

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ РУЙНУВАННЯ ПЛАСТИН ІЗ СИСТЕМАМИ ТРІЩИН ЗА ДІЇ ДОВГОТРИВАЛИХ НАВАНТАЖЕНЬ, ПІДВИЩЕНИХ ТЕМПЕРАТУР І КОРОЗІЙНОГО СЕРЕДОВИЩА

*Сформульовано розрахункові моделі для визначення довговічності пластин із системами тріщин за дії довготривалих силових навантажень при наявності підвищених температур і корозійних середовищ. Ці моделі базуються на використанні відомих основних механізмів поширення тріщин повзучості, корозійного руйнування, першого закону термодинаміки (балансу енергетичних складових і швидкостей їх зміни) в металевій пластині, що містить систему макротріщин і піддається дії довготривалого розтягу і корозійного середовища за підвищених температур. Розглянуто випадок двоперіодичної системи тріщин.*

**Вступ.** При розробці методів розрахунку залишкового ресурсу і залишкової міцності елементів конструкцій за корозійно-механічного руйнування виникає необхідність дослідження корозійної тріщиностійкості конструкційних сталей і зон зварних з'єднань, що використовуються в металоконструкціях машин. Розглянемо деякі результати досліджень і загальні закономірності в області корозійно-механічної тріщиностійкості матеріалів.

Одна з особливостей визначення корозійно-механічної тріщиностійкості матеріалів обумовлена специфікою електрохімічної ситуації у вершині тріщини, що суттєво відрізняється від умов на поверхні випробовуваного зразка. Ступінь цієї відмінності для системи метал – середовище залежить [6, 7, 10, 11] від довжини тріщини, напружено-деформованого стану в її вершині, часу дії середовища, потенціалу зовнішньої поляризації та інших чинників. У зв'язку з цим середовище може по-різному впливати на формування зони передруйнування у вершині тріщини і, тим самим, на сам процес корозійно-механічного руйнування металу.

Розвиток корозійно-механічних тріщин залежить і від багатьох інших факторів [7], які негативно впливають на залишковий ресурс елементів конструкцій, що експлуатуються в корозійно агресивному середовищі. Всі ці фактори дослідники намагаються враховувати при визначенні залишкового ресурсу елементів конструкцій за дії корозійного середовища. Сформульовано ряд розрахункових моделей для визначення періоду докритичного росту корозійно-механічних тріщин в металевих матеріалах. Проте всі ці моделі стосуються випадків одинарних тріщин, але, як відомо, [7] елементи конструкцій в більшості випадків містять системи тріщин. Тому у цій роботі на основі [2, 3] побудовано розрахункові моделі для визначення залишкового ресурсу пластин з системами тріщин за дії довготривалого навантаження, підвищених температур і впливу корозійного середовища.

**1. Математична модель для випадку пластини з однією тріщиною.** Нехай пластина з прямолінійною тріщиною початкової довжини  $\ell_0$  перебуває під дією корозійного кислого середовища, підвищеної температури  $T_0$  і довготривалих статичних навантажень, що описуються силовим параметром  $p$  (рис. 1). При цьому вважаємо, що тріщина є макроскопічною, а зовнішні навантаження розтягу прикладено таким чином, що відносно лінії розміщення тріщини напружено-деформований стан є симетричним, тобто описується в околі її вершини тільки коефіцієнтом інтенсивності напружень  $K_I$ . Разом з тим приймаємо, що така пластина міститься в корозійному середовищі (з водневим показником  $pH_n$  і гальвано-потенціалом  $\phi_n$ ), яке проникає всередину тріщини і створює біля її вершини

уже свої параметри  $pH_B$ ,  $\phi_B$ , а механічна ситуація характеризується коефіцієнтом інтенсивності напружень  $K_{max}$  [6] (рис. 1). Задача полягає у визначенні часу  $t = t_*$ , коли в результаті повзучості і дії корозійного середовища за підвищеної температури тріщина підросте до критичного розміру  $l = l_*$ , і пластина зруйнується.

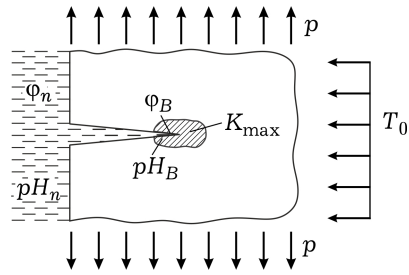


Рис. 1

Для розв'язання такої задачі насамперед побудуємо математичну модель, тобто математичні співвідношення, які описують цей процес. При цьому будемо вважати, що тріщина рухається неперервно при зміні свого розміру від початкового  $l = l_0$  до кінцевого  $l = l_*$ . Це припущення є коректним, оскільки реальний стрибкоподібний рух тріщини повзучості супроводжується стрибками малого розміру  $\Delta l_c$  за відносно великий час  $\Delta t_c$ . Разом з тим вважаємо, що рух тріщини буде стимулюватися двома механізмами: механізмом повзучості і корозійною деградацією зони передруйнування біля вершини тріщини, яка, в свою чергу, активізується механізмом анодного розчинення і її наводнення до концентрації водню  $C_0$  в результаті катодних процесів.

На основі результатів праць [2, 3] енергетичний баланс для елементарного стрибка росту тріщини запишемо так:

$$Q + A = W + \Gamma + K, \quad (1)$$

де  $A$  – робота зовнішніх сил, яку вважаємо сталою;  $W$  – енергія деформування тіла, яку подамо у вигляді

$$W = W_{sp} + W_{pl}^{(1)}(l) - W_{pl}^{(2)}(t). \quad (2)$$

Тут  $W_{sp}$  – пружна складова  $W$ ;  $W_{pl}^{(1)}(l)$  – частина енергії пластичного деформування, що залежить від довжини тріщини  $l$ ;  $W_{pl}^{(2)}(t)$  – частина енергії пластичного деформування, затрачена на пластичне деформування за сталої довжини тріщини під час інкубаційного періоду  $t = \Delta t_c$  підготовки її стрибка, яка залежить від часу  $t$ , концентрації водню  $C_0$  і генерується самим тілом;  $\Gamma$  – енергія руйнування тіла, яка залежить від довжини тріщини і часу  $t = \Delta t_c$ ;  $Q = \text{const}$  – теплова енергія, створена зовнішніми джерелами тепла;  $K$  – кінетична енергія, яка в розглядуваному випадку є несуттєвою і нею знехтуємо.

Оскільки виконується рівняння енергетичного балансу (1), то виконуватиметься рівняння балансу швидкостей зміни енергії:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma}{\partial t}. \quad (3)$$

Підставляючи вираз (2) у (3) і вважаючи, що  $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$  (зовнішні зусилля прикладені далеко від тріщини і не змінюються з часом), отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial l} [\Gamma - (A - W_{sp} - W_{pl}^{(1)})] \cdot \frac{dl}{dt} - \frac{\partial}{\partial t} (W_{pl}^{(2)} - \Gamma) \Big|_{t=\Delta t_c} = 0. \quad (4)$$

Звідси знайдемо швидкість поширення тріщини повзучості  $V = \frac{dl}{dt}$ :

$$V = \frac{d\ell}{dt} = \frac{\frac{\partial}{\partial t} (W_{pl}^{(2)} - \Gamma) \Big|_{t=\Delta t_C}}{\frac{\partial}{\partial \ell} [\Gamma - (A - W_{sp} - W_{pl}^{(1)})]}. \quad (5)$$

На основі результатів праць [2, 3] похідну за  $\ell$  від виразу в квадратних дужках у лівій частині (4) запишемо так:

$$\frac{\partial}{\partial \ell} [\Gamma - (A - W_{sp} - W_{pl}^{(1)})] = \gamma_f - \gamma_t. \quad (6)$$

Підставляючи співвідношення (6) у рівняння (5), отримаємо

$$V = \frac{d\ell}{dt} = \frac{\frac{\partial}{\partial t} (W_{pl}^{(2)} - \Gamma) \Big|_{t=\Delta t_C}}{\gamma_f - \gamma_t}. \quad (7)$$

Для повноти математичної моделі до рівняння (7) додаємо такі початкову і кінцеву умови:

$$t = 0 : \quad \ell(0) = \ell_0, \quad t = t_* : \quad \ell(t_*) = \ell_*, \quad (8)$$

а критичну довжину тріщини  $\ell_*$  визначаємо із енергетичного критерію

$$\gamma_t(\ell_*) = \gamma_f. \quad (9)$$

У співвідношеннях (8), (9)  $\gamma_t = \delta_t \sigma_t$  – питома робота пластичних деформацій в зоні передруйнування біля вершини тріщини;  $\gamma_f = \delta_{CC} \sigma_t$  – її критичне значення;  $\delta_t$  – розкриття у вершині тріщини;  $\delta_{CC}$  – його критичне значення за корозійного руйнування;  $t_*$  – час докритичного росту макротріщини;  $\sigma_t$  – усереднені нормальні напруження у зоні передруйнування.

Оскільки зона передруйнування пластично деформується під великими напруженнями  $\sigma_t$ , можна припустити, що під час підготовки стрибка тріщини більшість часу займатиме усталена повзучість, коли  $\dot{\varepsilon}_t = \text{const}$  або  $\dot{\delta}_t(x) = \text{const}$ . Тут  $\dot{\varepsilon}_t$  – швидкість зміни деформації в зоні передруйнування, а  $\dot{\delta}_t(x)$  – швидкість розкриття зони передруйнування [2, 3]. Для усталеної повзучості деформаційні характеристики  $\varepsilon$ ,  $\delta_t$  зони передруйнування біля вершини тріщини будуть визначатися таким чином:

$$\varepsilon(x, t, C_0) = \varepsilon(x, 0) + \dot{\varepsilon}(C_0)t, \quad \delta_t(x, t, C_0) = \delta_t(x, 0) + \dot{\delta}_t(C_0)t. \quad (10)$$

При довготривалому статичному навантаженні, підвищеній температурі і дії корозійного середовища тріщина буде поширюватися [2, 3] стрибками, довжини яких визначаємо так:

$$\Delta \ell_C \approx \alpha_0 \delta_t(0, 0, C_0), \quad (11)$$

де  $\alpha_0$  – константа, яка визначається із експерименту [2, 3]. Разом з тим на основі результатів праць [1, 8] довжину елементарного стрибка  $\Delta \ell_C$  тріщини представимо як суму елементарного поширення тріщини  $\ell_a$  за рахунок анодного розчинення і механічного стрибка  $\ell_m$  внаслідок механічного навантаження і наводнення за електрохімічної корозії:

$$\Delta \ell_C = \ell_a + \ell_m. \quad (12)$$

Використовуючи (11) і результати праць [1, 5], величини  $\ell_a$ ,  $\ell_m$  можемо визначити так:

$$\ell_a = \alpha_0 \frac{F}{mn} \int_0^{\Delta t} i(t) dt, \quad \ell_m = \alpha_0 (\delta_t - \xi), \quad \delta_{CC} = \delta_C - A_1 C_0 (\Delta t_C). \quad (13)$$

Тут  $F$  – число Фарадея;  $m$  – грам-еквівалентна вага металу;  $n$  – валентність металу;  $\xi$ ,  $A_1$  – константи, які визначаються із експерименту [1];  $i(t)$  – густина анодного струму на поверхні вершини тріщини;  $\delta_C$  – критичне значення  $\delta_t$  без корозії.

На основі результатів [1, 3], а також співвідношень (12) і (13) енергія руйнування буде визначатися таким чином:

$$\Gamma(t) = \sigma_t \alpha_0 (\delta_t - \xi) [\delta_C - A_1 C_0(t)]. \quad (14)$$

Використовуючи результати праці [8], зміну концентрації водню  $C_0(t)$  з часом  $\Delta t$  в зоні передруйнування для відносно невеликих часів подамо так:

$$C_0(\Delta t) \approx B \sqrt[4]{\Delta t_C i_{\max}}, \quad (15)$$

де  $B$  – константа, яка визначається із експерименту.

Як показують результати експериментальних досліджень (див., наприклад, [4]), для малих і середніх концентрацій водню  $C_0(t)$  величину  $\dot{\epsilon}_t(C_0)$ , як і  $\dot{\delta}_t(C_0)$ , можемо подати на основі (15) лінійною залежністю

$$\dot{\delta}_t(C_0) = \dot{\delta}_t(0) (1 + \alpha_1 B \sqrt[4]{\Delta t_C i_{\max}}), \quad (16)$$

де  $\alpha_1$  – константа, яка визначається із експерименту.

У рівняння (16) входить тривалість часу  $t = \Delta t_C$  інкубаційного періоду підготовки елементарного стрибка корозійно повзучої тріщини. Цю величину будемо визначати таким чином. Вважаємо, що тріщина почне поширюватися, коли максимальне розкриття в зоні передруйнування  $\delta_t(x, t, C_0)$  досягне критичного значення  $\delta_{CC}$ , тобто на основі співвідношень (10), (13) і (16) отримаємо наступне рівняння:

$$\delta_C - \delta_t(x, 0) = \dot{\delta}_t(0) \Delta t_C [1 + \alpha_1 B \sqrt[4]{\Delta t_C i_{\max}}] + A_1 B \sqrt[4]{\Delta t_C i_{\max}}. \quad (17)$$

Розв'язуючи рівняння (17) відносно величини  $\Delta t_C$  і вважаючи, що  $\alpha_1 B i_{\max}^{0.25} \ll 1$  і  $A_1 B i_{\max}^{0.25} \ll 1$ , отримаємо

$$\Delta t_C \approx \dot{\delta}_t^{-1}(0) (\delta_C - \delta_t(0)). \quad (18)$$

Оскільки величина  $\Delta l_C$  є достатньо малою, то очевидно, що на такій малій віддалі від вершини тріщини  $\delta_t(x, t, C_0)$  змінюється незначно і відносно  $x$  її можна наближено вважати константою, тобто  $\delta_t(x, t, C_0) \approx \delta_t(0, t, C_0)$ ,  $0 \leq x \leq \Delta l_C$ . Тоді на основі (10) і (14), а також результатів праць [2, 3], складові рівняння (7) можемо записати так:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Gamma(t)}{\partial t} \right|_{t=\Delta t_C} &\approx -\frac{1}{4} \alpha_0 \sigma_t A_1 B \sqrt[4]{(\Delta t_C)^{-3} i_{\max}} (\delta_t - \xi), \\ \left. \frac{\partial W_{pl}^{(2)}(t, C_0)}{\partial t} \right|_{t=\Delta t_C} &\approx \\ &\approx 2 \alpha_0 \sigma_t \dot{\delta}_t(0) [\delta_t(0) + \dot{\delta}_t(0) \cdot \Delta t_C (1 + \alpha_1 B \sqrt[4]{\Delta t_C i_{\max}})]. \end{aligned} \quad (19)$$

Підставляючи співвідношення (10), (18) і (19) у рівняння (7), для визначення періоду  $t = t_*$  докритичного росту тріщини повзучості з урахуванням дії корозійного середовища за підвищеної температури отримаємо таке кінетичне рівняння:

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{2\alpha_0\delta_C\dot{\delta}_t(0)}{\delta_C - \delta_t(0)} + \frac{\alpha_0 A_1 B \dot{\delta}_t^{0.75}(0) i_{\max}^{0.25} (\delta_t(0) - \xi)}{4[\delta_C - \delta_t(0)]^{1.75}} + 2\alpha_0\alpha_1 B \dot{\delta}_t^{0.75}(0) \sqrt[4]{i_{\max}(\delta_C - \delta_t(0))} \quad (20)$$

з початковою і кінцевою умовами

$$t = 0 : \quad \ell(0) = \ell_0, \quad t = t_* : \quad \ell(t_*) = \ell_*, \quad \delta_t(\ell_*) = \delta_C. \quad (21)$$

У випадку, коли тріщина є макроскопічною [2, 3] і дія механізму анодного розчинення від корозійного середовища є незначною, математична модель (20), (21) набуде вигляду

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{2\alpha_0\dot{\delta}_t(0)}{1 - K_I^2 K_{IC}^{-2}} + 2\alpha_0\alpha_1 B (\sigma_t E)^{-0.25} \dot{\delta}_t^{0.75}(0) \sqrt[4]{i_{\max}(K_{IC}^2 - K_I^2)}, \quad (22)$$

$$t = 0 : \quad \ell(0) = \ell_0, \quad t = t_* : \quad \ell(t_*) = \ell_*, \quad K_I(\ell_*) = K_{IC}. \quad (23)$$

У кінетичне рівняння (22) поширення корозійно повзучої тріщини входить величина  $\dot{\delta}_t(0)$  – швидкість розкриття вершини тріщини повзучості за підвищеної температури. Цю величину запишемо аналогічно, як у праці [3]:

$$2\alpha_0\dot{\delta}_t(0) = A_{2t}(K_I K_{IC}^{-1})^{2m}. \quad (24)$$

Тут  $A_{2t}$ ,  $m$  – характеристики повзучості матеріалу за підвищеної температури, які визначаються із експерименту [3]. З урахуванням (24) математичну задачу (22), (23) запишемо так:

$$\frac{d\ell}{dt} \approx \frac{A_{2t}(K_I K_{IC}^{-1})^{2m}}{1 - K_I^2 K_{IC}^{-2}} + B_1 (K_I K_{IC}^{-1})^{1.5m} \sqrt[4]{1 - K_{IC}^{-2} K_I^2},$$

$$B_1 = (2\alpha_0)^{0.25} \alpha_1 B (\sigma_t E)^{-0.25} A_{2t}^{0.75} i_{\max}^{0.25} \sqrt{K_{IC}}, \quad (25)$$

$$t = 0 : \quad \ell(0) = \ell_0, \quad t = t_* : \quad \ell(t_*) = \ell_*, \quad K_I(\ell_*) = K_{IC}. \quad (26)$$

Таким чином, якщо із експерименту знайдено характеристики  $B_1$ ,  $K_{IC}$ ,  $m$ ,  $A_{2t}$ , то період  $t = t_*$  докритичного росту в металевій пластині тріщини повзучості за дії корозійного середовища підвищеної температури визначимо за допомогою математичної моделі (25), (26).

**2. Формулювання розрахункової моделі для випадку наскрізної тріщини.** Розглянемо нескінченну пластину з прямолінійною тріщиною довжини  $2\ell_0$ , яка розтягається перпендикулярно до лінії розміщення тріщини в нескінченно віддалених точках довготривалими рівномірно розподіленими зусиллями інтенсивності  $p$  і перебуває під дією корозійного середовища за підвищеної температури (див. рис. 2). Задача полягає у визначенні періоду  $t = t_*$  докритичного росту в пластині корозійно повзучої тріщини, за який вона досягне критичної величини  $\ell(t_*) = \ell_*$ , і пластина зруйнується.

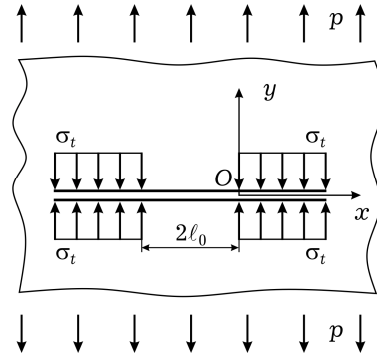


Рис. 2

Розв'язок такої задачі здійснюємо інтегруванням рівняння (25) за умов (26), приймаючи для задачі Гріффітса  $K_I = p\sqrt{\pi\ell}$ . В результаті для визначення періоду  $t = t_*$  докритичного росту в пластині тріщини повзучості за дії корозійного середовища підвищеної температури отримаємо таку формулу:

$$t_* \approx \int_{\ell_0}^{\ell_*} \frac{(1 - K_I^2 K_{IC}^{-2}) d\ell}{A_{2t} (K_I K_{IC}^{-1})^{2m} + B_1 (K_I K_{IC}^{-1})^{1.5m} \sqrt[4]{1 - K_{IC}^{-2} K_I^2 (1 - K_I^2 K_{IC}^{-2})}}. \quad (27)$$

Застосуємо формулу (27) для визначення залежності періоду  $t = t_*$  докритичного росту корозійно повзучої тріщини в нескінченній пластині (аналог задачі Гріффітса) від початкового розміру тріщини  $\ell_0$  для випадків, коли пластина виготовлена зі сталі-20 і експлуатується у воді температури  $130 \div 150^\circ\text{C}$  [9]. Обчислення виконано для таких характеристик матеріалу і параметрів навантаження [9]:  $m = 1.54$ ,  $A_{2t} = 1.21 \cdot 10^{-3}$  м/год,  $B_1 = 8.37 \cdot 10^{-3}$  м/год,  $K_{IC} = 100$  МПа  $\sqrt{\text{м}}$ ,  $p = 120$  МПа. На рис. 3 побудовано залежності  $t_* \sim \ell_0$  з урахуванням дії корозійно агресивного середовища (крива 1) і на повітрі (крива 2).

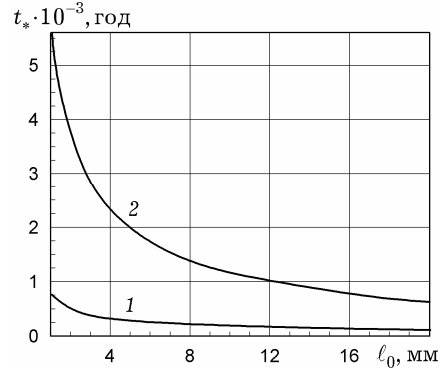


Рис. 3

Як бачимо на рис. 3, корозійне середовище зменшує період докритичного росту тріщин повзучості в пластинках (залишковий ресурс тонкостінних елементів конструкцій).

**3. Математична модель для випадку пластини з системою тріщин.** Розглянемо металеву пластину, послаблену системою  $m$  макроскопічних тріщин  $L_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , яка перебуває під дією довготривалого статичного навантаження із силовим параметром  $p$  та впливу корозійного середовища за підвищеної температури, яке створює на  $e$ -й поверхні вершини  $j$ -ї тріщин концентрацію  $C_{0j}^e$ ,  $e = 1, 2$ . Нехай конфігурація пластини та геометричне розміщення тріщин визначаються лінійними параметрами  $a_1, \dots, a_k$ , а геометрична конфігурація кожної тріщини – параметрами  $b_1, \dots, b_m$ .

Приймемо параметри  $a_q$  такими, що при  $a_q \rightarrow \infty$ ,  $q = 1, \dots, k$ , отримаємо необмежену пластину, послаблену однією тріщиною конфігурації  $b_j$ . Виберемо локальну систему координат  $O^{(j,e)} \rho^{(j,e)} \theta^{(j,e)}$  в  $e$ -й вершині кожної тріщини  $L_j$  (рис. 4) і позначимо через  $\Delta \ell_j^{(e)}$  приріст  $j$ -ї тріщини відповідно на її кінцях. Задача полягає у визначенні часу  $t = t_*$ , при досягненні якого довжина однієї з тріщин  $L_j$  підросте до критичного значення  $\ell^{(j)} = \ell_*^{(j)}$ , і пластина зруйнується.

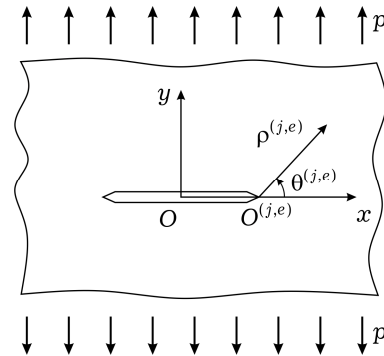


Рис. 4

Для розв'язання такої задачі зробимо узагальнення наведеного вище енергетичного підходу на цей випадок. Також скористаємося відомою [3] гіпотезою про те, що поширення повзучих тріщин в корозійному середовищі буде проходити в напрямку максимально можливих швидкостей росту тріщин. В результаті цього задача зведеться до розв'язування системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\ell^{(j,e)}}{dt} &= \frac{\partial W_{pl,2}^{(j,e)}}{\partial t} \Big|_{t=\Delta t_C} [\gamma_C - \gamma_t^{(j,e)}]^{-1}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta^{(j,e)}} \left[ \frac{\partial W_{pl,2}^{(j,e)}}{\partial t} \Big|_{t=\Delta t_C} [\gamma_C - \gamma_t^{(j,e)}]^{-1} \right] \Big|_{\theta^{(j,e)}=\theta_t^{(j,e)}} &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

з початковою і кінцевою умовами

$$\begin{aligned} t = 0: \quad \ell^{(j,e)}(0) &= \ell_0^{(j,e)}, \\ t = t_*, \quad \ell^{(j,e)}(t_*) &= \ell_*^{(j,e)}, \quad \gamma_t^{(j,e)}(\ell_*^{(j,e)}) = \gamma_C, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\max_j [\gamma_t^{(j,e)}(\ell_*^{(j,e)})(\gamma_C)^{-1}] = \gamma_t^{(j,e)}(\ell_*^{(j,e)})(\gamma_C)^{-1}. \quad (30)$$

Тут  $W_{pl,2}^{(j,e)}$  – частина роботи пластичних деформацій під час повзучості за розтягу зони передруйнування біля  $e$ -ї вершини тріщини  $L_j$ , яка виділяється за постійної довжини тріщини, генерується самим тілом і залежить тільки від часу  $t$  та концентрації водню  $C_{0j}^e$ ;  $\gamma_t^{(j,e)}$  – величина роботи пластичних деформацій в зоні передруйнування біля  $e$ -ї вершини тріщини  $L_j$ ;  $\gamma_C$  – її критичне значення;  $\theta_t^{j,e}$  – значення кутів  $e^{j,e}$ , що визначають напрямок поширення  $e$ -х кінців тріщини  $L_j$ ;  $\ell^{(j,e)}$  – критичне підростання  $e$ -го кінця тріщини  $L_j$  при руйнуванні пластини. Величини, які входять в (13)–(15), визначатимемо у такому вигляді [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{pl,2}^{(j,e)}(t, C_{0j}^e)}{\partial t} \Big|_{t=\Delta t_C} &= 2\alpha_0 \delta_C \sigma_t \frac{\partial}{\partial t} [\delta_{I\theta}^{(j,e)} \sigma_{0f}^{(j,e)} + \delta_{II\theta}^{(j,e)} \tau_{0f}^{(j,e)}] \Big|_{t=\Delta t_C}, \\ \delta_{I\theta}^{(j,e)} &= \delta_{I\theta}^{(j,e)}(0, 0, 0) + t \dot{\delta}_{I\theta}^{(j,e)}(C_{0j}^e), \\ \delta_{II\theta}^{(j,e)} &= \delta_{II\theta}^{(j,e)}(0, 0, 0) + t \dot{\delta}_{II\theta}^{(j,e)}(C_{0j}^e), \\ \gamma_t^{(j,e)} &= \delta_t^{(j,e)} \sigma_t^{(j,e)} = \delta_{It}^{(j,e)} \sigma_{0t}^{(j,e)} + \delta_{II t}^{(j,e)} \tau_{0t}^{(j,e)}, \quad \gamma_C = \delta_C \sigma_t = K_{IC}^2 E^{-1}, \\ \delta_{It}^{(j,e)} &= \frac{(K_{I\theta}^{(j,e)})^2}{E \sigma_{0t}^{(j,e)}}, \quad \delta_{II t}^{(j,e)} = \frac{(K_{II\theta}^{(j,e)})^2}{E \tau_{0t}^{(j,e)}}, \quad \delta_{I\theta}^{(j,e)} = \frac{(K_{I\theta}^{(j,e)})^2}{E \tau_{0t}^{(j,e)}}, \end{aligned} \quad (31)$$

де  $\delta_t^{(j,e)}(x)$  – розкриття в зоні передруйнування біля  $e$ -ї вершини тріщини  $L_j$ ;  $\delta_{I\theta}^{(j,e)}$ ,  $\delta_{II\theta}^{(j,e)}$  – проекції  $\delta_t^{(j,e)}(x)$  на напрямні орти полярної системи координат  $O^{(j,e)} \rho^{(j,e)} \theta^{(j,e)}$ ;  $\sigma_t^{(j,e)}$  – усереднені напруження в зоні передруйнування біля  $e$ -ї вершини тріщини  $L_j$ ;  $\sigma_{0t}^{(j,e)}$ ,  $\tau_{0t}^{(j,e)}$  – відповідні їхні проекції;  $K_{I\theta}^{(j,e)}$ ,  $K_{II\theta}^{(j,e)}$  – коефіцієнти інтенсивності напружень біля  $e$ -ї вершини  $j$ -ї тріщини вздовж напрямку під кутом  $\theta_t^{j,e}$  до її дотичної.

Приймаючи, що в зоні передруйнування буде проходити усталена повзучість, швидкість якої буде лінійно залежати від концентрації водню [5], отримуємо

$$\dot{\delta}_{I\theta}^{(j,e)}(C_{0j}^e) = \dot{\delta}_{I\theta}^{(j,e)}(0)[1 + \alpha_1 C_0^{(j,e)}(t)],$$

$$\dot{\delta}_{II\theta}^{(j,e)}(C_0^{j,e}) = \dot{\delta}_{II\theta}^{(j,e)}(0)[1 + \alpha_1 C_0^{(j,e)}(t)],$$

а концентрація водню  $C_0^{(j,e)}(t)$  у найбільш напруженій точці зони передруйнування буде визначатися формулою (15).

Таким чином, кінетичні рівняння (28) з урахуванням умов (29), (30) і співвідношень (31) є розрахунковою моделлю для визначення залишкової довговічності пластини із системою тріщин, яка перебуває під дією довготривалого статичного навантаження і корозійного середовища підвищеної температури.

**4. Застосування розрахункової моделі для визначення залишкової довговічності металеві пластини з двоперіодичною системою тріщин.** Розглянемо нескінченну металеву пластину, яка містить двоперіодичну систему прямолинійних тріщин довжини  $2\ell_0$ , центри яких розміщені у вузлах квадратної решітки зі стороною  $h$  (рис. 5). Пластина перебуває під дією корозійного середовища за підвищеної температури та розтягується у нескінченно віддалених точках зусиллями інтенсивності  $p$ , які напрямлені перпендикулярно до лінії розміщення тріщин.

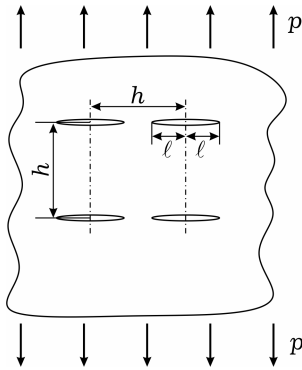


Рис. 5

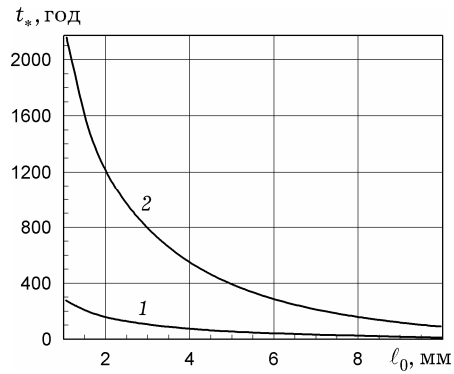


Рис. 6

Задача полягає у визначенні часу  $t = t_*$ , при досягненні якого тріщини підросли до критичного розміру  $\ell = \ell_*$ , і пластина зруйнується. Для розв'язання задачі використаємо сформульовану вище розрахункову модель (28)–(30). Цю модель з урахуванням того, що напружено-деформований стан у пластині є симетричним відносно лінії розміщення тріщин, тобто описується в околі її вершини через коефіцієнти інтенсивності напружень, подамо в такому вигляді:

$$\frac{d\ell}{dt} \approx \frac{A_{2t}(K_I K_{IC}^{-1})^{2m}}{1 - K_I^2 K_{IC}^{-2}} + B_1 (K_I K_{IC}^{-1})^{1.5m} \sqrt[4]{1 - K_{IC}^{-2} K_I^2} \quad (32)$$

з початковою та кінцевою умовами

$$t = 0 : \quad \ell(0) = \ell_0, \quad t = t_* : \quad \ell(t_*) = \ell_*, \quad K_I(\ell_*) = K_{IC}. \quad (33)$$

Інтегруючи рівняння (32) за початкових і кінцевих умов (33), отримаємо наступну формулу для визначення періоду  $t = t_*$  докритичного росту тріщини в пластині з двоперіодичною системою тріщин:

$$t_* = \int_{\ell_0}^{\ell_*} \frac{1 - K_I^2 K_{IC}^{-2}}{A_{2t}(K_I K_{IC}^{-1})^{2m} + B_1 (K_I K_{IC}^{-1})^{1.5m} \sqrt[4]{1 - K_{IC}^{-2} K_I^2} (1 - K_I^2 K_{IC}^{-2})} d\ell,$$

де коефіцієнт інтенсивності напружень для розглядуваного випадку вибираємо у вигляді [12]:

$$K_I = p\sqrt{\pi\ell} [1 + 8.8 \cdot 10^{-2} \pi\lambda^2 + 1.8 \cdot 10^{-2} \pi^2\lambda^4 - 2.6 \cdot 10^{-3} \pi^3\lambda^6 + O(\lambda^8)],$$

$$\lambda = 2\ell h^{-1}.$$



Обчислення виконано для випадку, коли пластина виготовлена зі сталі-20 та експлуатується у водному розчині за температури  $130\div 150^{\circ}\text{C}$  [9]. Характеристики матеріалу і параметри навантаження для такої сталі наведено вище. На рис. 6 побудовано залежності  $t_* \sim \ell_0$  з урахуванням дії корозійного середовища (крива 1) і на повітрі (крива 2).

**Висновки.** На основі енергетичного підходу побудовано розрахункові моделі, які дозволяють визначати залишкову довговічність металевих пластин із системами тріщин за дії довготривалого статичного навантаження і корозійного середовища підвищеної температури. Реалізацію моделей продемонстровано на розв'язках задач про довготривалий розтяг пластин з двоперіодичною системою тріщин за корозійного середовища підвищеної температури. Показано, що корозійне середовище підвищеної температури зменшує залишковий ресурс тонкостінних елементів конструкцій з системами тріщин за довготривалого статичного навантаження.

1. *Андрейків О. Є., Гембара О. В.* Механіка руйнування та довговічність металевих матеріалів у водневмісних середовищах. – Київ: Наук. думка, 2008. – 344 с.
2. *Андрейків О. Є., Добровольська Л. Н., Яворська Н. В.* Поширення в металевих матеріалах тріщин високотемпературної повзучості за дії водню // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – **50**, № 3. – С. 45–52.  
Te same: *Andreikiv O. E., Dobrovol's'ka L. N., Yavors'ka N. V.* Growth of high-temperature creep cracks in metallic materials under the influence of hydrogen // Mater. Sci. – 2014. – **50**, No. 3. – P. 358–368.
3. *Андрейків О. Є., Сас Н. Б.* Докритичний ріст плоскої тріщини у тривимірному тілі за високотемпературної повзучості // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – **44**, № 2. – С. 19–26.  
Te same: *Andreikiv O. E., Sas N. B.* Subcritical growth of a plane crack in a three-dimensional body under the conditions of high-temperature creep // Mater. Sci. – 2008. – **44**, No. 2. – P. 163–174.
4. *Бабій Л., Студент О., Загорський А.* Властивості корпусної сталі 15Х2МФА за умов повзучості у газоподібному водні // Фіз. хім. механіка матеріалів. – 2008. – Спецвипуск № 7: В 2 т. – Т. 1. – С. 100–105.
5. *Гембара О. В., Терлецька З. О., Чепіль О. Я.* Визначення електричних полів у системі електроліт–метал // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 2. – С. 71–76.  
Te same: *Hembara O. V., Terlets'ka Z. O., Chepil' O. Ya.* Determination of electric fields in electrolyte-metal system // Mater. Sci. – 2007. – **43**, No. 2. – P. 222–229.
6. *Дмитрах І. М., Панасюк В. В.* Вплив корозійних середовищ на локальне руйнування металів біля концентраторів напружень. – Львів: Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 1999. – 340 с.
7. *Романив О. Н., Ярема С. Я., Никифорчин Г. Н., Махутов Н. А., Стадник М. М.* Усталость и циклическая трещиностойкость конструкционных материалов. – Киев: Наук. думка, 1990. – 680 с. – (Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. – Т. 4.)
8. *Тум'як Н. І., Андрейків О. Є.* Визначення швидкості росту тріщин в умовах сумісної дії статичних навантажень і корозійно-активного середовища // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. – **31**, № 2. – С. 68–74.  
Te same: *Tum'yak N. I., Andreikiv O. E.* Evaluation of crack-growth rate under conditions of simultaneous action of static loading and corrosive media // Mater. Sci. – 1995. – **31**, No. 2. – P. 219–225.
9. *Шульженко М., Гонтаровський П., Мележик І.* Оцінювання впливу агресивного середовища на кінетику тріщин в елементах енергообладнання // Машинознавство. – 2011. – № 3-4. – С. 45–49.
10. *Arnoux P.* Atomistic simulations of stress corrosion cracking // Corros. Sci. – 2010. – **52**, No. 4. – P. 1247–1257.
11. *Sieradzki K., Newman R. C.* Stress-corrosion cracking // J. Phys. Chem. Solids. – 1987. – **48**, No. 11. – P. 1101–1113.
12. *Stress intensity factors handbook: In 2 Vol. / Ed. Yu. Murakami.* – Oxford: Pergamon Press, 1987. – XLIX, XXXIX + 1456 p.

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАЗРУШЕНИЯ ПЛАСТИН С СИСТЕМАМИ ТРЕЩИН ПРИ ДЕЙСТВИИ ДЛИТЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК, ПОВЫШЕННЫХ ТЕМПЕРАТУР И КОРРОЗИОННОЙ СРЕДЫ**

*Сформулированы расчетные модели для определения долговечности пластин с системами трещин при действии длительных силовых нагрузок при наличии повышенных температур и коррозионных сред. Эти модели базируются на использовании известных основных механизмов распространения трещин ползучести, коррозионного разрушения, первого закона термодинамики (баланса энергетических составляющих и скоростей их изменения) в металлической пластине, содержащей систему макротрещин и подвергнутой действию длительного растяжения и коррозионной среды при повышенных температурах. Рассмотрен случай двоякопериодической системы трещин.*

**MATHEMATICAL MODELING OF FRACTURE PROCESSES OF PLATES WITH SYSTEMS OF CRACKS UNDER LONG-TERM LOADS, HIGH TEMPERATURES AND CORROSIVE MEDIUM**

*Calculational models for the determination of life-time of plates with systems of cracks under the action of long-term force loads at presence of high temperatures and corrosive media are formulated. These models are based on the using of known basic mechanisms of creep cracks propagation, corrosion damage, the first law of thermodynamics (the balance of energy components and the rates of their change) in the metallic plate, which contains the system of macrocracks and is subjected to the action of long-term tension and corrosive medium under high temperatures. The case of doubly periodic system of cracks is considered.*

<sup>1</sup> Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів,

<sup>2</sup> Фіз.-мех. ін-т ім. Г. Карпенка НАН України, Львів,

<sup>3</sup> Львів. нац. ун-т ветеринарної медицини та біотехнологій ім. С. З. Гжицького, Львів

Одержано  
23.12.15