро, а тому існує замкнений обернений

$$(-J)^{\vartheta} := [(-J)^{-\vartheta}]^{-1} : V_{\vartheta} \mapsto V_0,$$

де через V_{ϑ} тут і всюди далі позначено його область визначення, наділену нормою графіка

$$\| x \|_{\theta} := \left\| (-J)^{\vartheta} x \right\|_0 \qquad \forall x \in V_{\vartheta}.$$

За теоремою про замкнений графік із замкненості $(-J)^{\vartheta}$ випливає, що отриманий простір $(V_{\vartheta}, \| \cdot \|_{\theta})$ є банаховим. За теоремою про обернений оператор норма $\| x \|_{\vartheta} = \| (-J)x \|_0$, $x \in V_1$, породжена оператором J на просторі V_1, при $\vartheta = 1$ еквівалентна заданій. Очевидно, що вкладення $V_{\vartheta} \subset V_0$ неперервні. З того, що ядро оператора $(-J)^{-\vartheta}$ нульове, випливає щільність вкладення $V_{\vartheta} \subset V_0$.

Крім того, оскільки функціональне числення визначає обмежені оператори над банаховою парою $V = \{V_0; V_1\}$ [2, твердження 2], то звуження оператора $(-J)^{-\vartheta}$ на підпростір V_1 належить алгебрі $\mathcal{L}(V_1)$. Дослівно застосовуючи до підпростору V_1 попередні міркування, переконуємося, що звужений оператор $(-J)^{-\vartheta}_{|V_1}$ також має нульове ядро, а тому існують замкнений обернений і його композиція з $(-J)$:

$$\left[(-J)^{-\vartheta}_{|V_1}\right]^{-1} : V_{\vartheta+1} \mapsto V_1,$$

$$(-J)^{\vartheta+1} := (-J)\left[(-J)^{-\vartheta}_{|V_1}\right]^{-1} : V_{\vartheta+1} \mapsto V_0.$$

Тут через $V_{\vartheta+1}$ позначено область визначення оператора $(-J)^{\vartheta+1}$, наділену нормою графіка

$$\| x \|_{\vartheta+1} := \left\| (-J)^{\vartheta+1} x \right\|_0 \qquad \forall x \in V_{\vartheta+1}.$$

Продовжуючи рекурентно цю конструкцію, можемо означити замкнені оператори $(-J)^{\vartheta+n}$ та банахові простори $V_{\vartheta+n}$ для довільного $n \in \mathbb{N}$:

$$(-J)^{\vartheta+n} := (-J)^n \left[(-J)^{-\vartheta}_{|V_1}\right]^{-1} : V_{\vartheta+n} \mapsto V_0,$$

$$\| x \|_{\vartheta+n} := \left\| (-J)^{\vartheta+n} x \right\|_0 \qquad \forall x \in V_{\vartheta+n}.$$

Коли $\vartheta = 1$, отримуємо банахові простори V_{1+n} для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Твердження 2. *Нехай задано оператори* $J, A \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$ *і банахів простір* $V_{\vartheta} : 0 < \vartheta \leq 1$ *є областю визначення оператора* $(-J)^{\vartheta}$.

(***i***) *Якщо* $0 < \alpha < \beta \leq 1$, *то існує така стала* $C > 0$, *що для будь-якого числа* $\varepsilon > 0$ *справджується нерівність*

$$\| x \|_{\alpha} \leq \varepsilon \| x \|_{\beta} + C\varepsilon^{\alpha/(\alpha-\beta)} \| x \|_0 \qquad \forall x \in V_{\beta}. \tag{4}$$

Зокрема, є неперервними та щільними вкладення

$$V_1 \subset V_{\beta} \subset V_{\alpha} \subset V_0, \tag{5}$$

де проміжні простори V_{α} *для пари* $\{V_{\beta}; V_0\}$ *є правильними й виконують-*

ся нерівності

$$\| x \|_{\alpha} \le C' \| x \|_{\beta}^{\alpha/\beta} \| x \|_{0}^{1-\alpha/\beta} \qquad \forall x \in V_{\beta}\,, \tag{6}$$

де $C' > 0$ *– деяка стала, яка залежить від* α *і* β.

(***ii***) *Нехай* $0 \le \alpha \le 1$. *Тоді існує така стала* $C'' > 0$, *що виконується нерівність*

$$\left\| \left(\lambda E_{10} - \frac{A}{s} \right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0; V_\alpha)} \le \frac{C'' s^{\alpha}}{|\lambda|^{1-\alpha}} \qquad \forall \lambda \in \Lambda \setminus \{0\}, \qquad \forall s > 0\,. \tag{7}$$

Д о в е д е н н я. Перевіримо спочатку вкладення (5). Якщо $x \in V_\beta$, то з (3) випливає, що

$$x = (-J)^{-\beta} (-J)^{\beta} x = (-J)^{-\alpha - (\beta - \alpha)} (-J)^{\beta} x = (-J)^{-\alpha} (-J)^{-(\beta-\alpha)} (-J)^{\beta} x \in V_{\alpha}\,.$$

Зауважимо, що формула (2) для всіх чисел $0 < \vartheta \le 1$ не залежить від зміни кута ω у ширшому проміжку $\omega : 0 < \omega \le \omega_0$, ніж це одержуємо з твердження 2 з [2]. Це випливає з аналітичності підінтегральної функції у комплексній площині з розрізом $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ і нерівності

$$\left\| \frac{R(\lambda, J)}{(-\lambda)^{\vartheta}} \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le \frac{c}{|\lambda|^{1+\vartheta}} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)\,, \tag{8}$$

у якій стала $c > 0$ взята з [2, твердження 1]. Справді, з оцінки (8) випливає абсолютна збіжність інтеграла у формулі (2) по будь-якому з контурів $\Gamma_{a,\omega} \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ і можливість застосувати теорему Коші, згідно з якою

$$\left(\int\limits_{\Gamma_{a',\omega'}} - \int\limits_{\Gamma_{a,\omega}} \right) \frac{R(\lambda, J)}{(-\lambda)^{\vartheta}}\, d\lambda = 0, \qquad 0 < a \le a', \qquad \omega \le \omega'.$$

Користуючись незалежністю від ω, можна перейти в формулі (2) до границі при $\omega \to +0$ та $a \to +0$. Інтегруючи по граничному контуру $(+\infty, a] \bigcup \{ a e^{i\tau} : 0 < \tau < 2\pi \} \bigcup [a, +\infty)$, де $a \to +0$, отримуємо еквівалентне зображення Като для дробових степенів оператора

$$(-J)^{-\vartheta} = \frac{\sin \pi\vartheta}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{R(r, J)}{r^{\vartheta}}\, dr \in \mathcal{L}(V_j), \qquad 0 < \vartheta < 1, \qquad j = 0, 1\,. \tag{9}$$

Із (9) при $0 < \vartheta = \alpha < 1$ для $x \in V_1$ випливає

$$\left\| (-J)^{\alpha} x \right\|_0 = \left\| (-J)^{\alpha - 1} (-J) x \right\|_0 = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left\| \int\limits_0^{+\infty} \frac{R(r, J) J x}{r^{1-\alpha}}\, dr \right\|_0 \le$$

$$\le \frac{\sin \pi\vartheta}{\pi} \left[\int\limits_0^{\delta} \frac{\| J R(r, J) x \|_0}{r^{1-\alpha}}\, dr + \int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{\left\| (-J)^{1-\beta} R(r, J) (-J)^{\beta} x \right\|_0}{r^{1-\alpha}}\, dr \right]. \tag{9'}$$

Для чисел $\beta : \alpha < \beta < 1$ згідно з нерівністю (8) маємо

$$\left\| (-J)^{1-\beta} R(r, J) \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left\| \int\limits_0^{+\infty} \frac{R(s, J) R(r, J)}{s^{1-\beta}}\, ds \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le$$

$$\le \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \left[\int\limits_0^{r} \frac{\| R(s, J) \|_{\mathcal{L}(V_0)} \| R(r, J) \|_{\mathcal{L}(V_0)}}{s^{1-\beta}} ds + \right.$$

$$\left. + \int\limits_r^{+\infty} \frac{\| R(s, J) \|_{\mathcal{L}(V_0)} \| R(r, J) \|_{\mathcal{L}(V_0)}}{s^{1-\beta}}\, ds \right] \le$$

$$\le \frac{c^2 \sin\pi\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{r}\int\limits_0^r \frac{ds}{s^{1-\beta}} + \int\limits_r^{+\infty} \frac{ds}{s^{2-\beta}}\right] = \frac{c^2 \sin\pi\alpha}{\pi r^{1-\beta}\,\beta(1-\beta)}.$$

Крім цього, за тотожністю $JR(r,J) = rR(r,J) - E_{00}$ маємо

$$\|JR(r,J)\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le 1 + K(J),$$

де $K(J)$ − стала з означення класу $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Підставляючи останні дві нерівності в (9′), отримуємо оцінку

$$\left\|(-J)^{\alpha} x\right\|_0 \le \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left[(1+K(J))\,\|x\|_0 \int\limits_0^{\delta} \frac{dr}{r^{1-\alpha}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\,\frac{c^2 \left\|(-J)^{\beta} x\right\|_0}{\beta(1-\beta)} \int\limits_{\delta}^{+\infty} \frac{dr}{r^{1-\alpha+\beta}}\right] =$$

$$= \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left[(1+K(J))\,\|x\|_0\,\frac{\delta^{\alpha}}{\alpha} + \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\,\frac{c^2 \left\|(-J)^{\beta} x\right\|_0}{\beta(1-\beta)}\,\frac{\delta^{\alpha-\beta}}{\beta-\alpha}\right].$$

Звідси отримуємо нерівність (4) для всіх елементів $x \in V_1$, якщо в (4) взяти

$$\varepsilon = \delta^{\alpha-\beta}\left[\frac{c^2 \sin^2\pi\alpha}{\pi^2\beta(1-\beta)(\beta-\alpha)}\right],$$

$$C = \frac{1+K(J)}{\alpha}\left(\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\right)^{(\beta+\alpha)/(\beta-\alpha)}\left[\frac{c^2}{\beta(1-\beta)(\beta-\alpha)}\right]^{\alpha/(\beta-\alpha)}.$$

Зазначимо, що довільність у виборі чисел $\varepsilon > 0$ досягається за рахунок довільного вибору $\delta > 0$, а також того, що стала C не залежить від ε.

Для $\beta = 1$ нерівність (4) доводиться подібно.

З нерівності (4) для елементів $x \in V_1$ і неперервності вкладення $V_1 \subset V_0$ випливає неперервність вкладення $V_1 \subset V_\alpha$. Справді, якщо $V_1 \ni x_n \xrightarrow{V_1} x \in V_1$, то з неперервності вкладення $V_1 \subset V_0$ випливає $V_0 \ni x_n \xrightarrow{V_0} x \in V_0$. Тоді з (4) при $\beta = 1$ маємо $V_\alpha \ni x_n \xrightarrow{V_\alpha} x \in V_\alpha$ і вкладення $V_1 \subset V_\alpha$ неперервне. Неперервність вкладення $V_\beta \subset V_\alpha$ випливає з (4) на основі простих міркувань. Якщо $V_\beta \ni x_n \xrightarrow{V_\beta} x \in V_\beta$, то з неперервності вкладення $V_\beta \subset V_0$ і з урахуванням, що $V_\alpha \ni x_n \xrightarrow{V_\alpha} x \in V_\alpha$, одержуємо $V_0 \ni x_n \xrightarrow{V_0} x \in V_0$.

Припустимо, що елемент спряженого простору $x^* \in V_\alpha^*$ є ортогональним до V_β. З неперервності вкладення $V_\alpha \subset V_0$ випливає, що $x^* \in V_0^*$. Але вкладення $V_\alpha \subset V_0$ щільне, тому $x^* = 0$. За теоремою Гана − Банаха вкладення $V_\beta \subset V_\alpha$ є щільним.

Зокрема, щільним буде вкладення $V_1 \subset V_\beta$. Тому нерівність (4) у випадку $\alpha > 0$ для всіх елементів $x \in V_\beta$ отримується шляхом її неперервного розширення із щільної підмножини V_1.

Зауважимо, що з нерівності (4) відразу випливає правильність проміжного простору V_α для пари $\{V_\beta; V_0\}$.

Нарешті, нерівність (6) випливає з нерівності (4), якщо в останній підставити значення змінної $\varepsilon > 0$, при якому для елемента $x \in V_\beta$ досягається мінімум у нерівності (4), тобто взяти

$$\varepsilon = \left(\frac{C\alpha}{\beta-\alpha}\frac{\|x\|_0}{\|x\|_\beta}\right)^{1-\alpha/\beta}, \qquad C' = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{C\alpha}{\beta-\alpha}\right)^{1-\alpha/\beta}.$$

Доведемо твердження (***ii***). При $\alpha = 1$ твердження випливає з означення класу $\boldsymbol{\mathcal{A}}$. Нехай $0 < \alpha < 1$. З нерівності (6) при числах $\beta = 1$ отримуємо

$$V_1 \subset V_\alpha \subset V_0, \qquad \|x\|_\alpha \le C'\|x\|_1^\alpha \|x\|_0^{1-\alpha} \qquad \forall x \in V_1.$$

Підставляючи сюди $x = \left(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\right)^{-1} y$, де $y \in V_0$, $s > 0$ та $\lambda \in \Lambda_0$, маємо

$$\left\|\left(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\right)^{-1} y\right\|_\alpha = \left\|(-J)^\alpha\left(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\right)^{-1} y\right\|_0 \le$$

$$\le C'\left\|J\left(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\right)^{-1} y\right\|_0^\alpha \left\|E_{10}\left(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\right)^{-1} y\right\|_0^{1-\alpha} \le$$

$$\le C'\left\|J\left(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}^\alpha \|y\|_0^\alpha \left\|E_{10}\left(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\right)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}^{1-\alpha} \|y\|_0^{1-\alpha} =$$

$$= C's^\alpha \left\|J(s\lambda E_{10} - J)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}^\alpha \left\|R\left(\lambda, \frac{J}{s}\right)\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}^{1-\alpha} \|y\|_0.$$

Оскільки $J \in A$, то згідно з твердженням 1 з [2] існують сталі

$$C_1 = \sup_{s\lambda\in\Lambda_0}\left\|J(s\lambda E_{10} - J)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}, \qquad C_2 = \sup_{s\lambda\in\Lambda_0}\left\|\lambda R\left(\lambda, \frac{J}{s}\right)\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}.$$

Тепер попередня нерівність набуває вигляду

$$\left\|\left(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\right)^{-1} y\right\|_{\mathcal{L}(V_0;V_\alpha)} := \sup_{\|y\|_0=1}\left\|\left(\lambda E_{10} - \frac{J}{s}\right)^{-1} y\right\|_\alpha \le$$

$$\le C'C_1^\alpha s^\alpha \left\|R\left(\lambda, \frac{J}{s}\right)\right\|_{\mathcal{L}(V_0)}^{1-\alpha} \le \frac{C'C_1^\alpha C_2^{1-\alpha} s^\alpha}{|\lambda|^{1-\alpha}} = \frac{C'' s^\alpha}{|\lambda|^{1-\alpha}}.$$

Отже, у випадку оператора $A = J$ нерівність (7) доведено.

Щоб встановити нерівність для довільного оператора $A \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$, використаємо другу резольвентну тотожність

$$(s\lambda E_{10} - A)^{-1} = (s\lambda E_{10} - J)^{-1} - (s\lambda E_{10} - A)^{-1}(J - A)(s\lambda E_{10} - J)^{-1},$$

з якої отримуємо тотожність вигляду

$$(-J)^\alpha (s\lambda E_{10} - A)^{-1} =$$

$$= \left[E_{00} - (-J)^\alpha (s\lambda E_{10} - A)^{-1}(J - A)(-J)_{|V_1}^{-\alpha}\right](-J)^\alpha (s\lambda E_{10} - J)^{-1},$$

у якій оператор $(-J)_{|V_1}^{-\alpha}$ розглядаємо в алгебрі $\mathcal{L}(V_1)$, а тому його обернений $(-J)^\alpha$ є визначеним над підпростором V_1, тобто має вигляд $\left[(-J)_{|V_1}^{-\alpha}\right]^{-1} \in \mathcal{L}(V_{\alpha+1}; V_1)$. Тепер згідно з твердженням 1 з [2] існують сталі

$$\sup_{s\lambda\in\Lambda_0}\left\|(-J)^\alpha (s\lambda E_{10} - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le K(A)\left\|\left[(-J)_{|V_1}^{-\alpha}\right]^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(V_{\alpha+1};V_1)} := C_{\alpha'},$$

$$\left\| (J-A)(-J)^{-\alpha}_{|V_1} \right\|_{\mathcal{L}(V_1)} \le \| J-A \|_{\mathcal{L}(V_1;V_0)} \left\| (-J)^{-\alpha}_{|V_1} \right\|_{\mathcal{L}(V_1)} := C_{\alpha''} .$$

Звідси випливає рівномірна обмеженість функції у квадратних дужках з попередньої тотожності:

$$\left\| E_{00} - (-J)^{\alpha}(s\lambda E_{10} - A)^{-1}(J-A)(-J)^{-\alpha}_{|V_1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0)} \le 1 + C_{\alpha'} C_{\alpha''} := C_3 .$$

З тієї ж тотожності тоді одержуємо нерівність

$$\left\| (-J)^{\alpha}(s\lambda E_{10} - A)^{-1} y \right\|_0 \le C_3 \left\| (-J)^{\alpha}(s\lambda E_{10} - J)^{-1} y \right\|_0$$

або

$$\left\| \left(\lambda E_{10} - \frac{A}{s} \right)^{-1} y \right\|_{\alpha} \le C_3 \left\| \left(\lambda E_{10} - \frac{J}{s} \right)^{-1} y \right\|_{\alpha}$$

для будь-якого елемента $y \in V_0$. Остаточно маємо

$$\left\| \left(\lambda E_{10} - \frac{A}{s} \right)^{-1} y \right\|_{\mathcal{L}(V_0;V_\alpha)} := \sup_{\|y\|_0 = 1} \left\| \left(\lambda E_{10} - \frac{A}{s} \right)^{-1} y \right\|_{\alpha} \le$$

$$\le C_3 \left\| \left(\lambda E_{10} - \frac{J}{s} \right)^{-1} y \right\|_{\mathcal{L}(V_0;V_\alpha)} \le \frac{C' C_1^{\alpha} C_2^{1-\alpha} s^{\alpha}}{|\lambda|^{1-\alpha}} = \frac{C'' s^{\alpha}}{|\lambda|^{1-\alpha}}$$

для всіх $\lambda \in \Lambda_0$ та $s > 0$. Нерівність (7) при $0 < \alpha < 1$ доведено. Нарешті, випадок $\alpha = 0$ розглянуто у [2, твердження 2]. Твердження доведено. ◊

Наслідок 3. *Нехай* $0 < \eta < \vartheta < 1$. *Простір* $V_{1+\eta}$ *є правильним проміжним для пари* $\{V_\vartheta ; V_{1+\vartheta}\}$, *тобто для довільного числа* $\varepsilon > 0$ *існує така стала* $C > 0$, *що*

$$\| y \|_{1+\eta} \le \varepsilon \| y \|_{1+\vartheta} + C \varepsilon^{1+\eta-\vartheta/(\eta-\vartheta)} \| y \|_{\vartheta} \qquad \forall y \in V_{1+\vartheta} . \tag{10}$$

Для д о в е д е н н я досить у нерівності (4) покласти $\beta = 1$, $\alpha = 1 + \eta - \vartheta$, $x = (-J)^{\vartheta} y$ і використати півгрупову властивість степенів оператора. ◊

Наслідок 4. *Оператор* $(-J)$ *є позитивним у сенсі означення* 1.14.1 *з* [7]. *Тому дробові степені операторів* $(-J)^{\vartheta}$, *означені формулою Като* (9), *породжують інтерполяційну шкалу просторів* V_ϑ, *яка має властивості*

$$[V_0, V_1]_\vartheta = V_\vartheta , \qquad [V_1, V_2]_\vartheta = V_{1+\vartheta} ,$$

де через $[\cdot,\cdot]_\vartheta$ *позначено проміжний простір відповідної пари, породжений комплексним методом інтерполяції Ліонса – Кальдерона* [7, теорема 1.15.3].

1. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы. – Москва: Мир, 1992. – 351 с.
2. *Лопушанський А. О.* Числення секторіальних операторів з від'ємним типом і аналітичні півгрупи // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 2. – С. 65–73.
3. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. – Москва: Мир, 1985. – 376 с.
4. *Calderon A. P.* Intermediate spaces and interpolation // Studia Math. Ser. Specjalna. – 1963. – No. 1. – P. 31–34.
5. *Calderon A. P.* Intermediate spaces and interpolation, the complex method // Studia Math. – 1964. – **24**. – P. 113–190.
6. *Lions J.-L.* Une construction d'espases d'interpolation // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1960. – **251**. – P. 1853–1856.
7. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. – Berlin: Springer, 1995. – 664 p.

ИСЧИСЛЕНИЕ СЕКТОРИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ТИПОМ И КОМПЛЕКСНЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ШКАЛЫ

Описаны свойства степенной полугруппы в классе секториальных операторов с отрицательным типом. Установлено, что однопараметрическая шкала областей определения $V_\vartheta = D\big((-J)^\vartheta\big)$, $\vartheta > 0$, *для секториального оператора* J *совпадает с интерполяционной шкалой, порожденной комплексным методом Лионса – Кальдерона.*

CALCULUS OF NEGATIVE TYPE SECTORIAL OPERATORS AND COMPLEX INTERPOLATION SCALES

The properties of degree semi-group in a sectorial operators class with negative type is described. It is established that one-parameter scale of the domains of definition $V_\vartheta = D\big((-J)^\vartheta\big)$, $\vartheta > 0$, *for a sectorial operator* J *coincide with interpolation scale generated by complex method of Lions – Calderon.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
09.08.06