

МЕТОДИКА ЧИСЛОВОГО ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ, ТЕМПЕРАТУРНИХ І МЕХАНІЧНИХ ПОЛІВ ПРИ ВИСОКОТЕМПЕРАТУРНИЙ ІНДУКЦІЙНІЙ ОБРОБЦІ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ

Запропоновано методика визначення параметрів, що описують нестационарні електромагнітні й теплові, а також термомеханічні процеси в осесиметричних електропровідних тілах при високотемпературному індукційному нагріванні. Методика побудована з використанням методу скінченних елементів і сім'ї простих однокрокових скінченно-різницевого алгоритмів за різних кроків інтегрування за часом складових задач. Як приклад розглянуто індукційне нагрівання скінченного циліндра з феромагнітної сталі.

Для підвищення параметрів міцності та надійності виробів з електропровідних матеріалів в сучасних технологіях обробки широко використовують електромагнітні поля (ЕМП). Побудова раціональних режимів такої обробки вимагає розробки математичних моделей, які достатньо адекватно описують фізико-механічні процеси у електропровідних тілах за умов дії зовнішніх ЕМП з урахуванням реальної взаємодії електромагнітного, температурного та механічного полів.

Питанням побудови математичних моделей процесів індукційного нагрівання твердих тіл із урахуванням залежності електро-, теплофізичних і механічних властивостей матеріалів від температури, пружнопластичного характеру деформування виробів і нелінійної залежності індукцій електричного та магнітного полів від відповідних напруженостей присвячені роботи [1, 3, 4, 11]. Врахування наведених факторів призводить до складності цих математичних моделей, аналітичне дослідження яких викликає значні труднощі. Використання сучасних числових методів без урахування особливостей поведінки взаємопов'язаних електромагнітних, теплових і механічних полів за відсутності потужних обчислювальних систем часто теж виглядає достатньо проблематичним з точки зору реальних обсягів і часу обчислень [11, 13, 14].

У цій роботі на основі сумісного використання методу скінченних елементів і сім'ї простих однокрокових багатопараметричних алгоритмів запропоновано методика числового моделювання зумовлених дією квазіусталеного зовнішнього ЕМП електромагнітних, теплових і механічних полів в електропровідних термочутливих тілах із урахуванням пружнопластичного характеру їх деформування і нелінійної залежності між індукціями та напруженостями відповідно електричного й магнітного полів. При визначенні параметрів, які характеризують розглядувані поля, у рамках розрахункової схеми використано різні кроки інтегрування за часом для рівнянь електродинаміки, теплопровідності та пружнопластичності. Ці кроки можуть змінюватись у процесі проведення обчислень відповідно до поведінки отримуваних розв'язків. Такий підхід дає можливість оптимізувати процес обчислень (за часом розрахунку), суттєво скоротити об'єм обчислень й отримати числові результати.

Постановка задачі. Розглянемо осесиметричне ізотропне електропровідне тіло, яке займає область V з неперервною за Ліпшицем поверхнею Γ . Тіло перебуває під впливом ЕМП, яке збуджує розподілена у скінченній підобласті оточуючого середовища осесиметрична система струмів із густиною $\mathbf{j}^{(0)}(r, z, t) = (0, j_{\phi}^{(0)}(r, z, t), 0)$, де r, ϕ, z – циліндричні координати; $j_{\phi}^{(0)}(r, z, t) = J_0(1 - e^{-\eta t}) \cdot \sin 2\pi\nu$ (ν – частота струму; параметр η характеризує час виходу на усталений режим). Сторонні електричні заряди та струми в тілі відсутні. Електромеханічні, термоелектричні, магнітострикцій-

ні ефекти й вплив рухомості середовища на ЕМП вважаємо несуттєвими, а індукції і напруженості відповідно електричного та магнітного полів – паралельними.

Відповідно до запропонованої у [1, 4] математичної моделі зв'язані електромагнітне й температурне поля за рівнянь стану

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(1)} &= \mathbf{B}_*(\mathbf{H}^{(1)}, T), & \mathbf{D}^{(1)} &= \mathbf{D}_*(\mathbf{E}^{(1)}, T), & \mathbf{j}^{(1)} &= \gamma \mathbf{E}^{(1)}, \\ \mathbf{B}^{(0)} &= \mu_0 \mathbf{H}^{(1)}, & \mathbf{D}^{(0)} &= \varepsilon_0 \mathbf{E}^{(0)} \end{aligned} \quad (1)$$

описує така система рівнянь електродинаміки та теплопровідності:

$$-\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{E}_\varphi^{(0)}) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{E}_\varphi^{(0)} \right) \right) + \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}_\varphi^{(0)} = -\frac{\partial}{\partial t} j_\varphi^{(0)},$$

$$(r, z) \in E^2 \setminus V, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{E}_\varphi^{(1)}) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{E}_\varphi^{(1)} \right) + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \mathbf{E}_\varphi^{(1)} + F_\gamma \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_\varphi^{(1)} +$$

$$+ \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}_\varphi^{(1)} = F_B, \quad (3)$$

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q, \quad (r, z) \in V, \quad t \in [0, \tau], \quad (4)$$

за початкових умов

$$T(r, z, 0) = T_0(r, z), \quad \mathbf{E}_\varphi^{(m)} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}_\varphi^{(m)} = 0; \quad (5)$$

умов на межі Γ поділу тіла й середовища

$$\mathbf{E}_\varphi^{(1)} = \mathbf{E}_\varphi^{(0)},$$

$$\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial (r \mathbf{E}_\varphi^{(1)})}{r \partial r} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial (r \mathbf{E}_\varphi^{(0)})}{r \partial r} \right) n_r + \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mathbf{E}_\varphi^{(1)}}{\partial z} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mathbf{E}_\varphi^{(0)}}{\partial z} \right) n_z = 0, \quad (6)$$

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial r} n_r + \frac{\partial T}{\partial z} n_z \right) = \beta(T - T_S); \quad (7)$$

умов на осі Oz ($r = 0$) та на нескінченності відповідно

$$\mathbf{E}_\varphi^{(m)} \Big|_{r=0} = 0, \quad (8)$$

$$\lim_{r, z \rightarrow \infty} \mathbf{E}_\varphi^{(0)} = 0. \quad (9)$$

Тут $\mathbf{E} = (0, E_\varphi(r, z, t), 0)^\top$, $\mathbf{H} = (H_r(r, z, t), 0, H_z(r, z, t))^\top$ – вектори напруженості електричного та магнітного полів (індекс « \top » означає транспонування); $\mathbf{D} = (0, D_\varphi, 0)^\top$, $\mathbf{B} = (B_r, 0, B_z)^\top$ – електрична та магнітна індукції (величини з індексом $m = 0$ стосуються зовнішнього середовища $E^2 \setminus V$, яке за електромагнітними властивостями розглядаємо в наближенні вакууму, а з індексом $m = 1$ – тіла); \mathbf{B}_* , \mathbf{D}_* – функції, які задають зв'язок між векторами індукції і напруженості відповідно магнітного та електричного полів у тілі; ε_0 , μ_0 – діелектрична й магнітна проникності вакууму; $\varepsilon = \varepsilon(|\mathbf{D}|, T)$, $\mu = \mu(|\mathbf{H}|, T)$ – диференціальні діелектрична та магнітна проникності тіла; \mathbf{j} – вектор густини струму; $\gamma = \gamma(T)$ – коефіцієнт електропровідності;

$c = c(T)$ – об'ємна теплоємність; $\lambda = \lambda(T)$ – коефіцієнт теплопровідності; Q – потужність наявних джерел тепла; $\mathbf{n} = (n_r, n_z)^\top$ – вектор нормалі до поверхні Γ ; $\beta = \beta(T)$ – коефіцієнт тепловіддачі; T_S – температура зовнішнього середовища;

$$F_\gamma = \gamma + \frac{2\partial^2 D_{*\phi}}{\partial E_\phi^{(1)} \partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial^2 D_{*\phi}}{\partial (E_\phi^{(1)})^2} \frac{\partial E_\phi^{(1)}}{\partial t};$$

$$F_B = -\frac{\partial^2 D_{*\phi}}{\partial T^2} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^2 - \frac{\partial D_{*\phi}}{\partial T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{*z}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{*r}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right).$$

За відомим вектором напруженості \mathbf{E} електричного поля компоненти вектора індукції \mathbf{B} магнітного поля знаходимо зі співвідношень

$$B_r = \int_0^t \frac{\partial E_\phi}{\partial z} dt', \quad B_z = -\int_0^t \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} dt'. \quad (10)$$

Напруженість \mathbf{H} магнітного й індукцію \mathbf{D} електричного полів, а також діелектричну та магнітну проникності тіла визначаємо на основі кривих намагнічення і поляризації (1) та формул:

$$\mu = \frac{\partial |\mathbf{B}_*|}{\partial |\mathbf{H}^{(1)}|}, \quad \varepsilon = \frac{\partial D_{*\phi}}{\partial E_\phi^{(1)}}. \quad (11)$$

Зазначимо, що у випадку дії квазіусталених ЕМП впливом струмів зміщення в області електропровідного тіла можемо знехтувати порівняно зі струмами провідності [12]. За цих умов рівняння (3) стає параболічним (зникає член із другою похідною за часом), а

$$F_B = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{*z}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_{*r}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right), \quad F_\gamma = \gamma.$$

Для опису процесів деформування тіла використаємо записані у приростах співвідношення неізотермічного пружнопластичного течіння [10]. У зручному для числової реалізації матричному вигляді фізичні й геометричні співвідношення і рівняння рівноваги з відповідними граничними умовами, які утворюють повну систему рівнянь для визначення переміщень $\mathbf{u} = \{u_r, u_z\}^\top$, деформацій $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\phi\phi}, \varepsilon_{zz}, 2\varepsilon_{rz}\}^\top$ і напружень $\{\sigma\} = \{\sigma_{rr}, \sigma_{\phi\phi}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz}\}^\top$, запишемо у такому вигляді [1, 3]:

$$\{d\sigma\} = \mathbf{C}^{t+\Delta t} (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_T\}) + d\mathbf{C}(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_p\}) + \mathbf{Z} dT, \quad (12)$$

$$\{\varepsilon\} = \mathbf{A} \mathbf{u}, \quad (13)$$

$$\mathbf{A}^\top \{\sigma\} + \mathbf{F} = 0, \quad (r, z) \in V, \quad (14)$$

$$\mathbf{N}^\top \{\sigma\} = \mathbf{p}, \quad (r, z) \in \Gamma_\sigma, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)}, \quad (r, z) \in \Gamma_u,$$

$$\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \Gamma, \quad \Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset, \quad (15)$$

де $\{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon_T\}$, $\{\varepsilon_p\}$ – вектори повних, температурних і пластичних деформацій; \mathbf{F} – наявні об'ємні (пондеромоторні) сили; \mathbf{p} і $\mathbf{u}^{(0)}$ – вектори зовнішнього силового навантаження (відмінного від електромагнітного) та переміщень, заданих на поверхнях Γ_σ і Γ_u відповідно;

$$\mathbf{C}^{t+dt} = \mathbf{G}^{t+dt} - \frac{\mathbf{G}^{t+dt} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^{\top} \mathbf{G}^{t+dt}}{\frac{2}{3} H \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^{\top} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^{\top} \mathbf{G}^{t+dt} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}};$$

$$d\mathbf{C} = d\mathbf{G} - \frac{\mathbf{G}^{t+dt} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^{\top} d\mathbf{G}}{\frac{2}{3} H \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^{\top} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^{\top} \mathbf{G}^{t+dt} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}};$$

$$\mathbf{Z} = \frac{\sqrt{\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^{\top} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\} \mathbf{G}^{t+dt} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T}}}{\frac{2}{3} H \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^{\top} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\} + \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}^{\top} \mathbf{G}^{t+dt} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\}};$$

$$\mathbf{A}^{\top} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{Bmatrix}$$

– матриця оператора геометричних співвідношень теорії пружності;

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} n_r & 0 & n_z & 0 \\ 0 & n_z & n_r & 0 \end{Bmatrix}^{\top};$$

$$\mathbf{G} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{Bmatrix}$$

– матриця пружних сталей;

$$\left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right\} = \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{rr}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{zz}}, \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{rz}} \right\}^{\top}$$

– вектор похідних функції течіння Φ у просторі напружень; $d\mathbf{G}$ – матриця приростів пружних модулів за крок навантаження (у зв'язку з їхньою температурною залежністю); H – кут нахилу кривої «еквівалентне напруження $\bar{\sigma}$ – еквівалентна пластична деформація $\bar{\epsilon}_p$ »; індекс « $t + dt$ » означає, що величини обчислюються у момент часу $t + dt$ (наприкінці чергового кроку навантаження); решту величин визначаємо у момент часу t (на початку кроку).

Відповідно до запропонованої розрахункової схеми задача про визначення електромагнітних, теплових і механічних полів в електропровідному тілі за умов дії зовнішнього ЕМП розв'язуємо за два етапи. На першому із системи рівнянь (1)–(4), (10), (11) за початкових умов (5), умов (6), (7) на межі поділу тіла та зовнішнього середовища й граничних умов (8), (9) визначаємо розподіл температури та параметри, які характеризують ЕМП у тілі. Далі на основі отриманих розв'язків зв'язаної задачі електродинаміки й теплопровідності визначаємо пондеромоторні сили \mathbf{F} , які разом із температурою складають вхідні дані для задачі другого етапу – визначення переміщень, деформацій і напружень у тілі з рівнянь неізотермічної термопружності (12)–(14) за відомих граничних умов (15).

Методика розв'язування. Внаслідок застосування стандартної процедури скінченно-елементної дискретизації у варіанті методу зважених залишків [6] зведемо задачу (1)–(11) до системи звичайних диференціальних рівнянь [1, 2]

$$[L_1]\{\dot{T}_h(t)\} + [L_0]\{T_h(t)\} = \{f_T\}, \quad \{T_h(0)\} = \{T_h^0\}, \quad (16)$$

$$[M_2]\{\ddot{E}_h(t)\} + [M_1]\{\dot{E}_h(t)\} + [M_0]\{E_h(t)\} = \{f_E\},$$

$$\{E_h(0)\} = 0, \quad \{\dot{E}_h(0)\} = 0 \quad (17)$$

відносно невідомих значень векторів напруженості $\{E_h\}$ електричного поля і температури $\{T_h\}$ у вузлах скінченно-елементного поділу. Матрично-векторні характеристики отриманої задачі Коші (16), (17) обчислюємо через підсумовування відповідних характеристик окремих скінченних елементів [1, 4]:

$$\begin{aligned} [L_0]^{\text{el}} &= \int_{V^{\text{el}}} \lambda \left(\left[\frac{\partial N}{\partial r} \right]^\top \left[\frac{\partial N}{\partial r} \right] + \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]^\top \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right] \right) r \, dr \, dz + \int_{\Gamma^{\text{el}}} \beta [N]^\top [N] r \, d\xi, \\ [L_1]^{\text{el}} &= \int_{V^{\text{el}}} c [N]^\top [N] r \, dr \, dz, \quad \{f_T\}^{\text{el}} = \int_{V^{\text{el}}} Q [N]^\top r \, dr \, dz + \int_{\Gamma^{\text{el}}} \beta [N]^\top r \, d\xi, \\ [M_0]^{\text{el}} &= \int_{V_*^{\text{el}}} \frac{1}{\mu_c} \left(\left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]^\top \left[\frac{\partial N}{\partial r} \right] + \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right]^\top \left[\frac{\partial N}{\partial z} \right] \right) r \, dr \, dz + \\ &\quad + \int_{V_*^{\text{el}}} \gamma_t [N]^\top [N] r \, dr \, dz + \int_{V_*^{\text{el}}} \frac{1}{\mu_c} \frac{1}{r} \left(\left[\frac{\partial N}{\partial r} \right]^\top [N] + [N]^\top \left[\frac{\partial N}{\partial r} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r} [N]^\top [N] \right) r \, dr \, dz, \\ [M_1]^{\text{el}} &= \int_{V_*^{\text{el}}} F_c [N]^\top [N] r \, dr \, dz, \quad [M_2]^{\text{el}} = \int_{V_*^{\text{el}}} \varepsilon_c [N]^\top [N] r \, dr \, dz, \\ \{f_E\}^{\text{el}} &= \int_{V_*^{\text{el}}} F_d [N]^\top r \, dr \, dz, \end{aligned} \quad (18)$$

де $[N]$ – матриця функцій форми скінченного елемента [15]; V_* – скінченна область, яка наближає нескінченний простір і зовнішня поверхня якої достатньо віддалена від тіла та заданої системи струмів;

$$\{\mu_c, \varepsilon_c, \gamma_t, F_c, F_d, E_\phi\} = \begin{cases} \{\mu, \varepsilon, \frac{\partial \gamma}{\partial t}, F_\gamma, -F_B, E_\phi^{(1)}\}, & (r, z) \in V, \\ \{\mu_0, \varepsilon_0, 0, 0, \frac{\partial j_\phi}{\partial t}, E_\phi^{(0)}\}, & (r, z) \in V_* \setminus V. \end{cases}$$

Отриману задачу Коші розв'язуємо з допомогою сім'ї однокрокових багатопараметричних алгоритмів, відомих під назвою методу Зенкевича – Вудда [16]. Методика розв'язування такої задачі у випадку, коли визначення напруженості електричного поля й температури проводимо з однакою кроком за часом, описана в [2]. Однак такий підхід може виявитись нераціональним з точки зору обчислювальних затрат, а за відсутності високопродуктивних обчислювальних систем сама можливість отримати розв'язок виглядає проблематичною [14].

У більшості використовуваних на практиці процесів термообробки зміна температури в тілі на один градус відбувається після десятків, сотень, а то й тисяч періодів T_ω коливання електромагнітної хвилі. Тому за один чи декілька періодів температурно залежні електрофізичні характеристики матеріалу практично не змінюються і нема сенсу заново обчислювати їх і всі необхідні для розрахунків матрично-векторні характеристики (18) для кожного моменту часу. Навіть у сильних полях (порядку 1 МА/м) крок Δt_T інтегрування задачі Коші (16) можна брати рівним T_ω без практичної втрати точності [13]. За джерела тепла у рівнянні теплопровідності в цьому випадку приймаємо усереднені за період тепловиділення, а розрахунок напруженості електричного поля упродовж періоду проводимо при характеристиках матеріалу, миттєві значення яких відповідають температурі на початку періоду.

Відповідно до зазначеного вище загальний алгоритм розв'язування задачі Коші (16), (17) виглядає так. За електрофізичними характеристиками матеріалу, які відповідають початковій температурі, з кроком $\Delta t_E = T_\omega / N$ (де $N \geq 16$) декілька періодів (до виходу на усталений режим) розв'язуємо задачу Коші (17), після чого переходимо до розв'язування задачі (16) з кроком Δt_T . Критерієм виходу ЕМП на усталений режим і переходу до визначення температури є виконання умови

$$\left| \frac{Q_*(k+1)T_\omega - Q_*(kT_\omega)}{Q_*(kT_\omega)} \right| < \chi_Q, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (19)$$

у кожному вузлі скінченного-елементного поділу, де

$$Q_*(k+1)T_\omega = \frac{1}{T_\omega} \int_{kT_\omega}^{(k+1)T_\omega} Q dt,$$

χ_Q – параметр, який характеризує досягнення збіжності. Якщо умова (19) виконується, переходимо до визначення температури із задачі Коші (16) з усередненими джерелами, потужність яких визначена упродовж останнього, $(k+1)$ -го, періоду.

Критерій зворотного переходу від обчислень температури до визначення параметрів ЕМП побудовано на кількісній оцінці змін електрофізичних параметрів із змінами температури. Обчислення температурного поля з тими ж самими джерелами тепла продовжуємо доти, доки для кожного вузла скінченного-елементного поділу виконуються умови

$$\left| \frac{\gamma(T^{i+1}) - \gamma(T^i)}{\gamma(T^i)} \right| < \chi_\gamma, \quad \left| \frac{\mu(T^{i+1}) - \mu(T^i)}{\mu(T^i)} \right| < \chi_\mu, \\ \left| \frac{\varepsilon(T^{i+1}) - \varepsilon(T^i)}{\varepsilon(T^i)} \right| < \chi_\varepsilon, \quad (20)$$

де T^i, T^{i+1} – відповідно значення температури у вузлі у момент часу t_i (коли відбувся перехід від розв'язування задачі (17) до задачі (16)) і в поточний момент часу. Якщо максимальні відносні зміни якоїсь із характеристик досягли заданого порогу $\chi_\varepsilon, \chi_\mu$ чи χ_γ , це означає, що попередньо обчислені усереднені тепловиділення вже не відповідають поточному значенню температури й необхідно переходити на обчислення параметрів ЕМП при нових значеннях електрофізичних характеристик.

Визначені на першому етапі розподіли температури та параметри, які характеризують ЕМП (на основі яких визначають пондеромоторні сили), є вхідними даними для дослідження процесу деформування.

Відповідно до теорії неізотермічного пружнопластичного течіння процес деформування розглядаємо покровоко. Пондеромоторні сили й розподіл температури у тілі, починаючи із заданих величин при $t = 0$, змінюються на відповідні прирости на кожному кроці навантаження так, що до завершення процесу деформування вони приймають свої кінцеві значення. На кожному кроці за цими приростами визначаємо прирости переміщень, деформацій і напружень, які підсумовуємо з отриманими на попередніх кроках. Так крок за кроком, як наслідок, отримуємо історію зміни термомеханічного стану тіла.

Прирости переміщень на черговому кроці навантаження $[t_j, t_j + \Delta t_j]$ визначаємо зі скінченно-елементного рівняння [1, 3]

$$[\mathbf{K}_{ep}]\{d\mathbf{q}\} = \{d\mathbf{F}\} + \{d\mathbf{P}\} + \{d\mathbf{R}\}, \quad (21)$$

де $\{d\mathbf{q}\}$ – глобальний вектор приростів вузлових переміщень; матрично-векторні характеристики $[\mathbf{K}_{ep}]$, $\{d\mathbf{F}\}$, $\{d\mathbf{P}\}$, $\{d\mathbf{R}\}$ отримуємо через підсумовування відповідних характеристик окремих елементів:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{ep}^{el}] &= \int_{V^{el}} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{A}]^T [\mathbf{C}]^{t_j + \Delta t_j} [\mathbf{A}] [\mathbf{N}] r dr dz, \\ \{d\mathbf{P}\}^{el} &= \int_{V^{el}} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{A}]^T ([d\mathbf{C}](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon_p\}) + \{z\}dT) r dr dz + \\ &\quad + \int_{\Gamma_\sigma^{el}} [\mathbf{N}]^T \{d\mathbf{p}\} r d\xi, \\ \{d\mathbf{R}\}^{el} &= \int_{V^{el}} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{A}]^T [\mathbf{N}] [\mathbf{A}] \{d\varepsilon_T\} r dr dz, \\ \{d\mathbf{F}\}^{el} &= \int_{V^{el}} [\mathbf{N}]^T \{d\mathbf{F}\} r dr dz. \end{aligned} \quad (22)$$

Ітераційні процедури розв'язування нелінійного скінченно-елементного рівняння (21) будемо на основі комбінованого використання методів змінних параметрів жорсткості та додаткових напружень [15].

За відомих приростів переміщень на даному кроці прирости деформацій і напружень визначаємо за допомогою геометричних (13) і фізичних (12) співвідношень.

Черговий крок пружнопластичного аналізу проводимо тоді, коли за час, який пройшов з моменту попереднього розрахунку напруженого стану, розподіл температури чи пондеромоторних сил у тілі достатньо змінився, тобто, якщо хоча б в одній точці тіла

$$|T^j - T^{j-1}| > \chi_T, \quad \frac{|\mathbf{F}_*^j - \mathbf{F}_*^{j-1}|}{|\mathbf{F}_*^j|} > \chi_F, \quad (23)$$

де T^j , T^{j-1} , \mathbf{F}_*^j , \mathbf{F}_*^{j-1} – значення температури й усереднених за період пондеромоторних сил у даний момент часу та в момент попереднього розрахунку напруженого стану; χ_T , χ_F – числові параметри, які характеризують допустиму величину зростання температури і пондеромоторних сил за крок навантаження.

Крок пружнопластичного аналізу, як бачимо, вибирається автоматично (визначається параметрами χ_T і χ_F). Крок Δt_T інтегрування рівняння (16) у процесі розрахунків також змінюється, якщо хоча б в одному вузлі скінченно-елементного поділу тіла не виконується умова

$$\chi_{T_1} < |T^k - T^{k-1}| < \chi_{T_2}, \quad (24)$$

де T^{k-1} , T^k – відповідно значення температури в точці на початку ($t = t_{k-1}$)

та в кінці кроку ($t = t_{k-1} + \Delta t_T$). Якщо зміна температури за крок Δt_T у якомусь вузлі менша ніж χ_{T_1} , крок Δt_T подвоюється, і відповідно, якщо ця різниця перевищує значення χ_{T_2} , крок Δt_T удвічі зменшується.

Формулювання задачі та запропонована методика її розв'язування покладені в основу розробленої системи комп'ютерного моделювання фізико-механічних процесів у виробках з електропровідних матеріалів за умов їх індукційної обробки.

Числова реалізація. Розглянемо процес високотемпературної індукційної обробки вільного від зовнішнього механічного навантаження циліндричного тіла радіуса R , довжини $2L$ ($V = \{(r, z) : r \leq R, |z| \leq L\}$), виготовленого з маловуглецевої конструкційної сталі С30, електро-, теплофізичні й фізико-механічні характеристики якої і їх залежності від температури наведені в [7–9, 13]. Тіло при нагріванні перебуває в коаксіальному з ним кільцевому індукторі, який моделює циліндрична поверхня радіуса R_i та довжини $2L_i$ ($r = R_i, |z| \leq L_i$). Коли в області перерізу $z = 0$ тіло нагрівається до температури $T \geq T_g$, струм вимикаємо, після чого тіло охолоджується через конвективний теплообмін із середовищем, температура якого T_s .

Впливом пондеромоторних сил на напружений стан нехтуємо, а тепловідлення визначаємо за формулою $Q = \mathbf{jE}$.

Кількісні дослідження проводили для параметрів: $R = 0.01$ м; $L = 0.03$ м; $R_i = 0.012$ м; $L_i = 0.001$ м; $J_0 = 10^6$ А/м²; $\nu = 15$ та $\nu = 50$ кГц; $\eta = 10^4$; $T_g = 850^\circ\text{C}$; $T_0 = T_s = 20^\circ\text{C}$; $\beta = 13$ Вт/(м²К) – при нагріванні; залежність $\beta = \beta(T)$ після вимкнення струму відповідала умовам охолодження масляним душем [5].

Залежність фізико-механічних характеристик від температури та між індукцією і напруженістю магнітного поля апроксимували за допомогою інтерполяційних сплайнів, побудованих за точками реальних кривих, які описують поведінку матеріалів в ЕМП.

Кроки інтегрування рівнянь Максвелла та теплопровідності за часом та інші параметри методу приймали наступними:

$$\Delta t_E = T_w/64; \Delta t_T = 0.01 \text{ с (для } \nu = 50 \text{ кГц); } \Delta t_T = 0.05 \text{ с (для } \nu = 15 \text{ кГц);}$$

$$\chi_Q = \chi_\gamma = \chi_\mu = 0.05; \chi_T = 5^\circ\text{C}; \chi_{T_1} = 1.5^\circ\text{C}; \chi_{T_2} = 15^\circ\text{C}.$$

При розрахунках використовували ізопараметричні біквадратичні скінченні елементи [15]. Нескінченний простір заміняли скінченною областю $\{r \leq R_0, |z| \leq L_0\}$, на границі якої задавали нульові граничні умови на напруженість електричного поля (наближення умов (9)). Стійка збіжність розв'язків у тілі досягалась вже z/L при $R_0 = 0.03$ м та $L_0 = 0.05$ м.

Оцінку збіжності отриманих розв'язків проводили на основі практичного критерію порівняння результатів на різних поділах області на елементи та часові проміжки.

На рис. 1 показані ізолінії амплітуди напруженості електричного поля у системі тіло – середовище в момент часу $t = 27$ с, коли на поверхні тіла у

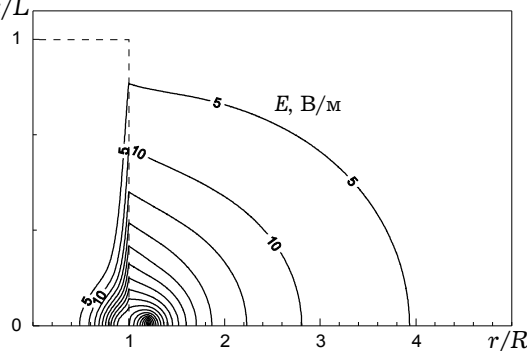


Рис. 1

перерізі $z = 0$ досягається температура Кюрі $T_K = 770^\circ\text{C}$ (при $\nu = 50$ кГц). З огляду на умови симетрії розглядали лише половину області (в даному випадку тіло поділено на 40×120 елементів; розміри елементів у середовищі в напрямі від поверхні тіла зростали за геометричною прогресією). Розподіли амплітуди напруженості електричного поля вздовж радіуса в перерізі $z = 0$ для моментів часу $t = 0.01, 10, 27, 28, 30, 60, 84$ с наведено на рис. 2 кривими 1–7.

На рис. 3 кривими 1–3 показано зміни температури в часі у точках тіла з координатами $(0, 0)$, $(R, 0)$, (R, L) для $\nu = 15$ кГц (суцільні лінії) та $\nu = 50$ кГц (штрихові). Як бачимо, з втратою феромагнітних властивостей при температурі T_K нагрівання тіла сповільнюється (при незмінній потужності індуктора). Нагрівання поверхні сповільнюється на деякий час, необхідний для прогрівання тіла по товщині до температури T_K (для меншої частоти цей процес більш яскраво виражений). При цьому повний час процесу індукційного нагрівання тіла становить 84 с для $\nu = 50$ кГц (511 с для $\nu = 15$ кГц).

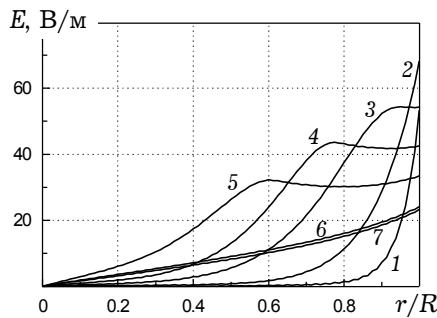


Рис. 2

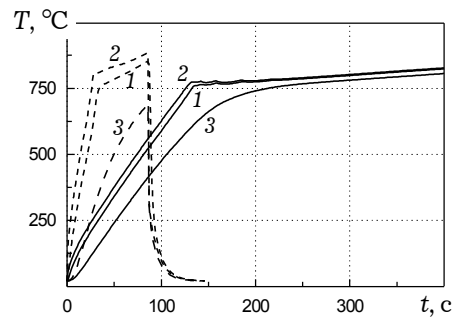


Рис. 3

На рис. 4, 5 та 6 відповідно наведено розподіли залишкових напружень у тілі, у перерізі $z = 0$ і на його бічній поверхні (σ_i – інтенсивність напружень; штриховими лініями показано результати для $\nu = 50$ кГц).

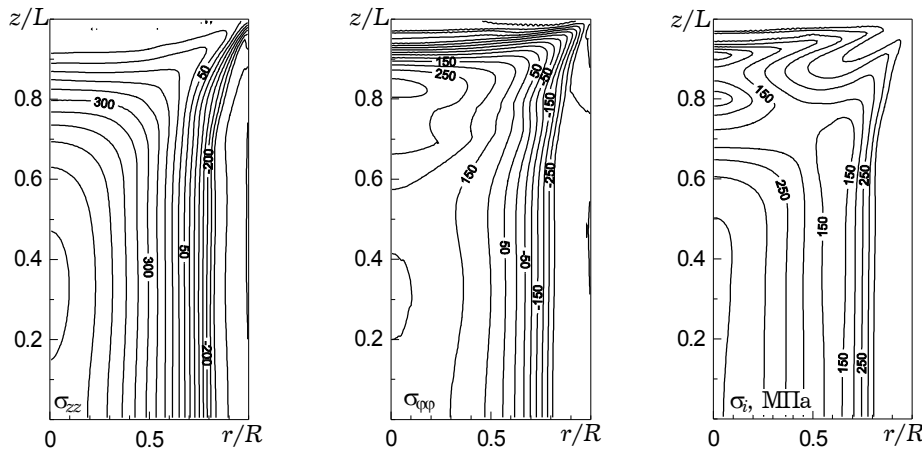


Рис. 4

У процесі нагрівання тіла струмом з частотою $\nu = 15$ кГц пластичних деформацій не виникає (тіло встигає добре прогріватись по товщині та по висоті за рахунок процесу теплопровідності). Якщо охолодити тіло з тим же коефіцієнтом тепловіддачі, що й при нагріванні, залишкових напружень у ньому не буде.

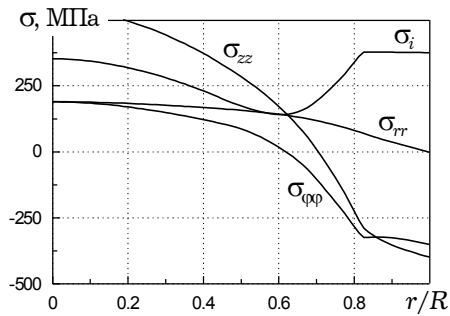


Рис. 5

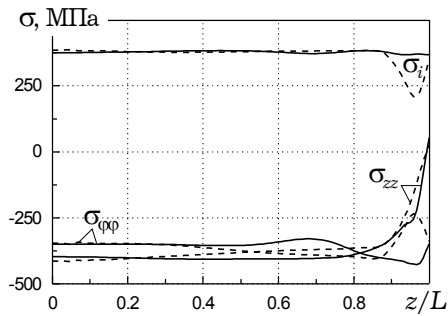


Рис. 6

Зазначимо, що повний час розв'язування даної задачі за запропованою методикою на комп'ютері з процесором ATHLON-2000 складав 20 год 24 хв. При розв'язуванні цієї ж задачі без використання різних кроків інтегрування рівнянь електродинаміки, теплопровідності та термомеханіки за часом за 20 год. процесорного часу було отримано розв'язок лише до моменту часу 0.03с. Якщо врахувати, що для $\nu = 50$ кГц повний цикл нагрівання – охолодження тривав 135с (див. рис. 3), можливість розв'язати таку задачу за однакових кроків інтегрування рівнянь електродинаміки, теплопровідності та термомеханіки за часом стає малоімовірною.

Висновки. Запропоновано підхід до чисельного розв'язування задач пружнопластичності термочутливих тіл із різними електропровідністю й здатністю до намагнічування за умов дії квазіусталеного зовнішнього ЕМП, який дозволяє сумістити в єдиному алгоритмі процес обчислення параметрів взаємозв'язаних електромагнітного та механічного полів у тілі з різними кроками числового інтегрування. На основі цього підходу розроблена відповідна система комп'ютерного моделювання електромагнітних, теплових і механічних процесів в електропровідних тілах за вказаних умов. Наявність такого програмного забезпечення дозволяє отримувати розв'язки складних нелінійних задач (розв'язування яких за нераціональної організації обчислювального процесу з використанням цих же числових методів за існуючих обчислювальних систем є практично неможливим). Нестационарне формулювання задачі надає можливість враховувати нелінійні властивості матеріалів із складною електро-, теплофізичною і механічною поведінкою і враховувати взаємозв'язність полів різної природи, а застосування методу скінченних елементів дозволяє розраховувати електромагнітні, теплові та механічні поля в областях складної геометричної форми, що може бути наступним етапом досліджень.

1. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д. Математичне моделювання індукційного нагріву електропровідних тіл // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2004. – Вип 8. – С. 41–55.
2. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д. Методика чисельного дослідження електромагнітних і температурних полів при індукційному нагріві електропровідних циліндричних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 4. – С. 140–148.
3. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д. Фізико-механічні процеси у феромагнетних тілах під час індукційної обробки // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – 40, № 2. – С. 29–35.
4. Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д., Казарян К. Б. Математичне моделювання термо-механічних процесів в осесиметричних електропровідних тілах за електромагнітних навантажень // Машинознавство. – 2003. – № 4. – С. 3–7.
5. Головин Г. Ф., Зимин Н. В. Технология термической обработки металлов с применением индукционного нагрева. – Ленинград: Машиностроение, 1979. – 120 с.
6. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – Москва: Мир, 1986. – 319 с.
7. Преображенский А. А. Магнитные материалы и элементы. – Москва: Высш. шк., 1976. – 336 с.

8. *Сосуды и трубопроводы высокого давления: Справочник* / Под ред. Е. Р. Хисматулина. – Москва: Машиностроение, 1990. – 384 с.
9. *Таблицы физических величин: Справочник* / Под ред. И. К. Кикоина. – Москва: Атомиздат, 1976. – 1008 с.
10. Allen D. H., Heisler W. E. A theory for analysis of thermoplastic materials // *Comput. & Struct.* – 1981. – **13**. – P. 129–135.
11. Bay F., Labbe V., Favennec Y., Chenot J. L. A numerical model for induction heating processes coupling electromagnetism and thermomechanics // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 2003. – **58**, No. 6. – P. 839–867.
12. Gaczkiewicz A., Kasperski Z. *Modele i metody matematyczne w zagadnieniach brzegowych termomechaniki ciał przewodzących.* – Opole: Politechnika Opolska, 1999. – 367 s.
13. Skoczkowski T., Kalus M. The mathematical model of induction heating of ferromagnetic pipes // *IEEE Trans. Magnetics.* – 1989. – No. 3. – P. 2745–2750.
14. Turowski J. *Elektrodynamika techniczna.* – Warszawa: Wyd-wo Nauk-Techn., 1982. – 463 s.
15. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. *Finite Element Method: V. 1. The Basis.* – London: Butterworth Heinemann, 2000. – 689 p.
16. Zienkiewicz O. C., Wood W. L., Nine N. W. A unified set of single step algorithm. Part 1: General formulation and applications // *Int. J. Numer. Meth. Eng.* – 1984. **20**. – P. 1529–1552.

МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ, ТЕМПЕРАТУРНЫХ И МЕХАНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПРИ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОМ ИНДУКЦИОННОМ НАГРЕВЕ ЭЛЕКТРОПРОВОДНЫХ ТЕЛ

Предложена методика определения параметров нестационарных электромагнитных, тепловых и термомеханических процессов в электропроводных осесимметричных телах при высокотемпературном индукционном нагреве. Для получения решения использованы метод конечных элементов и семейство простых одношаговых конечно-разностных алгоритмов с разными шагами интегрирования по времени составляющих задач. В качестве примера рассмотрен процесс индукционного нагрева конечного цилиндра из ферромагнитной стали.

NUMERICAL ANALYSIS OF ELECTROMAGNETIC, THERMAL AND MECHANICAL FIELDS IN ELECTROCONDUCTIVE SOLIDS SUBJECTED TO HIGH-TEMPERATURE INDUCTION HEATING

The method for mathematical and computer simulation of non-stationary electromagnetic, thermal and mechanical processes in electroconductive axisymmetrical solids subjected to high-temperature induction heating is proposed. The problem is solved by finite element method and a family of simple one-step finite difference algorithms with different time step integration of electromagnetic, thermal and mechanical problems. The method is applied to solving the problem of induction heating of a finite ferromagnetic steel cylinder.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

Одержано
17.01.05

² Політехніка Опольська, Опольце, Польща