

## ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ ТЕРМОЧУТЛИВОГО ПІВПРОСТОРУ ВІД НАГРІВАННЯ МИТТЄВИМ ЛІНІЙНИМ ДЖЕРЕЛОМ ТЕПЛА

Запропоновано спосіб розв'язування нелінійної нестационарної задачі теплопровідності для термочутливого півпростору при його нагріванні миттєвим лінійним джерелом тепла та наявності конвективного теплообміну на його поверхні. Для визначення температурного поля проведено двоетапну лінеаризацію (часткову – шляхом введення змінної Кірхгофа та остаточної – методом лінеаризуючих параметрів) вихідної задачі. Для отриманої лінійної задачі на змінну Кірхгофа розвинуто підхід, що полягає у побудові розв'язку одновимірної нестационарної задачі шляхом розвинення за кратними інтегралами ймовірності. Визначено розподіл температурного поля півпростору, а також вплив на нього термочутливості матеріалу.

Оскільки теплофізичні характеристики матеріалів залежать від температури (термочутливі тіла), то математичні моделі, що враховують цю залежність, більш адекватно описують реальні процеси розповсюдження в них тепла. Сформульовані на їх основі крайові задачі математичної фізики є нелінійними і переважно вимагають вдосконалення існуючих та розробки нових методів їх розв'язування. Стан досліджень температурних полів у термочутливих тілах висвітлено в працях [1, 7, 11–13].

У цій роботі на основі спільного використання результатів праць [3, 12] пропонується підхід до розв'язування нестационарної задачі теплопровідності для термочутливого напівбезмежного тіла при його нагріванні миттєвим лінійним джерелом тепла за наявності конвективного теплообміну на обмежуючій поверхні. Підхід полягає у наступному: спочатку проводиться часткова лінеаризація вихідної задачі шляхом введення змінної Кірхгофа та остаточної лінеаризація – методом лінеаризуючих параметрів [12]; отримана лінійна задача на змінну Кірхгофа розбивається на узагальнену задачу Коші та нестационарну задачу типу теплопровідності, до якої застосовано перетворення Ганкеля і підхід [3], суть якого – побудова розв'язку одновимірної нестационарної задачі типу теплопровідності шляхом розвинення за кратними інтегралами ймовірності.

**Постановка задачі.** Розглянемо термочутливий півпростір  $z \geq 0$ ,  $0 \leq r < \infty$ , на лінії  $r = 0$  якого в початковий момент часу миттєво виділяється деяка кількість тепла  $Q$ . Початкова температура півпростору дорівнює  $t_p$ . Через поверхню  $z = 0$  відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем температури  $t_c$ .

Знаходження розподілу температури такого півпростору у довільний момент часу зводиться до розв'язання нелінійної задачі теплопровідності [6]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial z} \right) = c_v(t) \frac{\partial t}{\partial \tau} - \frac{Q}{2\pi r} \delta(r) \delta(\tau), \quad (1)$$

$$\lambda_t(t) \frac{\partial t}{\partial z} \Big|_{z=0} - \alpha(t) \Big|_{z=0} (t - t_c) = 0, \quad \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty}} t = t_p, \quad \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad (2)$$

$$t \Big|_{\tau=0} = t_p, \quad (3)$$

де  $\tau$  – час;  $\delta(\cdot)$  – дельта-функція Дірака [8];  $\alpha$  – коефіцієнт теплообміну з поверхні  $z = 0$ .

**Побудова розв'язку задачі.** Залежні від температури коефіцієнт теплопровідності  $\lambda_t(t)$  і об'ємну теплоємність  $c_v(t)$  матеріалу півпростору по-

дамо у вигляді

$$\chi(t) = \chi_0 \chi^*(T), \quad (4)$$

де множники з індексом «0» є сталими і мають відповідні розмірності, а їх співмножники – функції від безрозмірної температури  $T = t/t_0$ ,  $t_0$  – довільно вибрана опорна температура.

Введемо в розгляд змінну Кірхгофа

$$\theta = \int_{T_p}^T \lambda_t^*(T) dT, \quad \text{де} \quad T_p = \frac{t_p}{t_0}, \quad (5)$$

і будемо вважати, що матеріал півпростору має просту нелінійність, тобто відношення коефіцієнта теплопровідності до об'ємної теплоємності незначно залежить від температури, а тому коефіцієнт температуропровідності  $a(T) = \lambda_t(T)/c_v(T)$  можна вважати сталим, що має місце для багатьох теплоізоляційних матеріалів, шамоту, графіту, деяких марок сталей, чистих металів [6, 10, 15]. Внаслідок цього з (1)–(3) отримуємо таку крайову задачу на змінну  $\theta$ :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{a_0} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{Q}{2\pi t_0 \lambda_t^0} \frac{\delta(r)}{r} \delta(\tau), \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0} - \frac{\alpha}{\lambda_t^0} (T(\theta) - T_c) \Big|_{z=0} = 0, \quad (7)$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty}} \theta = 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0, \quad \theta \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (8)$$

Тут  $T(\theta)$  – вираз температури через змінну Кірхгофа  $\theta$ , визначений з інтегрального рівняння (5);  $T_c = t_c/t_0$ ;  $a_0$  – коефіцієнт температуропровідності.

Введення змінної Кірхгофа та зроблене припущення щодо властивостей матеріалу лише частково лінеаризувало вихідну задачу. Внаслідок цього нелінійність зосередилася в одному місці – у виразі температури  $T(\theta)$  на поверхні  $z = 0$  в умові, отриманій з умови конвективного теплообміну. Остаточну лінеаризацію задачі здійснимо одним із двох розроблених [9, 11, 12, 14] варіантів методу лінеаризуючих параметрів, який, на думку авторів, є універсальнішим і зручним у застосуванні. Суть його полягає в тому, що остаточна лінеаризація умови (7) здійснюється шляхом заміни  $T(\theta)$  лінійним виразом, що містить так званий «лінеаризуючий параметр». Після знаходження розв'язку отриманої лінійної задачі цей параметр ітераційно підбирається так, щоб із заданою точністю виконувалася нелінійна умова (7). Отже, згідно зі сказаним для остаточної лінеаризації вводимо заміну

$$T(\theta) = (1 + \alpha) \theta,$$

де  $\alpha$  – деякий поки що невідомий параметр (лінеаризуючий параметр). Тоді умова теплообміну (7) стає лінійною:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0} - \alpha^* (\theta - T_c^*) \Big|_{z=0} = 0, \quad (9)$$

де  $\alpha^* = \frac{\alpha}{\lambda_t^0} (1 + \alpha)$ ,  $T_c^* = (T_c - T_p)/(1 + \alpha)$ , що робить задачу (6), (8), (9) на змінну Кірхгофа  $\theta$  лінійною.

Для знаходження розв'язку задачі (6), (8), (9) дещо модифікуємо підхід, запропонований у [3]. Подамо  $\theta$  у вигляді суми двох доданків

$$\theta = u_1 + u_2,$$

де  $u_1$  – розв’язок узагальненої задачі Коші

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} = \frac{1}{a_0} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} - \frac{Q}{2\pi t_0 \lambda_t^0} \frac{\delta(r)}{r} \delta(\tau), \quad u_1|_{\tau=0} = 0, \quad (10)$$

а  $u_2$  – розв’язок такої нестационарної задачі типу теплопровідності:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = \frac{1}{a_0} \frac{\partial u_2}{\partial \tau}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=0} - \alpha^* (u_2 - T_c^*) \Big|_{z=0} = \left( -\frac{\partial u_1}{\partial z} + \alpha^* u_1 \right) \Big|_{z=0}, \quad (12)$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ r \rightarrow \infty}} u_2 = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial r} \Big|_{r=0} = \left( -\frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \Big|_{r=0}, \quad u_2|_{\tau=0} = 0. \quad (13)$$

Розв’язок задачі Коші (10) згідно з [2] запишеться у вигляді

$$u_1 = \frac{Q}{4\pi t_0 \lambda_t^0 \tau} e^{-r^2/(4a_0\tau)} \cdot S_+(\tau), \quad (14)$$

де  $S_+(\tau)$  – функція Гевісайда [8].

До задачі (11)–(13) застосуємо перетворення Ганкеля  $\bar{\theta} = \int_0^\infty r J_0(\xi r) \theta dr$

[5], де  $J_0(\cdot)$  – функція Беселя дійсного аргументу нульового порядку [17], і виконаємо заміну Больцмана [3]

$$\eta = z/2\sqrt{a_0\tau}. \quad (15)$$

Заміна (15) зводить рівняння (11) до диференціального рівняння із частинними похідними, розв’язок якого будується методом відокремлення змінних і подається у вигляді ряду [3]. В результаті розв’язок нестационарної задачі (11)–(13) запишеться у вигляді

$$\bar{u}_2(\eta, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n \tau^{n/2} e^{-\xi^2 a_0 \tau} i^n \operatorname{erfc}(\eta), \quad (16)$$

де  $i^n \operatorname{erfc}(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} i^{n-1} \operatorname{erfc}(t) dt$  – кратні інтеграли ймовірності [16]. Вибір

функцій  $i^n \operatorname{erfc}(\eta)$  забезпечує автоматичне виконання нульової початкової умови (третьої з (13)) та умов зникання функції  $u_2$  на нескінченності (першої з умов (13)).

Систему для знаходження виразів  $\bar{C}_n$  розв’язку (16) формуємо, задовольняючи умови (12) і порівнюючи вирази при однакових степенях  $\tau$ . Внаслідок цього отримуємо таку рекурентну систему для визначення коефіцієнтів у зображеннях Ганкеля:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{2n+1} &= (2\sqrt{a_0\alpha^*})^2 \bar{C}_{2n-1} + 2^{2n+1} \sqrt{a_0} \alpha^* T_c^* \frac{\delta(\xi)}{\xi} (\xi^2 a_0)^n, \\ \bar{C}_{2n+2} &= (2\sqrt{a_0\alpha^*})^2 \bar{C}_{2n} - 2^{2n+2} (\sqrt{a_0\alpha^*})^2 T_c^* \frac{\delta(\xi)}{\xi} (\xi^2 a_0)^n. \end{aligned} \quad (17)$$

Здійснивши в (17) обернене перетворення Ганкеля, знаходимо  $C_n$ :

$$C_n = (-1)^{n-1} (2\sqrt{a_0} \alpha^*)^n \left( T_c^* - \frac{Q}{4\pi t_0 \lambda_t^0 \tau} e^{-r^2/(4a_0\tau)} \right).$$

Тоді розв'язок нестационарної задачі на змінну  $\theta$  (6), (8), (9) матиме вигляд

$$\theta = \left( T_c^* - \frac{Q}{4\pi t_0 \lambda_t^0 \tau} e^{-r^2/(4a_0\tau)} \right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2\alpha^* \sqrt{a_0\tau})^n i^n \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{a_0\tau}} \right) + \frac{Q}{4\pi t_0 \lambda_t^0 \tau} e^{-r^2/(4a_0\tau)}. \quad (18)$$

Для перевірки застосовності запропонованого підходу було проведено порівняння розв'язку (18) з розв'язком задачі (6), (8), (9), отриманим методом інтегральних перетворень. У результаті застосування до (6), (8), (9) перетворення Лапласа за часом  $\tau$  і Ганкеля нульового порядку за координатою  $r$  [4, 5] отримаємо

$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} - \gamma^2 \bar{\theta} = -\frac{Q}{2\pi t_0 \lambda_t^0}, \quad \left. \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right|_{z=0} - \alpha^* \left( \bar{\theta} - \frac{\delta(\xi)}{\xi s} T_c^* \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \bar{\theta} = 0, \quad (19)$$

де  $s$  – параметр перетворення Лапласа;  $\gamma^2 = \xi^2 + \frac{s}{a_0}$ .

Розв'язок задачі (19) має вигляд

$$\bar{\theta} = \frac{\alpha^* e^{-\gamma z}}{\gamma + \alpha^*} \left[ \frac{\delta(\xi)}{\xi s} T_c^* - \frac{Q}{2\pi t_0 \lambda_t^0 \gamma^2} \right] + \frac{Q}{2\pi t_0 \lambda_t^0 \gamma^2}. \quad (20)$$

Здійснивши в (20) обернене перетворення Лапласа – Ганкеля, знаходимо змінну Кірхгофа

$$\theta = \left( T_c^* - \frac{Q e^{-r^2/(4a_0\tau)}}{4\pi t_0 \lambda_t^0 \tau} \right) \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{a_0\tau}} \right) - e^{\alpha^*(z + \alpha^* a_0\tau)} \operatorname{erfc} \left( \alpha^* \sqrt{a_0\tau} + \frac{z}{2\sqrt{a_0\tau}} \right) \right] + \frac{Q}{4\pi t_0 \lambda_t^0 \tau} e^{-r^2/(4a_0\tau)}. \quad (21)$$

Зауважимо наступне: якщо вираз  $\frac{\alpha^* e^{-z\sqrt{s/a_0}}}{s(\sqrt{s/a_0} + \alpha^*)}$  спочатку розвинути в

ряд за параметром  $s$  і застосувати до нього обернене перетворення Лапласа, то отримаємо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2\alpha^* \sqrt{a_0\tau})^n \cdot i^n \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{2\sqrt{a_0\tau}} \right)$ , що повністю співпадає з першим доданком розв'язку (18). Розв'язки (18), (21), хоча описуються різними аналітичними виразами, чисельно співпадають з точністю  $\approx 10^{-6}$ .

Знайдені розв'язки  $\theta$  є функціями від координат  $r, z$ , часу  $\tau$  і параметра  $\alpha$ . Вони задовольняють рівняння (6) та умови (8), (9) при будь-яких значеннях  $\alpha$ . Підберемо  $\alpha$  так, щоб із заданою точністю виконувалась умова (7). Практично обчислення температури у довільній точці і у будь-який момент часу проводимо за такою схемою:

- 1) розв'язавши рівняння (5) для конкретно заданої залежності коефіцієнта теплопровідності від температури, знаходимо вираз  $T(\theta)$ ;
- 2) задаємо деяке початкове значення параметра  $\alpha$  (переважно приймаємо його рівним нулеві);
- 3) за прийнятим значенням  $\alpha$  обчислюємо значення  $\theta$  і перевіряємо виконання умови (7);
- 4) за нев'язкою виконання умови (7) проводимо уточнення значення  $\alpha$  і продовжуємо обчислення до досягнення заданої точності.

**Числовий аналіз розв'язку.** Коефіцієнт теплопровідності матеріалу (4) як функцію від безрозмірної температури  $T$  вибирали у вигляді лінійної функції

$$\lambda_t(T) = \lambda_t^0(1 + k(T - T_p)). \quad (22)$$

Згідно з (5), враховуючи (22), температуру в півпросторі як розв'язок відповідного квадратного рівняння визначали за формулою

$$T = (\sqrt{1 + 2k\theta} - 1)/k + T_p. \quad (23)$$

Числовий аналіз температурного поля проводили у півпросторі зі сталі з опорним коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda_t^0 = 41.51 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$  і  $k = -0.3$ . Опорну температуру приймали рівною  $673 \text{ К}$  ( $t_0 = 673 \text{ К}$ ). Температуру зовнішнього середовища вважали рівною початковій температурі:  $t_c = t_p = 273 \text{ К}$ . Ввели безрозмірні величини  $\rho = r/\ell$ ,  $\zeta = z/\ell$ ,  $\text{Bi} = \alpha\ell/\lambda_t^0$ ,  $\text{Fo} = a_0\tau/\ell^2$ ,  $\text{Q}_b = \frac{\text{Q}a_0}{4\pi t_0 \lambda_t^0 \ell^2}$  (тут  $\ell$  – довільно вибраний лінійний розмір).

Результати розрахунків залежності розподілу безрозмірного температурного поля  $T$  від безрозмірної координати  $\rho$ , проведених з використанням (18), (23), зображено на рис. 1 для  $\zeta = 1$ ,  $\text{Fo} = 5$ ,  $\text{Q}_b = 5$  при значеннях  $\text{Bi} = 0.5, 2$ . Суцільною лінією показано розподіл температур у термочутливому півпросторі, а штриховою – у нетермочутливому півпросторі ( $T = \theta|_{x=0} + T_p$ ). Аналогічно позначено криві на рис. 2.

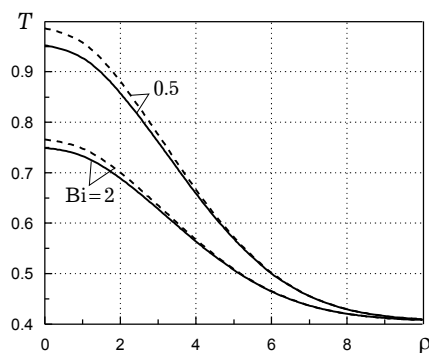


Рис. 1

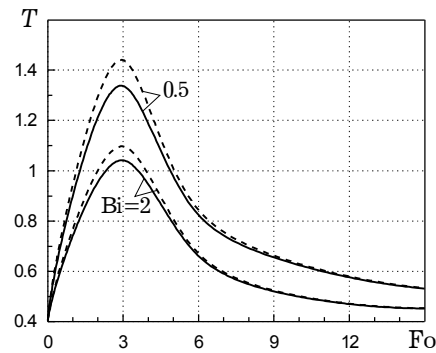


Рис. 2

На рис. 2 зображено графіки залежностей температурного поля (1)–(3) від безрозмірного часу  $\text{Fo}$  для  $\rho = 1$ ,  $\zeta = 1$ ,  $\text{Q}_b = 5$  при значеннях  $\text{Bi} = 0.5, 2$ .

Максимальна різниця між значеннями температури в півпросторі зі сталими та залежними від температури характеристиками при  $\text{Bi} = 0.5$  складає  $\approx 7\%$ . Зауважимо, що при  $\rho = 1$ ,  $\zeta = 1$ ,  $\text{Fo} = 5$ ,  $\text{Bi} = 0.5$  у розв'язку (18) достатньо було взяти всього 14 членів ряду.

Розроблену в роботі методику можна використовувати при розв'язуванні центрально-симетричних нелінійних нестационарних задач теплопровідності для напівбезмежних або складених з напівбезмежних областей термочутливих тіл з урахуванням конвективного теплообміну, а знайдені розв'язки нелінійних нестационарних задач теплопровідності дозволяють проводити якісний аналіз теплових процесів.

1. *Беллев Н. М., Рядно А. А. Математические методы теплопроводности.* – Киев: Вища шк., 1993. – 415 с.
2. *Владимиров В. С. Уравнения математической физики.* – Москва: Наука, 1976. – 528 с.

3. Горечко Н. О., Кушнір Р. М. Розрахунок квазістатичного термонапруженого стану напівбезмежних контактуючих тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 3. – С. 82–87.
4. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – Москва: Физматгиз, 1960. – 208 с.
5. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. – Москва: Высш. шк., 1965. – 466 с.
6. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – Москва: Наука, 1964. – 487 с.
7. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
8. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1968. – 720 с.
9. Кушнір Р. М., Попович В. С., Гарматій Г. Ю. Аналітично-чисельне розв'язування контактних задач термопружності для термочутливих тіл // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – **37**, № 6. – С. 39–44.
10. Недосека А. Я. Основы расчета сварных конструкций. – Киев: Вища шк., 1988. – 263 с.
11. Попович В. С., Гарматій Г. Ю. Аналітично-чисельні методи побудови розв'язків задач теплопровідності термочутливих тіл при конвективному теплообміні. – Львів, 1993. – 66 с. – (Препр. / АН України. Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; № 13-93).
12. Попович В. С., Махоркін І. М. Про розв'язування задач теплопровідності термочутливих тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 1. – С. 36–44.
13. Попович В. С., Федай Б. Н. Осесимметричная задача термоупругости многослойной термочувствительной трубы // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 1. – С. 97–103.
14. Попович В. С., Гарматій Г. Ю. Розв'язування нелінійних задач теплопровідності термочутливих тіл методом поетапної лінеаризації // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 137–141.
15. Постольник Ю. С., Огурцов А. П. Нелінійна прикладна термомеханіка. – Київ: НМЦ ВО МОНЦ, 2000. – 280 с.
16. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
17. Янке К., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – Москва: Наука, 1968. – 342 с.

#### ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ОТ НАГРЕВАНИЯ МГНОВЕННЫМ ЛИНЕЙНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

*Предложен способ решения нелинейной нестационарной задачи теплопроводности для термочувствительного полупространства, нагреваемого мгновенным линейным источником тепла при конвективном теплообмене на поверхности. Для определения температурного поля выполнена двухэтапная линейаризация (частичная – путем введения переменной Кирхгофа и окончательная – методом линейаризирующих параметров) исходной задачи. Для полученной линейной задачи относительно переменной Кирхгофа развит подход, идея которого состоит в построении решения одномерной нестационарной задачи путем разложения решения по кратным интегралам вероятности. Определено распределение температурного поля полупространства, а также влияние на него параметров термочувствительности материала.*

#### TEMPERATURE FIELD IN THERMOSENSITIVE HALF-SPACE HEATED BY INSTANTANEOUS LINEAR HEAT SOURCE

*An approach to solve the non-linear transient heat conductivity problem for thermosensitive half-space undergoing heat exchange with the environment is suggested. The two-phase linearization (partial linearization with introduction the Kirchhoff variable and final linearization using the linearizing parameter method) is carried out to determine transient temperature field of the original problem. The method, based on solving one-dimensional transient problem by multiple error functions expansion, is developed for the obtained linear Kirchhoff variable problem. The temperature field distribution in half-space is investigated. The effect of material thermosensitivity on this distribution is analysed.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
01.06.06