УДК 517.95

У. М. Федусь

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ З НЕВІДОМИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ТЕПЛОЄМНОСТІ

Визначено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для одновимірного параболічного рівняння загального вигляду з невідомим коефіцієнтом теплоємності у випадку класичних крайових умов та умови перевизначення.

Вступ і формулювання задачі. В обернених задачах про визначення старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні другого порядку традиційними є задачі з невідомим коефіцієнтом при другій похідній за просторовими змінними [2]. Задача знаходження залежного від часу коефіцієнта при другій похідній u_{xx} у параболічному рівнянні загального вигляду у випадку локальних умов (крайових і перевизначення) була досліджена в [2]. Серед робіт, які стосуються обернених задач з невідомим коефіцієнтом при похідній за часом у параболічному рівнянні, можна виділити наступні. У [4] встановлено коректність задачі для рівняння

$$\rho(x)u_t - Lu = g, \qquad (x,t) \in Q = \Omega \times (0,T], \qquad \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

з невідомим коефіцієнтом $\rho(x)$ та умовами

$$u(x,0) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(x)u = b(x,t), \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T),$$

$$\int_0^T u(x,\tau)w(\tau)\,d\tau = æ(x), \qquad x \in \Omega,$$

де L − рівномірно еліптичний оператор. У роботі [1] досліджено дві обернені задачі для параболічного рівняння

$$a(t)u_t = u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = (0,h) \times (0,T),$$

з невідомим коефіцієнтом $a(t)$.

У цій праці розглянуто обернену задачу для параболічного рівняння загального вигляду, в якому невідомий коефіцієнт, залежний від часу, знаходиться при похідній u_t. Інакше розміщення невідомого коефіцієнта в рівнянні призвело до зміни методики дослідження оберненої задачі і до відмінних від раніше встановлених результатів [2].

За допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора одержано умови існування розв'язку досліджуваної задачі. З урахуванням властивостей інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду встановлено єдиність розв'язку.

В області $Q_T = (0,h) \times (0,T)$ розглядаємо рівняння

$$c(t)u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + d(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $c(t) > 0$, початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u_x(0,t) = \mu_1(t), \qquad u_x(h,t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовою перевизначення вигляду

$$u(0,t) = \mu_3(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{4}$$

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2006. – 49, № 4. – С. 40-48.

Припустимо, що виконуються умови:

(**A1**) $\varphi \in C^2([0,h])$, $\mu_i \in C^1([0,T])$, $i = 1,2,3$, $a,b,d,f \in C^{1,0}(\bar{Q}_T)$;

(**A2**) $\varphi''(x) > 0$, $x \in [0,h]$, $b(0,t)\mu_1(t) + d(0,t)\mu_3(t) + f(0,t) > 0$,

$\mu_3'(t) > 0$, $t \in [0,T]$, $a(x,t) > 0$, $(x,t) \in \bar{Q}_T$;

(**A3**) $\varphi'(0) = \mu_1(0)$, $\varphi'(h) = \mu_2(0)$, $\varphi(0) = \mu_3(0)$.

Теорема 1. *При виконанні умов* (**A1**)–(**A3**) *можна вказати таке число* T_0, $0 < T_0 \le T$, *що розв'язок* $(c(t), u(x,t)) \in C([0,T_0]) \times C^{2,1}(\bar{Q}_{T_0})$ *задачі* (1)–(4) *існує.*

Теорема 2. *Припустимо, що виконуються умови* (**A2**), (**A3**) *та умова*

(**A4**) $\varphi \in H^{2+\gamma}([0,h])$, $\mu_i \in H^{1+\gamma/2}([0,T])$, $i = 1,2,3$,

$a,b,d,f \in H^{1,\gamma/2}(\bar{Q}_T)$, $0 < \gamma < 1$.

Тоді можна вказати таке число T_0, $0 < T_0 \le T$, *що розв'язок* $(c(t), u(x,t)) \in \in H^{\gamma/2}([0,T_0]) \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\bar{Q}_{T_0})$ *задачі* (1)–(4) *існує.*

Теорема 3. *Нехай існує розв'язок* $(c(t), u(x,t)) \in H^{\gamma/2}([0,T]) \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\bar{Q}_T)$ *задачі* (1)–(4). *Тоді, якщо* $\mu_3'(t) \ne 0$ *на* $[0,T]$, *то цей розв'язок єдиний.*

Д о в е д е н н я **теореми 1.** Зведемо задачу (1)–(4) до системи інтегральних рівнянь. Для цього зафіксуємо деяку точку y, $y \in [0,h]$, і подамо рівняння (1) у вигляді

$$c(t)u_t = a(y,t)u_{xx} + \big(a(x,t) - a(y,t)\big)u_{xx} + b(x,t)u_x + \\ + d(x,t)u + f(x,t). \tag{5}$$

При відомій функції $c(t)$ знаходження розв'язку задачі (5), (2), (3) зводиться до інтегро-диференціального рівняння

$$u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t), \tag{6}$$

де

$$u_0(x,t) = \int_0^h \varphi(\xi) G_2(x,t,\xi,0;y)\,d\xi - \int_0^t \frac{a(y,\tau)}{c(\tau)} \mu_1(\tau) G_2(x,t,0,\tau;y)\,d\tau + \\ + \int_0^t \frac{a(y,\tau)}{c(\tau)} \mu_2(\tau) G_2(x,t,h,\tau;y)\,d\tau + \int_0^t\int_0^h \frac{f(\xi,\tau)}{c(\tau)} G_2(x,t,\xi,\tau;y)\,d\xi\,d\tau,$$

$$u_1(x,t) = \int_0^t\int_0^h \frac{G_2(x,t,\xi,\tau;y)}{c(\tau)} \big[\big(a(\xi,\tau) - a(y,\tau)\big)u_{\xi\xi} + \\ + b(\xi,\tau)u_\xi + d(\xi,\tau)u\big]\,d\xi\,d\tau,$$

$$G_2(x,t,\xi,\tau;y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi[\theta(t,y) - \theta(\tau,y)]}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left(-\frac{(x - \xi + 2nh)^2}{4[\theta(t,y) - \theta(\tau,y)]}\right) + \\ + \exp\left(-\frac{(x + \xi + 2nh)^2}{4[\theta(t,y) - \theta(\tau,y)]}\right)\right], \qquad \theta(t,y) = \int_0^t \frac{a(y,\tau)}{c(\tau)}\,d\tau.$$

Введемо позначення $v(x,t) = u_x(x,t)$, $w(x,t) = u_{xx}(x,t)$. Рівняння стосовно $c(t)$ знайдемо з (1), поклавши в ньому $x = 0$ і скориставшись умовами (3), (4):

$$c(t) = \frac{a(0,t)w(0,t) + b(0,t)\mu_1(t) + d(0,t)\mu_3(t) + f(0,t)}{\mu_3'(t)}. \tag{7}$$

Очевидно, що

$$u(x,t)=u(0,t)+\int_0^x u_x(x,t)\,dx=\mu_3(t)+\int_0^x v(x,t)\,dx\,,$$

$$v(x,t)=u_x(0,t)+\int_0^x u_{xx}(x,t)\,dx=\mu_1(t)+\int_0^x w(x,t)\,dx\,. \qquad (8)$$

З вигляду функції G_2 легко встановити, що $G_{2xx}(x,t,\xi,\tau;y)\big|_{y=x}=$ $=G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)$. Тоді з означення функції Ґріна отримаємо

$$G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)=-\frac{c(\tau)}{a(x,\tau)}\,G_{2\tau}(x,t,\xi,\tau;x)\,.$$

З урахуванням встановлених співвідношень обчислимо

$$w(x,t)=u_{0xx}(x,t)+u_{1xx}(x,t)\,, \qquad (9)$$

де

$$u_{0xx}(x,t)=\int_0^h \varphi''(\xi)G_2(x,t,\xi,0;x)\,d\xi-\int_0^t \mu_1'(\tau)G_2(x,t,0,\tau;x)\,d\tau+$$
$$+\int_0^t \mu_2'(\tau)G_2(x,t,h,\tau;x)\,d\tau-\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h f_\xi(\xi,\tau)G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\,d\xi\,, \qquad (10)$$

$$u_{1xx}(x,t)=\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\big(a(\xi,\tau)-a(x,\tau)\big)w(\xi,\tau)G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\,d\xi-$$
$$-\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\big[d_\xi(\xi,\tau)u+\big(d(\xi,\tau)+b_\xi(\xi,\tau)\big)v+$$
$$+\,b(\xi,\tau)w\big]G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\,d\xi\,. \qquad (11)$$

Використавши рівності (8) в (11), отримаємо систему інтегральних рівнянь (7), (9) щодо невідомих c та w. До цієї системи застосуємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора. Спочатку встановимо апріорні оцінки розв'язків системи.

Використовуючи вигляд функції Ґріна G_2, легко переконатись, що

$$\int_0^h G_2(x,t,\xi,0;x)\,d\xi=1\,.$$

Тоді згідно з припущеннями теореми маємо

$$\int_0^h \varphi''(\xi)G_2(x,t,\xi,0;x)\,d\xi\ge\min_{x\in[0,h]}\varphi''(x)>0\,.$$

Оскільки при $t\to 0$ всі доданки, крім першого, в рівності (10), і всі доданки з (11) прямують до нуля, то існує такий проміжок $[0,T_0]$, $0<T_0\le T$, на якому буде виконуватися нерівність

$$\int_0^h \varphi''(\xi)G_2(0,t,\xi,0;0)\,d\xi\ge\int_0^t \mu_1'(\tau)G_2(0,t,0,\tau;0)\,d\tau-$$
$$-\int_0^t \mu_2'(\tau)G_2(0,t,h,\tau;0)\,d\tau-\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\big(a(\xi,\tau)-$$
$$-\,a(0,\tau)\big)w(\xi,\tau)G_{2\xi\xi}(0,t,\xi,\tau;0)\,d\xi+\int_0^t\frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h\big[f_\xi(\xi,\tau)+d_\xi(\xi,\tau)u+$$
$$+\,\big(d(\xi,\tau)+b_\xi(\xi,\tau)\big)v+b(\xi,\tau)w\big]\,G_{2\xi}(0,t,\xi,\tau;0)\,d\xi\,.$$

Тоді $w(0,t) \ge 0$ на $[0, T_0]$, і з (7) отримуємо оцінку

$$c(t) \ge A_0 > 0, \qquad t \in [0, T_0]. \tag{12}$$

Звідси маємо

$$\theta(t,x) = \int_0^t \frac{a(x,\tau)}{c(\tau)} d\tau \le M_1 .$$

Встановимо оцінку $c(t)$ зверху. Нехай $W(t) = \max\limits_{x\in[0,h]} |u_{xx}(x,t)|$. Тоді з (8) отримаємо

$$|v(x,t)| \le M_2 + hW(t),$$

$$|u(x,t)| \le M_3 + \int_0^x |v(x,t)|\, dx \le M_4 + M_5 W(t). \tag{13}$$

З рівняння (7) матимемо

$$c(t) \le M_6 + M_7 W(t). \tag{14}$$

Для першого доданка з формули (10) (для $u_{0xx}(x,t)$) справджується оцінка

$$\left| \int_0^h \varphi''(\xi) G_2(x,t,\xi,0;x)\, d\xi \right| \le \max_{x\in[0,h]} \varphi''(x).$$

З оцінок функцій Ґріна [6, с. 12] відомо, що

$$G_2(x,t,\xi,\tau;x) \le M_8 + \frac{M_9}{\sqrt{\theta(t,x) - \theta(\tau,x)}} .$$

Тому

$$\left| \int_0^t \mu_1'(\tau) G_2(x,t,0,\tau;x)\, d\tau \right| + \left| \int_0^t \mu_2'(\tau) G_2(x,t,h,\tau;x)\, d\tau \right| \le$$

$$\le M_{10} + M_{11} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t,x) - \theta(\tau,x)}} .$$

За нерівністю

$$z^p \exp(-qz^2) \le C_{p,q} < \infty \qquad \forall z \in [0,\infty), \qquad p \ge 0, \quad q > 0, \tag{15}$$

маємо

$$|G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)| \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{\pi[\theta(t,x) - \theta(\tau,x)]^3}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[|x - \xi + 2nh| \exp\left(- \frac{(x - \xi + 2nh)^2}{4[\theta(t,x) - \theta(\tau,x)]} \right) + \right.$$

$$\left. + |x + \xi + 2nh| \exp\left(- \frac{(x + \xi + 2nh)^2}{4[\theta(t,x) - \theta(\tau,x)]} \right) \right] \le$$

$$\le \frac{M_{12}}{\theta(t,x) - \theta(\tau,x)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left(- \frac{(x - \xi + 2nh)^2}{8[\theta(t,x) - \theta(\tau,x)]} \right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(- \frac{(x + \xi + 2nh)^2}{8[\theta(t,x) - \theta(\tau,x)]} \right) \right].$$

Тоді з оцінки $\theta(x,t)$ зверху отримуємо

$$\left| - \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)} \int_0^h f_\xi(\xi,\tau) G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\, d\xi \right| \le M_{13} \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x) - \theta(\tau,x)}} \le$$

$$\le M_{14} \sqrt{\theta(t,x)} \le M_{15} .$$

Враховуючи встановлені оцінки, приходимо до нерівності

$$|u_{0xx}(x,t)| \le M_{16} + M_{17}\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}.$$

Помноживши та поділивши в останньому доданку в підінтегральній частині на $c(\tau)$ і використавши (14) та оцінку $\theta(x,t)$ зверху, отримаємо

$$|u_{0xx}(x,t)| \le M_{16} + M_{17}\int_0^t \frac{M_6 + M_7 W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau \le$$

$$\le M_{18} + M_{19}\int_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau.$$

Для оцінки інтеграла

$$\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big(a(\xi,\tau)-a(x,\tau)\big)w(\xi,\tau)G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\,d\xi$$

обчислимо $G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)$:

$$G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x) =$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{\pi[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]^3}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)\right] + \frac{1}{8\sqrt{\pi[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]^5}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(x-\xi+2nh)^2\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)+\right.$$

$$\left.+(x+\xi+2nh)^2\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)\right]. \qquad (16)$$

За нерівністю (15) маємо

$$\frac{1}{8\sqrt{\pi[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]^5}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[(x-\xi+2nh)^2\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)+\right.$$

$$\left.+(x+\xi+2nh)^2\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)\right] \le$$

$$\le \frac{M_{20}}{\sqrt{[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]^3}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)\right].$$

Тому

$$\left|\int_0^h \big(a(\xi,\tau)-a(x,\tau)\big)w(\xi,\tau)G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\,d\xi\right| \le$$

$$\le M_{21}W(\tau)\int_0^h \frac{|\xi-x|}{\sqrt{[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]^3}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)\right]d\xi.$$

Використаємо нерівність (15) для оцінки інтеграла

$$\int_0^h \frac{|\xi - x|}{\sqrt{[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]^3}}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)\right]d\xi \le \frac{M_{22}}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}.$$

Оскільки $|x-\xi| \le x - \xi + 2nh$ і $|\xi - x| \le \xi + x + 2nh$ при $n \ge 1$, то

$$\int_0^h \frac{|\xi - x|}{\sqrt{[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]^3}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)\right]d\xi \le$$

$$\le \int_0^h \frac{1}{\sqrt{[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]^3}}\sum_{n=1}^{\infty}(x-\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)d\xi +$$

$$+\int_0^h \frac{1}{\sqrt{[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]^3}}\sum_{n=1}^{\infty}(\xi+x+2nh)\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)d\xi.$$

Виконаємо заміни $z = \dfrac{x-\xi+2nh}{\sqrt{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}}$ і $z = \dfrac{x+\xi+2nh}{\sqrt{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}}$ відповідно у першому та другому інтегралах. Тоді

$$\int_0^h \frac{|\xi - x|}{\sqrt{[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]^3}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)\right]d\xi \le$$

$$\le \frac{M_{23}}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{x+(2n-1)h}{\sqrt{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}}}^{\frac{x+2nh}{\sqrt{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}}} z\exp(-z^2)\,dz +\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{x+2nh}{\sqrt{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}}}^{\frac{x+(2n+1)h}{\sqrt{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}}} z\exp(-z^2)\,dz\right) \le \frac{M_{23}}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}.$$

Аналогічно при $|\xi - x| \le 2nh - \xi - x$ для довільного $n \ge 1$ маємо

$$\int_0^h \frac{|\xi - x|}{\sqrt{[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]^3}}\sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)+\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{8[\theta(t,x)-\theta(\tau,x)]}\right)\right]d\xi \le \frac{M_{23}}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}.$$

Враховуючи всі отримані оцінки, встановлюємо

$$\left|\int_0^h \big(a(\xi,\tau)-a(x,\tau)\big)w(\xi,\tau)G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\,d\xi\right| \le \frac{M_{24}W(\tau)}{\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}},$$

звідки маємо

$$\left|\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big(a(\xi,\tau)-a(x,\tau)\big)w(\xi,\tau)G_{2\xi\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\,d\xi\right| \le$$

$$\le M_{24}\int_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau .$$

Для оцінки другого доданка в $u_{1xx}(x,t)$ скористаємось (13) і встановленою вище оцінкою для $\left|G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\right|$:

$$\left| -\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}\int_0^h \big[d_\xi(\xi,\tau)u + \big(d(\xi,\tau)+b_\xi(\xi,\tau)\big)v + \right.$$

$$\left. + b(\xi,\tau)w\big]G_{2\xi}(x,t,\xi,\tau;x)\,d\xi \right| \le M_{25}\int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}} +$$

$$+ M_{26}\int_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau \le M_{27} + M_{26}\int_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau .$$

Тоді

$$|u_{1xx}(x,t)| \le M_{28} + M_{29}\int_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau .$$

Отже,

$$|u_{xx}(x,t)| \le M_{30} + M_{31}\int_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta(t,x)-\theta(\tau,x)}}\,d\tau, \qquad (x,t)\in \bar{Q}_{T_0},$$

звідки, ввівши позначення $\theta_0(t) = \int_0^t \frac{d\tau}{c(\tau)}$, отримуємо нерівність

$$W(t) \le M_{30} + M_{32}\int_0^t \frac{W(\tau)}{c(\tau)\sqrt{\theta_0(t)-\theta_0(\tau)}}\,d\tau .$$

З леми 2.2.1 [6, с. 22] маємо

$$W(t) \le 2M_{30}\exp\big(M_{32}^2\pi\,\theta_0(t)\big) \le M_{33}$$

або

$$|w(x,t)| \le M_{33}, \qquad (x,t)\in \bar{Q}_{T_0}. \tag{17}$$

Тоді з (14) отримуємо

$$c(t) \le M_6 + M_7 M_{33} = A_1 < \infty, \qquad t\in[0,T_0]. \tag{18}$$

У встановлених оцінках M_i, $i=1,\dots,33$, – відомі величини.

Розглянемо систему рівнянь (7), (9) як операторне рівняння

$$\omega = P\omega,$$

де $\omega = (c(t), w(x,t))$, $P=(P_1,P_2)$, і оператори P_1, P_2 визначаються рівняннями (7), (9) відповідно. Нехай $N = \{(c,w)\in C([0,T_0])\times C(\bar{Q}_{T_0}) : 0 < A_0 \le c(t) \le A_1,$ $|w(x,t)| \le M_{33}\}$. З огляду на апріорні оцінки (12), (17), (18) оператор P переводить множину N у себе. Компактність оператора вигляду P встановлено в [6, с. 27]. Застосовуючи теорему Шаудера до оператора P, отримуємо існування неперервного розв'язку системи рівнянь (7), (9).

Зауваження. Існування розв'язку отримано на звуженому проміжку часу. Виходячи з формул (9)–(11), встановити знак $w(0,t)$ на всьому проміжку часу неможливо. Проте, якщо припустити $b = b(t)$, $d = d(t)$ у рівнянні (1), то вдається встановити знак функції $w(x,t)$ на всьому проміжку часу. Дійсно, якщо у цьому випадку записати задачу для $w = u_{xx}$:

$$c(t)w_t = a(x,t)w_{xx} + \left(2a_x(x,t) + b(t)\right)w_x + \left(a_{xx}(x,t) + d(t)\right)w + f_{xx}(x,t),$$

$$w(x,0) = \varphi''(x),$$

$$a(0,t)w_x(0,t) + \left(a_x(0,t) + b(t)\right)w(0,t) = c(t)\mu_1'(t) - d(t)\mu_1(t) - f_x(0,t),$$

$$a(h,t)w_x(h,t) + \left(a_x(h,t) + b(t)\right)w(h,t) = c(t)\mu_2'(t) - d(t)\mu_2(t) - f_x(h,t),$$

і скористатись наслідком з принципу максимуму [3, с. 24], то при виконанні умов

$$\varphi''(x) \ge 0, \qquad a(x,t) > 0, \qquad \mu_1'(t) \le 0, \qquad \mu_2'(t) \ge 0,$$

$$d(t)\mu_1(t) + f_x(0,t) \ge 0, \quad d(t)\mu_2(t) + f_x(h,t) \le 0, \qquad f_{xx}(x,t) \ge 0$$

маємо

$$w(x,t) \ge 0, \qquad (x,t) \in \bar{Q}_T.$$

Отже, з (7) отримуємо оцінку (12) на всьому проміжку часу, а, отже, й існування розв'язку на всьому проміжку часу. ◊

Д о в е д е н н я **теореми 2.** Припустимо, що існує неперервний розв'язок $(c(t), u(x,t)) \in C([0,T_0]) \times C^{2,1}(\bar{Q}_{T_0})$ задачі (1)–(4). Покажемо, що, якщо умови теореми виконуються, то розв'язок буде належати класу $H^{\gamma/2}([0,T_0]) \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\bar{Q}_{T_0})$. Тоді за властивостями теплових потенціалів [5] з (9), (10) встановлюємо, що $u_{0xx} \in H^{\gamma,\gamma/2}(\bar{Q}_{T_0})$ і $w \in H^{\gamma,\gamma/2}(\bar{Q}_{T_0})$. Звідси випливає, що $c(t) \in H^{\gamma/2}([0,T_0])$. Аналогічно з (8) отримуємо, що $u \in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\bar{Q}_{T_0})$. ◊

Д о в е д е н н я **теореми 3.** Припустимо, що існують два розв'язки $(c_1(t), u_1(x,t))$ і $(c_2(t), u_2(x,t))$ з класу $H^{\gamma/2}([0,T]) \times H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\bar{Q}_T)$ задачі (1)–(4). Нехай $c(t) \equiv c_1(t) - c_2(t)$, $u(x,t) \equiv u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Запишемо задачу для $(c(t), u(x,t))$:

$$c_1(t)u_t = a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + d(x,t)u - c(t)u_{2t}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{19}$$

$$u(x,0) = 0, \qquad x \in [0,h], \tag{20}$$

$$u_x(0,t) = u_x(h,t) = 0, \qquad t \in [0,T], \tag{21}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad t \in [0,T]. \tag{22}$$

За допомогою функції Ґріна $\tilde{G}_2$ запишемо розв'язок задачі (19)–(21):

$$u(x,t) = -\int_0^t \int_0^h G_2(x,t,\xi,\tau) \frac{c(\tau)u_{2\tau}(\xi,\tau)}{c_1(\tau)} d\xi\, d\tau. \tag{23}$$

З (19), поклавши $x = 0$, отримаємо рівняння

$$c(t)\mu_3'(t) - a(0,t)u_{xx}(0,t) = 0.$$

Обчислимо похідну від $u(x,t)$ (23) і підставимо в це рівняння:

$$c(t)\mu_3'(t) + a(0,t)\int_0^t \frac{c(\tau)}{c_1(\tau)}\,d\tau\int_0^h \tilde{G}_{2xx}(0,t,\xi,\tau)\,u_{2\tau}(\xi,\tau)\,d\xi = 0\,. \qquad (24)$$

Тоді з того, що $u_2 \in H^{2+\gamma,1+\gamma/2}(\bar{Q}_T)$, і з властивостей об'ємних теплових потенціалів [3, с. 318] випливає, що ядро

$$\mathcal{K}(t,\tau) = \frac{1}{c_1(\tau)}\int_0^h \tilde{G}_{2xx}(0,t,\xi,\tau)\,u_{2\tau}(\xi,\tau)\,d\xi$$

інтегрального рівняння (24) має інтегровну особливість:

$$|\mathcal{K}(t,\tau)| \le \frac{C}{(t-\tau)^{1-\gamma/2}}\,.$$

Тоді рівняння (24) має єдиний розв'язок $c(t) \equiv 0$ на $[0,T]$, а, отже, й $u(x,t) \equiv 0$. Тому $c_1(t) = c_2(t)$ і $u_1(x,t) = u_2(x,t)$, що й доводить єдиність розв'язку задачі. ◊

1. *Гуль О., Дорожовець У., Іванчов М.* Обернені задачі визначення залежного від часу коефіцієнта при похідній за часом у параболічному рівнянні // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 27–37.
2. *Іванчов М. І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами / Ін-т системних досліджень освіти: Препр. – Київ, 1995. – 84 с.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
4. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении. II / Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 5. – С. 147–162.
5. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
6. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type / Math. Studies: Monograph Ser. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – Vol. 10. – 238 p.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА С НЕИЗВЕСТНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ТЕПЛОЕМКОСТИ

Установлены условия существования и единственности решения обратной задачи для одномерного параболического уравнения общего вида с неизвестным коэффициентом теплоемкости в случае классических краевых условий и условия переопределения.

INVERSE PROBLEM FOR GENERAL PARABOLIC EQUATION WITH UNKNOWN THERMAL CAPACITY COEFFICIENT

We establish conditions for existence and uniqueness of solution to the inverse problem for one-dimensional parabolic equation of general type with unknown thermal capacity coefficient in the case of classic boundary conditions and condition of overdetermination.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
08.11.05