УДК 517.927.6 +517.984.52

Я. О. Баранецький[1], П. І. Каленюк[1,2]

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ З РЕГУЛЯРНИМИ, АЛЕ НЕ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНИМИ ЗА БІРКГОФОМ УМОВАМИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДВОКРАТНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

Досліджено самоспряжені задачі, оператори яких розщеплюються на інваріантних підпросторах, які індуковані оператором інволюції $Iy(x) = y(1-x)$. Побудовано несамоспряжені збурення таких задач, які є регулярними, але не сильно регулярними за Біркгофом, і при деяких значеннях коефіцієнтів крайових умов перетворюються у неспектральні за Данфордом задачі. Вивчено спектральні властивості операторів, які відповідають цим збуренням, зокрема, визначено власні значення і кореневі функції, а також досліджено повноту і базисність системи кореневих функцій. Знайдено сім'ї крайових умов, які породжують суттєво несамоспряжені задачі, що включають нелокальні умови Самарського – Іонкіна.

Вступ. Робота присвячена дослідженню задачі на власні значення

$$-y''(x) = \lambda y(x), \qquad x \in (0.1), \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

$$\alpha_{j,1} y'(0) + \alpha_{j,0} y(0) + \beta_{j,1} y'(1) + \beta_{j,0} y(1) = 0, \qquad j = 1,2. \tag{2}$$

Припускаємо, що крайові умови (2) є лінійно незалежними.

Основи спектральної теорії двоточкових диференціальних операторів були закладені в працях [16, 17, 24–27]. Для звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку на скінченному інтервалі базисність за Ріссом крайових задач, породжених сильно регулярними за Біркгофом умовами, встановлена у працях [3, 9, 11]. У випадку, коли крайові умови регулярні, але не сильно регулярні, в роботі [15] було доведено, що система кореневих підпросторів, які відповідають кратним власним значенням крайової задачі, утворює базис Рісса в просторі $L_2(0,1)$ із підпросторів. У роботах [5, 6] були запропоновані поняття зведеної системи кореневих функцій задачі та суттєво несамоспряженого оператора (оператора, система кореневих функцій якого містить нескінченну кількість приєднаних функцій) і вивчено властивості таких операторів.

Спектральна задача (1), (2) вивчалась багатьма авторами [4, 18–23]. У праці [1] за допомогою оператора інволюції $I : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $Iy(x) \equiv \equiv y(1-x)$, виділено простори симетричних та антисиметричних функцій, досліджено проблему розщеплення оператора на інваріантних підпросторах та її аналоги для рівнянь із частинними похідними. У роботах [9, 11, 28] вивчались випадки неспектральних за Данфордом операторів, які породжені регулярними за Біркгофом крайовими умовами. У роботі [12] введено та досліджено сім'ю таких задач. У роботі [7] вивчено важливу для застосувань суттєво несамоспряжену задачу. У праці [10] вивчалась інваріантність властивості системи кореневих функцій крайової задачі бути базисом Рісса для інтегральних збурень крайових умов. У статті [13] розглядалась задача із крайовими умовами, які є збуреннями антиперіодичних умов. Властивості суттєво несамоспряжених операторів, визначених в абстрактному сепарабельному гільбертовому просторі, вивчено в роботі [8].

Нехай

$$W_2^2(0,1) \equiv \{ y \in L_2(0,1) : y' \in AC[0,1], y'' \in L_2(0,1) \},$$

$$(y, u; W_2^2(0,1)) \equiv \sum_{k=0}^{2} \left(y^{(k)}, u^{(k)}; L_2(0,1) \right),$$

$$\left\| y; W_2^{2n}(0,1) \right\|^2 \equiv \left(y, y; W_2^{2n}(0,1) \right),$$

E − тотожне перетворення простору $L_2(0,1)$, $I : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $Iy(x) \equiv \equiv y(1-x)$ − оператор інволюції у просторі $L_2(0,1)$, $p_0 \equiv \frac{1}{2}(E+I)$, $p_1 \equiv \equiv \frac{1}{2}(E-I)$ − ортопроектори в $L_2(0,1)$, $M_j \equiv \{e^{icx} + (-1)^j e^{ic(1-x)}, c \in \mathbb{R}\}$, $H_j = = \{y \in L_2(0,1) : y = p_j y\}$, $j = 0,1$, $L_2(0,1) = H_0 \oplus H_1$.

Функцію із простору H_0 (H_1) будемо називати симетричною (антисиметричною) відповідно. Крайову умову будемо називати симетричною (антисиметричною), якщо до ядра відповідного функціонала належить кожна антисиметрична (симетрична) функція із множини M_1. Наприклад, симетричною є умова $y(0) + y(1) = 0$. Аналогічно означимо антисиметричну умову, наприклад: $y(0) - y(1) = 0$. Сукупність симетричних (антисиметричних) крайових умов позначимо через H_0^* (H_1^*) відповідно.

Означимо крайові умови (2) еквівалентними співвідношеннями

$$\sum_{r=0}^{1} \left(a_{j,r}(y^{(r)}(0) + (-1)^r y^{(r)}(1)) + b_{j,r}(y^{(r)}(0) - (-1)^r y^{(r)}(1)) \right) = 0\,, \tag{3}$$

де

$$a_{j,r} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{j,r} - (-1)^r \beta_{j,r}\right),\ b_{j,r} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{j,r} + (-1)^r \beta_{j,r}\right),\quad j = 1,2,\quad r = 0,1.$$

Для рівняння (1) розглянемо задачу з крайовими умовами, які є частковим випадком умов (3):

$$\ell_1 y \equiv a_{1,1}\left(y'(0) - y'(1)\right) + a_{1,0}\left(y(0) + y(1)\right) = 0\,,$$

$$\ell_2 y \equiv b_{2,1}\left(y'(0) + y'(1)\right) + b_{2,0}\left(y(0) - y(1)\right) = 0\,. \tag{4}$$

Нехай L − оператор задачі (1), (4): $L : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$, $Ly \equiv -y''$, $y \in D(L)$, $D(L) = \{y \in W_2^2(0,1) : \ell_j y = 0;\ j = 1,2\}$. Звуження оператора L на множину H_j, $j = 0,1$, позначимо через L_j.

Зауваження 1. З формул (4) маємо: $\ell_1 y = 0$, $y \in M_1$, $\ell_2 y = 0$, $y \in M_0$. Враховуючи щільність множини M_j у просторі H_j, отримуємо включення $\ell_s \in H_{s-1}^*$, $s = 1,2$, $j = 1,2$.

Зауваження 2. З крайових умов (4) одержуємо, зокрема, такі класичні випадки самоспряжених умов:

− періодичні: $y'(0) - y'(1) = 0$, $y(0) - y(1) = 0$,

− антиперіодичні: $y(0) + y(1) = 0$, $y''(0) + y''(1) = 0$,

− умови Діріхле: $y(0) + y(1) = 0$, $y(0) - y(1) = 0$,

− умови Неймана: $y'(0) - y'(1) = 0$, $y'(0) + y'(1) = 0$.

Лема 1. *Нехай* $a_{j,r}, b_{j,r} \in \mathbb{R}$, $j = 1,2$, $r = 0,1$. *Тоді оператор* L *задачі* (1), (4) *є самоспряженим.*

Д о в е д е н н я. Безпосередньою підстановкою переконуємось, що коефіцієнти крайових умов (4) задовольняють припущення теореми 5 з роботи [14, с. 212]. ♦

Фундаментальну систему розв'язків рівняння (1) означимо співвідношеннями: $y_0(\rho, x) \equiv e^{i\rho x} + e^{i\rho(1-x)}$, $y_1(\rho, x) \equiv e^{i\rho x} - e^{i\rho(1-x)}$, $\rho \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\rho \le 0$, $\lambda = \rho^2$.

Підставимо загальний розв'язок рівняння (1) $y(\rho,x) = C_0 y_0(\rho,x) + C_1 y_1(\rho,x)$, $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$, у крайові умови (4). Для обчислення параметрів $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$ отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, матриця коефіцієнтів якої є діагональною:

$$\begin{pmatrix} 2\omega_0(\rho) & 0 \\ 0 & 2\omega_1(\rho) \end{pmatrix}.$$

Тут

$$\omega_0(\rho) \equiv i\rho a_{1,1}(1 - e^{i\rho}) + a_{1,0}(1 + e^{i\rho}),$$

$$\omega_1(\rho) \equiv i\rho b_{2,1}(1 + e^{i\rho}) + b_{2,0}(1 - e^{i\rho}).$$

Розв'язки рівнянь

$$\omega_0(\rho) = 0, \qquad \omega_1(\rho) = 0$$

позначимо через $\rho_{s,k}$ і для кожного $s = 0,1$ пронумеруємо їх у порядку зростання: $|\rho_{s,k}| \le |\rho_{s,k+1}|$, $k = 1,2,\ldots$.

Відповідні власні функції визначимо співвідношеннями

$$v_{s,k}(x,L) = \mu_{s,k}\left(e^{i\rho_{s,k}x} + (-1)^s e^{\rho_{s,k}(1-x)}\right),$$

де параметри $\mu_{s,k}$ вибрано так, що $\|v_{s,k}(x,L); L_2(0,1)\| = 1$, $s = 0,1$, $k = 1,2,\ldots$.

Отже, оператор L має власні значення $\lambda_{s,k} = (\rho_{s,k})^2 > 0$ та відповідні власні функції $v_{s,k}(x,L)$, $s = 0,1$, $k = 1,2,\ldots$.

Нехай $V_s(L) \equiv \{v_{s,k}(x,L), k = 1,2,\ldots\}$ − підсистеми власних функцій оператора L, які є ортонормованими базисами просторів H_s, $\sigma_s(L)$ − сукупність власних значень оператора L, яким відповідають власні функції з $V_s(L)$, $s = 0,1$. На множині M_s оператор інволюції I та оператор парного диференціювання комутують:

$$Iy''(x) = y''I(x) = c^2 y(x), \qquad y(x) \in M_s,$$

$$y(x) = e^{icx} + (-1)^s e^{ic(1-x)}, \qquad s = 0,1.$$

Тому, враховуючи щільність множини

$$\sum_{k<\infty} h_k y_k, \qquad y_k(x) \in M_s, \qquad h_k \in \mathbb{R},$$

в H_s, отримаємо, що $L : H_s \to H_s$, $s = 0,1$. Таким чином, встановлено таку лему.

Лема 2. *Самоспряжений оператор* L *є прямою сумою операторів* L_s, $s = 0,1$.

1. Несамоспряжені крайові задачі з регулярними за Біркгофом умовами. Періодичні умови.

Нехай $\operatorname{Rang} M$ − ранг матриці $M \equiv \begin{pmatrix} a_{1,1} & b_{1,1} \\ a_{2,1} & b_{2,1} \end{pmatrix}$.

Розглянемо випадок, коли $\operatorname{Rang} M = 1$. Крайові умови (3) означимо співвідношеннями

$$g\big(y'(0) - y'(1)\big) + h\big(y'(0) + y'(1)\big) + a\big(y(0) + y(1)\big) + b\big(y(0) - y(1)\big) = 0,$$

$$c\big(y(0) + y(1)\big) + d\big(y(0) - y(1)\big) = 0. \qquad (5)$$

Тут $g = a_{1,1}$, $h = b_{1,1}$, $a = a_{1,0}$, $b = b_{1,0}$, $c = a_{2,0}$, $d = b_{2,0}$.

Дослідимо спочатку випадок, коли $gh \neq 0$, $c = 0$. Тоді, поклавши у (5) $b = 0$, $d = 1$, одержимо

$$g\big(y'(0) - y'(1)\big) + h\big(y'(0) + y'(1)\big) + a\big(y(0) + y(1)\big) = 0,$$

$$y(0) - y(1) = 0. \tag{6}$$

Відповідні самоспряжені умови (4) визначаються виразами

$$g\big(y'(0) - y'(1)\big) + a\big(y(0) + y(1)\big) = 0,$$

$$y(0) - y(1) = 0. \tag{7}$$

Крайові умови, які є спряженими до крайових умов (6), мають вигляд

$$g\big(z'(0) - z'(1)\big) + a\big(z(0) + z(1)\big) = 0,$$

$$h\big(z(0) + z(1)\big) - g\big(z(0) - z(1)\big) = 0. \tag{8}$$

Позначимо через $L_{a,b,c,d,g,h}$ оператор задачі (1), (5), оператор задачі (1), (6) – через $L_{a,g,h} \equiv L_{a,0,0,1,g,h}$, оператор задачі (1), (7) – через $L_{a,g} \equiv L_{a,0,0,1,g,0}$, через $V(L_{a,g,h})$ і $V(L_{a,g})$ позначимо системи власних функцій цих операторів, а через $W(L_{a,g,h})$ і $W(L_{a,g})$ – відповідні біортогональні до них системи власних функцій.

Зауваження 3. Крайові умови (6), (8) є регулярними за Біркгофом, але не сильно регулярними при $g \neq 0$ і невиродженими при $|a| + |g| \neq 0$ [14].

Теорема 1. *Нехай* $\operatorname{Rang} M = 1$, $|g| + |h| \neq 0$, $c = 0$, $b = 0$, $d = 1$. *Тоді для довільних фіксованих* $a, g \in \mathbb{R}$, $|a| + |g| \neq 0$, *при кожному* $h \in \mathbb{R}$ *власні значення операторів* $L_{a,g,h}$ *та* $L_{a,g}$ *співпадають. Система функцій* $V(L_{a,g,h})$ *і біортогональна до неї система* $W(L_{a,g,h})$ *є повними та мінімальними в просторі* $L_2(0,1)$, *але не майже нормованими, коли* $h \neq 0$.

Доведення. Підставляючи загальний розв'язок $y(\rho, x) = C_0 y_0(\rho, x) + C_1 y_1(\rho, x)$ рівняння (1) у крайові умови (7), для обчислення параметрів $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$ отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, матриця коефіцієнтів якої є діагональною:

$$\Omega_0(\rho) = \begin{pmatrix} 2\omega_0(\rho) & 0 \\ 0 & 2\omega_1(\rho) \end{pmatrix},$$

де $\omega_0(\rho) = i\rho g(1 - e^{i\rho}) + a(1 + e^{i\rho})$, $\omega_1(\rho) = (1 - e^{i\rho})$.

Підставляючи загальний розв'язок $y(\rho, x) = C_0 y_0(\rho, x) + C_1 y_1(\rho, x)$ рівняння (1) у крайові умови (6), для обчислення параметрів $C_0, C_1 \in \mathbb{R}$ одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з трикутною матрицею коефіцієнтів:

$$\Omega(\rho) = \begin{pmatrix} 2\omega_0(\rho) & 2\omega_{1,2}(\rho) \\ 0 & 2\omega_1(\rho) \end{pmatrix},$$

де $\omega_{1,2}(\rho) = h\rho(1 + e^{i\rho})$.

Отже, $\det \Omega(\rho) \equiv \det \Omega_0(\rho)$, $\rho \in \mathbb{C}$. Тому власні значення операторів $L_{a,g}$ та $L_{a,g,h}$ співпадають.

Побудуємо власні функції оператора $L_{a,g,h}$.

Самоспряжений оператор $L_{a,g}$ має власні значення, які визначаються коренями рівнянь

$$\omega_0(\rho) = i\rho g(1 - e^{i\rho}) + a(1 + e^{i\rho}) = 0, \qquad \omega_1(\rho) = (1 - e^{i\rho}) = 0\,,$$

та дві послідовності нормованих у просторі $L_2(0,1)$ власних функцій

$$v_{0,k}(x, L_{a,g}) = \mu_{2,k}(e^{i\rho_{0,k}x} + e^{i\rho_{0,k}(1-x)})\,,$$

$$v_{1,k}(x, L_{a,g}) = \sqrt{2}\sin 2k\pi x, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Виберемо будь-яке власне число $\lambda_{0,k} \in \sigma_0(L_{a,g})$, $k \in \mathbb{N}$. Відповідна власна функція $v_{0,k}(x, L_{a,g})$ оператора $L_{a,g}$ є розв'язком задачі (1), (6) при $\lambda = \lambda_{0,k}$, тобто

$$v_{0,k}(x, L_{a,g,h}) \equiv v_{0,k}(x, L_{a,g}) = \mu_{2,k}(e^{i\rho_{0,k}x} + e^{i\rho_{0,k}(1-x)}), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{9}$$

Нехай $\lambda_{1,k} = 4k^2\pi^2 \in \sigma_1(L_{a,g,h})$ – власне значення оператора $L_{a,g,h}$ при довільному $k \in \mathbb{N}$. Відповідну власну функцію оператора $L_{a,g,h}$ означимо співвідношенням

$$v_{1,k}(x, L_{a,g,h}) = \sqrt{2}\sin 2k\pi x + C_{1,k}\sqrt{2}\cos 2k\pi x, \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

Підставляючи вираз (10) у першу з крайових умов (6), обчислимо значення параметра $C_{1,k}$:

$$C_{1,k} = -2\frac{1}{a}hk\pi, \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{11}$$

Отже, елементи системи $V(L_{a,g,h})$ власних функцій оператора $L_{a,g,h}$ визначаються формулами (9)–(11).

Обчислимо елементи системи $W(L_{a,g,h})$, біортогональної до $V(L_{a,g,h})$, як власні функції оператора $L_{a,g,h}$ задачі (1) з крайовими умовами (8) у вигляді суми:

$$w_{0,k}(x, L_{a,g,h}) = v_{0,k}(x, L_{a,g}) + C_{2,k}(e^{i\rho_{0,k}x} - e^{i\rho_{0,k}(1-x)}), \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{12}$$

Підставляючи вираз (12) у другу з крайових умов (8), обчислюємо

$$C_{2,k} = \frac{1}{a}h\rho_{0,k}i\mu_{2,k}, \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{13}$$

Підстановкою (12) у крайові умови (8) встановлюємо, що функції

$$w_{1,k}(x, L_{a,g,h}) = v_{1,k}(x, L_{a,g}) = \sqrt{2}\sin 2k\pi x, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

для оператора $L_{a,g,h}$ є власними.

Системи функцій $V(L_{a,g,h})$ і $W(L_{a,g,h})$ є біортогональними [2, 3] у просторі $L_2(0,1)$. Тому система $V(L_{a,g,h})$ є повною та мінімальною в просторі $L_2(0,1)$.

З рівностей (10), (12), (13) випливає, що для кожного $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ послідовності функцій $\{v_{0,k}(x, L_{a,g,h})\}_{k=1}^{\infty}$ та $\{w_{0,k}(x, L_{a,g,h})\}_{k=1}^{\infty}$ необмежені за нормою простору $L_2(0,1)$ при $k \to \infty$. Теорему доведено. ♦

Наслідок 1. *Нехай* $\operatorname{Rang} M = 1$, $|g| + |h| \neq 0$, $c = 0$, $b = 0$, $d = 1$. *Тоді для кожного фіксованого набору* $a, g \in \mathbb{R}$ *при довільному* $h \in \mathbb{R}$ *існує базис Рісса з двовимірних підпросторів, отриманих об'єднанням власних підпросторів, які відповідають близьким власним значенням оператора* $L_{a,g,h}$.

Згідно з теоремою О. О. Шкалікова [15] існує базис Рісса з підпросторів, які відповідають близьким власним значенням.

Виберемо довільне додатне ε та номер $k_0 \in \mathbb{N}$ так, щоб $\left|\lambda_{1,k_0} - \lambda_{1,k}\right| < \varepsilon$. Для кожного натурального числа $k \geq k_0$ визначимо функцію

$$v_{1,k}^1(x, L_{a,g,h}) = \beta_{1,k}\big(v_{1,k}(x, L_{a,g,h}) - (v_{1,k}, v_{1,k}; L_2(0,1))v_{1,k}(x, L_{a,g,h})\big),$$

$$k = 1, 2, \ldots,$$

де число $\beta_{1,k}$ виберемо так, щоб виконувалась рівність

$$\left\| v_{1,k}^1(x, L_{a,g,h}); L_2(0,1) \right\| = 1, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Функції $v_{0,k}(x, L_{a,g,h})$, $v_{1,k}^1(x, L_{a,g,h})$ є ортонормованим базисом двовимірного підпростору, що відповідає близьким власним значенням оператора $L_{a,g,h}$ при $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$. Тому (див. [2, с. 414–415]) система функцій

$$\{v_{0,k}(x, L_{a,g,h})\}_{k=1}^{\infty} \cup \{v_{0,k}(x, L_{a,g,h})\}_{k=1}^{k_0 - 1} \cup \{v_{1,k}^1(x, L_{a,g,h})\}_{k=k_0}^{\infty}$$

є базисом Рісса простору $L_2(0,1)$.

Покладемо $a = 0$ у крайових умовах (6):

$$g\big(y'(0) - y'(1)\big) + h\big(y'(0) + y'(1)\big) = 0,$$

$$y(0) - y(1) = 0. \qquad (14)$$

Спряжені умови до (14) еквівалентні крайовим умовам

$$z'(0) - z'(1) = 0,$$

$$h\big(z(0) + z(1)\big) + g\big(z(0) - z(1)\big) = 0. \qquad (15)$$

Самоспряжені умови, отримані з (7) при $a = 0$, співпадають з періодичними умовами:

$$y'(0) - y'(1) = 0,$$

$$y(0) - y(1) = 0. \qquad (16)$$

Самоспряжений оператор $L_{0,0}$ задачі з періодичними умовами (1), (16) має просте власне число $\lambda_{0,0} = 0$, двократні власні значення $\lambda_{0,k} = \lambda_{1,k} = 4k^2\pi^2$, $k = 1, 2, \ldots$, та дві послідовності власних функцій

$$v_{0,0}(x, L_{0,0}) = 1, \qquad v_{0,k}(x, L_{0,0}) = \sqrt{2}\cos 2k\pi x, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$v_{1,k}(x, L_{0,0}) = \sqrt{2}\sin 2k\pi x, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Зауваження 4. Якщо $g = 0$, тоді крайові умови (14), (15) є виродженими [14].

Означення 1. Нехай λ – власне значення оператора задачі (1), (3), якому відповідає власна функція $y_0(x)$. *Кореневою* (*приєднаною*) функцією першого порядку будемо називати розв'язок задачі

$$-y''(x) = \lambda y(x) + c y_0(x), \quad \ell_1 y = 0, \quad \ell_2 y = 0, \quad x \in (0,1), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Елементи системи кореневих функцій оператора $L_{0,g,h}$ та біортогональної системи $W(L_{0,g,h})$ означимо формулами

$$v_{0,0}(x,L_{0,g,h})=1,\quad v_{0,k}(x,L_{0,g,h})=\sqrt{2}\cos 2k\pi x,\quad k=1,2,\ldots, \tag{17}$$

$$v_{1,k}(x,L_{0,g,h})=\left(1+g^{-1}h(2x-1)\right)\sqrt{2}\sin 2k\pi x,\quad k=1,2,\ldots, \tag{18}$$

$$w_{0,k}(x,L_{0,g,h})=\left(1+g^{-1}h(2x-1)\right)v_{0,k}(x,L_{0,0}),\quad k=0,1,\ldots, \tag{19}$$

$$w_{1,k}(x,L_{0,g,h})=\sqrt{2}\sin 2k\pi x,\quad k=1,2,\ldots. \tag{20}$$

Наслідок 2. *Нехай* $\operatorname{Rang} M=1$, $a=0$, $b=0$, $d=1$, $c=0$. *Тоді для довільних* $g,h\in\mathbb{R}$, $g\neq 0$, *система функцій* $V(L_{0,g,h})$ *є базисом Рісса простору* $L_2(0,1)$.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що система функцій $V(L_{0,g,h})$ є бесселевою [2].

Оцінимо розвинення довільної функції $f\in L_2(0,1)$ у ряд за елементами системи $V(L_{0,g,h})$:

$$V_{g,h}(f)\equiv\left(f,v_{0,0}(x,L_{0,g,h});L_2(0,1)\right)^2+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{1}\left(f,v_{s,k}(x,L_{0,g,h});L_2(0,1)\right)^2.$$

Із формул (17), (18) та нерівності Коші маємо

$$\left(f,v_{0,0}(x,L_{0,g,h});L_2(0,1)\right)^2=\left(f,v_{0,0}(x,L_{0,0});L_2(0,1)\right)^2,$$

$$\left(f,v_{1,k}(x,L_{0,g,h});L_2(0,1)\right)^2\le 2\left(1+(g^{-1}h)^2\right)\left(f,v_{1,k}(x,L_{0,0});L_2(0,1)\right)^2,$$

$$\left(f,v_{0,k}(x,L_{0,g,h});L_2(0,1)\right)^2=\left(f,v_{0,k}(x,L_{0,0});L_2(0,1)\right)^2.$$

Підсумовуючи ці співвідношення при $k=0,1,\ldots$, отримаємо оцінку

$$V_{g,h}(f)\le 2\left(1+(g^{-1}h)^2\right)\|f;L_2(0,1)\|^2.$$

Аналогічно оцінимо розвинення довільної функції $f\in L_2(0,1)$ в ряд за елементами системи $W(L_{0,g,h})$:

$$W_{g,h}(f)\equiv\left(f,w_{0,0}(x,L_{0,g,h});L_2(0,1)\right)^2+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{1}\left(f,w_{s,k}(x,L_{0,g,h});L_2(0,1)\right)^2.$$

Зі співвідношень (19), (20) і нерівності Коші маємо такі вирази:

$$\left(f,w_{0,0}(x,L_{0,g,h});L_2(0,1)\right)^2\le 2\left(1+(g^{-1}h)^2\right)\left(f,v_{0,0}(x,L_{0,0});L_2(0,1)\right)^2,$$

$$\left(f,w_{0,k}(x,L_{0,g,h});L_2(0,1)\right)^2\le 2\left(1+(g^{-1}h)^2\right)\left(f,v_{0,k}(x,L_{0,0});L_2(0,1)\right)^2,$$

$$\left(f,w_{1,k}(x,L_{0,g,h});L_2(0,1)\right)^2=\left(f,v_{1,k}(x,L_{0,0});L_2(0,1)\right)^2,\quad k=0,1,\ldots.$$

Підсумовуючи ці нерівності при $k=0,1,\ldots$, отримаємо оцінку

$$W_{g,h}(f)\le 2\left(1+(g^{-1}h)^2\right)\|f;L_2(0,1)\|^2.$$

Отже, системи функцій $V(L_{0,g,h})$ і $W(L_{0,g,h})$ є біортогональними та бесселевими. Тому, як випливає з [2, 14, 15], ці системи є базисами Рісса простору $L_2(0,1)$. ♦

***Зауваження 5* [6, 8]**. Функції (17), 18) є кореневими в сенсі рівностей

$$L_{0,g,h}w_{0,k}(x,L_{0,g,h}) = 4k^2\pi^2 w_{0,k}(x,L_{0,g,h}) + \eta_k w_{1,k}(x,L_{0,g,h}),$$

$$\eta_k = 8\sqrt{2}\, g^{-1}hk\pi, \qquad k = 1,2,\dots.$$

Розглянемо випадок, коли $\operatorname{Rang} M = 1$, $h = 0$, $b = 0$, $g \neq 0$, $d \neq 0$. Крайові умови (5) і спряжені до них визначаються формулами

$$g(y'(0) - y'(1)) + a(y(0) + y(1)) = 0,$$

$$c(y(0) + y(1)) + d(y(0) - y(1)) = 0, \tag{21}$$

$$gd(z'(0) - z'(1)) + cg(z'(0) + z'(1)) + ad(z(0) + z(1)) = 0,$$

$$z(0) - z(1) = 0. \tag{22}$$

Відповідна самоспряжена задача для рівняння (1) описується крайовими умовами (7).

Зауваження 6. Крайові умови (21), (22) є регулярними за Біркгофом, але не сильно регулярними при $d \neq 0$, нерегулярними при $d = 0$ і виродженими при $a = d = 0$.

Позначимо через $L^1_{a,c,d,g} \equiv L_{a,0,c,d,g,0}$ оператор задачі (1), (21), через $V(L^1_{a,c,d,g})$ і $W(L^1_{a,c,d,g})$ – систему власних функцій оператора $L^1_{a,c,d,g}$ та систему, біортогональну до неї.

Теорема 2. *Нехай* $\operatorname{Rang} M = 1$, $h = 0$, $b = 0$, $d \neq 0$. *Тоді для довільних фіксованих* $a, g \in \mathbb{R}$, $|a| + |g| \neq 0$, *при кожному наборі* $c, d \in \mathbb{R}$ *власні значення операторів* $L^1_{a,c,d,g}$ *і* $L_{a,g}$ *співпадають. Системи функцій* $V(L^1_{a,c,d,g})$ *та* $W(L^1_{a,c,d,g})$ *є повними в просторі* $L_2(0,1)$, *але не майже нормованими при* $gc \neq 0$.

Д о в е д е н н я. Ізоспектральність операторів $L^1_{a,c,d,g}$ та $L_{a,g}$ доводимо аналогічно, як у теоремі 1.

Визначимо елементи системи $V(L^1_{a,c,d,g})$ власних функцій оператора $L^1_{a,c,d,g}$ задачі (1), (21) та біортогональної системи $W(L^1_{a,c,d,g})$. Для зручності обчислень замінимо крайові умови (21) еквівалентними умовами

$$gc(y'(0) - y'(1)) - ad(y'(0) + y'(1)) = 0,$$

$$c(y(0) + y(1)) + d(y(0) - y(1)) = 0. \tag{23}$$

Виберемо довільне $\lambda_{0,k} \in \sigma_0(L_{a,g})$, $k \in \mathbb{N}$. Власну функцію оператора $L^1_{a,c,d,g}$ означимо рівністю

$$v_{0,k}(x, L^1_{a,c,d,g}) = v_{0,k}(x, L_{a,g}) + C_{3,k}(e^{i\rho_{0,k}x} - e^{i\rho_{0,k}(1-x)}), \quad k = 1,2,\dots. \tag{24}$$

Підставивши вираз (24) в першу з крайових умов (23), отримаємо

$$C_{3,k} = i\rho_{0,k}(ad)^{-1}gc, \qquad k = 1,2,\dots.$$

Отже,

$$v_{0,k}(x, L^1_{a,c,d,g}) = v_{0,k}(x, L_{a,g}) + i\rho_{0,k}(ad)^{-1}gc\left(e^{i\rho_{0,k}x} - e^{i\rho_{0,k}(1-x)}\right),$$
$$k = 1, 2, \ldots. \qquad (25)$$

Нехай $\lambda_{1,k} = 4k^2\pi^2 \in \sigma_1(L_{a,g})$ – власне значення оператора $L_{a,g}$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Відповідна власна функція $v_{1,k}(x, L_{a,g})$ оператора $L_{a,g}$ є розв'язком задачі (1), (21) при $\lambda = \lambda_{1,k}$, тобто

$$v_{1,k}(x, L^1_{a,c,d,g}) = v_{1,k}(x, L_{a,g}), \qquad k = 1, 2, \ldots. \qquad (26)$$

Отже, елементи системи $V(L^1_{a,c,d,g})$ визначаються за формулами (25), (26).

Визначимо елементи біортогональної системи $W(L^1_{a,c,d,g})$.

Виберемо будь-яке власне значення $\lambda_{0,k} \in \sigma_0(L_{a,g})$, $k \in \mathbb{N}$. Відповідна власна функція $v_{0,k}(x, L_{a,g})$ оператора $L_{a,g}$ є розв'язком задачі (1), (22) при $\lambda = \lambda_{0,k}$, тобто

$$w_{0,k}(x, L^1_{a,c,d,g}) = v_{0,k}(x, L_{a,g}) = \mu_{3,k}\left(e^{i\rho_{0,k}x} + e^{i\rho_{0,k}(1-x)}\right), \ k = 1, 2, \ldots. \qquad (27)$$

Нехай $\lambda_{1,k} = 4k^2\pi^2$ – власне значення оператора $L^1_{a,c,d,g}$ для довільного $k \in \mathbb{N}$. Власна функція оператора, спряженого до $L^1_{a,c,d,g}$, визначається співвідношенням

$$w_{1,k}(x, L^1_{a,c,d,g}) = \sqrt{2}\sin 2k\pi x - (ad)^{-1}gc2k\pi\sqrt{2}\cos 2k\pi x, \ k = 1, 2, \ldots. \qquad (28)$$

Отже, елементи біортогональної системи $W(L^1_{a,c,d,g})$ обчислюються за формулами (27), (28). Тому система функцій $V(L^1_{a,c,d,g})$ є повною та мінімальною системою простору $L_2(0,1)$. З рівностей (24), (28) випливає, що послідовності функцій $\{v_{0,k}(x, L^1_{a,c,d,g})\}_{k=1}^{\infty}$ та $\{w_{1,k}(x, L^1_{a,c,d,g})\}_{k=1}^{\infty}$ необмежені за нормою простору $L_2(0,1)$ при $k \to \infty$ у випадку, коли $gc \neq 0$. Теорему доведено. ♦

Наслідок 3. *Нехай* $\operatorname{Rang} M = 1$, $h = 0$, $b = 0$, $g \neq 0$, $d \neq 0$. *Тоді для кожного фіксованого набору* $a, g \in \mathbb{R}$ *при довільних* $c, d \in \mathbb{R}$ *існує базис Рісса з двовимірних підпросторів, отриманих об'єднанням власних підпросторів, які відповідають близьким власним значенням оператора* $L^1_{a,c,d,g}$. *Об'єднанням ортонормованих базисів двовимірних підпросторів отримуємо базис Рісса простору* $L_2(0,1)$.

Д о в е д е н н я проводиться аналогічно до доведення наслідку 1. ♦

Покладемо в крайових умовах (21) $a = 0$, а тоді приймемо, що $g = 1$:

$$y'(0) - y'(1) = 0,$$
$$c\big(y(0) + y(1)\big) + d\big(y(0) - y(1)\big) = 0. \qquad (29)$$

Спряжені до (29) крайові умови мають вигляд

$$d\big(z'(0) - z'(1)\big) + c\big(z'(0) + z'(1)\big) = 0,$$
$$z(0) - z(1) = 0. \qquad (30)$$

Відповідні самоспряжені крайові умови співпадають з періодичними умовами (16).

Зауваження 7. Існує відповідність $y \leftrightarrow z$, $h \leftrightarrow c$, $g \leftrightarrow d$ між крайовими умовами (15), (29) та (14), (30).

Зауваження 8. Якщо $d = 0$, тоді крайові умови (29), (30) є виродженими.

Елементи систем кореневих функцій оператора $L^1_{0,c,d,1}$, породженого задачею (1), (29), і біортогональної системи $W(L^1_{0,c,d,1})$ означимо формулами

$$v_{0,0}(x, L^1_{0,c,d,1}) = 1 + d^{-1}c(2x-1),$$

$$v_{0,k}(x, L^1_{0,c,d,1}) = \sqrt{2}\left(1 + d^{-1}c(2x-1)\right)\cos 2k\pi x, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$v_{1,k}(x, L^1_{0,c,d,1}) = \sqrt{2}\sin 2k\pi x, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$w_{0,0}(x, L^1_{0,c,d,1}) = 1, \quad w_{0,k}(x, L^1_{0,c,d,1}) = \sqrt{2}\cos 2k\pi x, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$w_{1,k}(x, L^1_{0,c,d,1}) = \sqrt{2}\left(1 + d^{-1}c(2x-1)\right)\sin 2k\pi x, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Наслідок 4. *Нехай* $\operatorname{Rang} M = 1$, $a = 0$, $b = 0$, $d \neq 0$, $c = 0$. *Тоді для довільних* $c, d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, *система функцій* $V(L^1_{0,c,d,1})$ *є базисом Рісса простору* $L_2(0,1)$.

Д о в е д е н н я. Система функцій $L^1_{0,c,d,1}$ є повною та мінімальною в просторі $L_2(0,1)$, оскільки існує єдина біортогональна система $W(L^1_{0,c,d,1})$. Доведення бесселевості систем $V(L^1_{0,c,d,1})$ та $W(L^1_{0,c,d,1})$ проводиться аналогічно до доведення наслідку 2. ♦

2. Крайові задачі з регулярними за Біркгофом умовами. Антиперіодичні умови. Нехай $\operatorname{Rang} M = 1$, $gh \neq 0$. Розглянемо випадок крайових умов (5), коли $d = 0$, $c = 1$, $a = 0$:

$$g\left(y'(0) - y'(1)\right) + h\left(y'(0) + y'(1)\right) + b\left(y(0) - y(1)\right) = 0,$$

$$y(0) + y(1) = 0. \tag{31}$$

Відповідні самоспряжені умови мають вигляд

$$h\left(y'(0) + y'(1)\right) + b\left(y(0) - y(1)\right) = 0,$$

$$y(0) + y(1) = 0. \tag{32}$$

Зауваження 9. Крайові умови (31) є регулярними за Біркгофом, але не сильно регулярними при $h \neq 0$ і невиродженими при $|b| + |h| \neq 0$.

Позначимо через $L^2_{b,g,h} \equiv L_{0,b,1,0,g,h}$ оператор задачі (1), (31), через $L^2_{b,h} \equiv L_{0,b,1,0,0,h}$ – оператор задачі (1), (32), через $V(L^2_{b,g,h})$ і $W(L^2_{b,g,h})$ – систему власних функцій оператора $L^2_{b,g,h}$ та біортогональну до неї систему відповідно.

Теорема 3. *Нехай* $\operatorname{Rang} M = 1$, $h \neq 0$, $d = 0$, $a = 0$, $c = 1$. *Тоді при довільних фіксованих* $b, h \in \mathbb{R}$ *для кожного* $g \in \mathbb{R}$ *власні значення операторів* $L^2_{b,g,h}$ *і* $L^2_{b,h}$ *співпадають. Система функцій* $V(L^2_{b,g,h})$ *та біортогональна до неї система* $W(L^2_{b,g,h})$ *є повними в просторі* $L_2(0,1)$, *але не майже нормованими при* $g \neq 0$.

Д о в е д е н н я. Ізоспектральність операторів $L^2_{b,g,h}$ та $L^2_{b,h}$ доводимо подібно, як у теоремі 1.

Самоспряжений оператор $L^2_{b,h}$ має дві послідовності власних значень, які визначаються коренями рівнянь

$$\omega_0(\rho) = (1 + e^{i\rho}) = 0\,,$$

$$\omega_1(\rho) = i\rho h(1 + e^{i\rho}) + b(1 - e^{i\rho}) = 0\,,$$

та дві послідовності нормованих власних функцій

$$v_{0,k}(x, L^2_{b,h}) = \sqrt{2}\sin(2k-1)\pi x, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$v_{1,k}(x, L^2_{b,h}) = \mu_{4,k}\big(e^{i\rho_{1,k}x} - e^{i\rho_{1,k}(1-x)}\big), \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Крайові умови, які є спряженими до умов (31), мають вигляд

$$h\big(z'(0) + z'(1)\big) + b\big(z(0) - z(1)\big) = 0\,,$$

$$g\big(z'(0) + z'(1)\big) + b\big(z(0) + z(1)\big) = 0\,. \qquad (33)$$

Визначимо елементи системи $V(L^2_{b,g,h})$ та біортогональної системи $W(L^2_{b,g,h})$. Для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ власні функції оператора $L^2_{b,g,h}$ визначаються за формулами

$$v_{0,k}(x, L^2_{b,g,h}) = \sqrt{2}\sin(2k-1)\pi x - (2k-1)\pi g\frac{1}{b}\sqrt{2}\cos(2k-1)\pi x\,,$$

$$k = 1, 2, \ldots, \qquad (34)$$

$$v_{1,k}(x, L^2_{b,g,h}) = \mu_{4,k}\big(e^{i\rho_{1,k}x} - e^{i\rho_{1,k}(1-x)}\big), \qquad k = 1, 2, \ldots. \qquad (35)$$

Елементи системи $W(L^2_{b,g,h})$, біортогональної до $V(L^2_{b,g,h})$, мають вигляд

$$w_{0,k}(x, L^2_{b,g,h}) = v_{0,k}(x, L^2_{b,h}) = \sqrt{2}\sin(2k-1)\pi x, \qquad k = 1, 2, \ldots, \qquad (36)$$

$$w_{1,k}(x, L^2_{b,g,h}) = v_{1,k}(x, L^2_{b,h}) - i\frac{1}{b}h\rho_{1,k}\mu_{5,k}\big(e^{i\rho_{1,k}x} + e^{i\rho_{1,k}(1-x)}\big),$$

$$k = 1, 2, \ldots. \qquad (37)$$

Отже, система функцій $V(L^2_{b,g,h})$, задана формулами (34), (35), має єдину біортогональну систему $W(L^2_{b,g,h})$, елементи якої визначаються рівностями (36), (37). Тому система $V(L^2_{b,g,h})$ є повною та мінімальною в просторі $L_2(0,1)$.

З рівностей (34), (37) випливає, що послідовності функцій $\{v_{0,k}(x, L^2_{b,g,h})\}_{k=1}^{\infty}$ та $\{w_{1,k}(x, L^2_{b,g,h})\}_{k=1}^{\infty}$ необмежені за нормою простору $L_2(0,1)$ при $k \to \infty$, якщо $g \neq 0$. Теорему доведено. ♦

Наслідок 5. *Нехай $h \neq 0$. Тоді крайові умови* (31) *є не сильно регулярними за Біркгофом та існує базис Рісса з двовимірних підпросторів, отриманих об'єднанням власних підпросторів, які відповідають близьким власним значенням оператора $L^2_{b,g,h}$. Сукупність функцій, складених з ортонормованих базисів двовимірних підпросторів, утворює базис Рісса простору $L_2(0,1)$.*

Д о в е д е н н я проводиться аналогічно до доведення наслідку 1. ♦

Зафіксуємо в умовах (31) коефіцієнт $b = 0$. В результаті отримуємо такі крайові умови:

$$g(y'(0) - y'(1)) + h(y'(0) + y'(1)) = 0,$$

$$y(0) + y(1) = 0. \tag{38}$$

Спряжені до (38) умови еквівалентні крайовим умовам

$$z'(0) + z'(1) = 0,$$

$$h(z(0) + z(1)) + g(z(0) - z(1)) = 0. \tag{39}$$

Зауваження 10. Якщо $h = 0$, тоді крайові умови (38), (39) є виродженими.

Самоспряжені умови (32) при $b = 0$ співпадають з антиперіодичними умовами

$$y'(0) + y'(1) = 0, \qquad y(0) + y(1) = 0. \tag{40}$$

Самоспряжений оператор $L_{0,1}^2$ задачі (1), (40) має двократні власні значення

$$\lambda_{0,k} = \lambda_{1,k} = (2k-1)^2\pi^2, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

та дві послідовності власних функцій

$$v_{0,k}(x, L_{0,1}^2) = \sqrt{2}\sin(2k-1)\pi x,$$

$$v_{1,k}(x, L_{0,1}^2) = \sqrt{2}\cos(2k-1)\pi x, \qquad k = 1, 2, \dots.$$

Елементи системи $V(L_{0,g,h}^2)$ і біортогональної до неї системи $W(L_{0,g,h}^2)$ у цьому випадку визначаються співвідношеннями

$$v_{0,k}(x, L_{0,g,h}^2) = \sqrt{2}\,(1 + h^{-1}g(2x-1))\sin(2k-1)x, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{41}$$

$$v_{1,k}(x, L_{0,g,h}^2) = \sqrt{2}\cos(2k-1)\pi x, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{42}$$

$$w_{0,0}(x, L_{0,g,h}^2) = 1 + h^{-1}g(2x-1), \tag{43}$$

$$w_{0,k}(x, L_{0,g,h}^2) = \sqrt{2}\,(1 + h^{-1}g(2x-1))\cos(2k-1)x, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{44}$$

$$w_{1,k}(x, L_{0,g,h}^1) = \sqrt{2}\sin(2k-1)\pi x, \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{45}$$

Наслідок 6. *Нехай* $\operatorname{Rang} M = 1$, $d = 0$, $b = 0$, $c = 1$. *Тоді для довільних* $g, h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, *система кореневих функцій* $V(L_{0,g,h}^2)$ *оператора* $L_{0,g,h}^2$, *означених виразами* (41), (42), *є базисом Рісса простору* $L_2(0,1)$.

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення наслідку 4. ♦

Розглянемо випадок крайових умов (5), коли $g = a = 0$, $c \neq 0$. Тоді

$$h(y'(0) + y'(1)) + b(y(0) - y(1)) = 0,$$

$$c(y(0) + y(1)) + d(y(0) - y(1)) = 0. \tag{46}$$

Крайові умови, спряжені до умов (46), визначаються виразами

$$dh(z'(0) - z'(1)) + ch\,(z'(0) + z'(1)) + bc(z(0) - z(1)) = 0,$$

$$z(0) + z(1) = 0. \tag{47}$$

Відповідні самоспряжені крайові умови задаються формулами (32).

Зауваження 11. Крайові умови (46), (47) при $c \neq 0$ є регулярними за Біркгофом, але не сильно регулярними, при $c = 0$ є нерегулярними, а при $|b| + |c| \neq 0$ є невиродженими.

Позначимо через $L^3_{b,c,d,h} \equiv L_{0,b,c,d,0,h}$ оператор задачі (1), (46), а через $V(L^3_{b,c,d,h})$ і $W(L^3_{b,c,d,h})$ – систему власних функцій оператора $L^3_{b,c,d,h}$ та біортогональну до неї систему відповідно.

Теорема 4. *Нехай* $\operatorname{Rang} M = 1$, $g = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $a = 0$. *Тоді для довільних фіксованих чисел* $b, h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, *при довільних* $c, d \in \mathbb{R}$ *власні значення операторів* $L^3_{b,c,d,h}$ *і* $L^2_{b,h}$ *співпадають. Система функцій* $V(L^3_{b,c,d,h})$ *і біортогональна до неї система* $W(L^3_{b,c,d,h})$ *є повними у просторі* $L_2(0,1)$, *але не майже нормованими при* $dh \neq 0$.

Д о в е д е н н я. Ізоспектральність операторів $L^3_{b,c,d,h}$ та $L^2_{b,h}$ доводиться аналогічно, як у теоремі 1.

Власні функції оператора $L^3_{b,c,d,h}$ визнаються рівностями

$$v_{0,k}(x, L^3_{b,c,d,h}) = v_{0,k}(x, L^2_{b,h}) = \sqrt{2}\sin(2k-1)\pi x, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{48}$$

$$v_{1,k}(x, L^3_{b,c,d,h}) = v_{1,k}(x, L^2_{b,h}) + idh(bc)^{-1}\rho_{1,k}\mu_{4,k}\left(e^{i\rho_{1,k}x} + e^{i\rho_{1,k}(1-x)}\right), \quad k = 1, 2, \dots. \tag{49}$$

Елементи системи $W(L^3_{b,c,d,h})$ обчислюються за формулами

$$w_{0,k}(x, L^3_{b,c,d,h}) = \sqrt{2}\sin(2k-1)\pi x + (2k-1)\pi dh(bc)^{-1}\sqrt{2}\cos(2k-1)\pi x, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{50}$$

$$w_{1,k}(x, L^3_{b,c,d,h}) = \mu_{4,k}\left(e^{i\rho_{1,k}x} - e^{i\rho_{1,k}(1-x)}\right), \qquad k = 1, 2, \dots. \tag{51}$$

Отже, для системи функцій $V(L^3_{b,c,d,h})$ існує єдина біортогональна система функцій $W(L^3_{b,c,d,h})$, які визначаються співвідношеннями (50), (51).

Тому система $V(L^3_{b,c,d,h})$, складена з функцій (48), (49), є повною і мінімальною у просторі $L_2(0,1)$ (див. [2]).

З формул (49), (50) випливає, що послідовності функцій $\{v_{1,k}(x, L^3_{b,c,d,h})\}_{k=0}^{\infty}$ та $\{w_{0,k}(x, L^3_{b,c,d,h})\}_{k=0}^{\infty}$ є необмеженими за нормою простору $L_2(0,1)$ при $k \to \infty$ у випадку, коли $dh \neq 0$.

Отже, системи $V(L^3_{b,c,d,h})$, $W(L^3_{b,c,d,h})$ не є майже нормованими у просторі $L_2(0,1)$. Теорему доведено. ♦

Наслідок 7. *Нехай* $\operatorname{Rang} M = 1$, $g = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $a = 0$. *Тоді для довільних фіксованих чисел* $b, h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, *при довільних* $c, d \in \mathbb{R}$ *існує базис Рісса з двовимірних підпросторів, отриманих об'єднанням власних підпросторів оператора* $L^3_{b,c,d,h}$, *які відповідають близьким власним значенням. Сукупність ортонормованих базисів двовимірних підпросторів, які відповідають власним значенням оператора* $L^3_{b,c,d,h}$, *утворює базис Рісса простору* $L_2(0,1)$.

Д о в е д е н н я аналогічне до доведення наслідку 1. ♦

Нехай $b = 0$, $c \neq 0$. Тоді крайові умови (46) визначаються рівностями

$$y'(0) + y'(1) = 0,$$

$$c\big(y(0) + y(1)\big) + d\big(y(0) - y(1)\big) = 0. \tag{52}$$

Спряжені до умов (52) еквівалентні крайовим умовам

$$d\big(z'(0) - z'(1)\big) + c\big(z'(0) + z'(1)\big) = 0,$$

$$z(0) + z(1) = 0. \tag{53}$$

Відповідні самоспряжені умови (32) співпадають з антиперіодичними умовами (40).

Кореневі функції оператора $L^3_{b,c,d,h}$ задачі (1), (52) визначаються рівностями

$$v_{0,k}(x, L^3_{b,c,d,h}) = \sqrt{2}\sin(2k-1)\pi x, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$v_{1,k}(x, L^3_{b,c,d,h}) = \sqrt{2}\left(1 + c\frac{1}{d}(2x-1)\right)\cos(2k-1)x, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Елементи біортогональної системи $W(L^3_{b,c,d,h})$ у цьому випадку визначені формулами

$$w_{0,k}(x, L^3_{b,c,d,h}) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{c}d(2x-1)\right)\sin(2k-1)x, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$w_{1,k}(x, L^3_{b,c,d,h}) = \sqrt{2}\cos(2k-1)\pi x, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Зауваження 12. Якщо $c = 0$, тоді крайові умови (52), (53) є виродженими.

Наслідок 8. *Нехай* $\operatorname{Rang} M = 1$, $g = 0$, $c \neq 0$, $a = 0$, $b = 0$. *Тоді для довільних* $c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, *система функцій* $V(L^3_{b,c,d,h})$ *є базисом Рісса простору* $L_2(0,1)$.

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення наслідку 4. ♦

Зауваження 13. У випадку $g = h = \frac{1}{2}$ крайові умови (29) співпадають з умовами Іонкіна [7].

Надаючи коефіцієнтам у крайових умовах (21) конкретних значень, отримуємо такі умови:

1°) при $g = 1$, $a = -1$, $c = d = \frac{1}{2}$ – крайові умови, еквівалентні крайовим умовам, які досліджені у праці [28];

2°) при $g = 1$, $a = 1$, $c = d = \frac{1}{2}$ – крайові умови, еквівалентні крайовим умовам, які вивчено у роботі [9];

3°) при $g = 1$, $a = -\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $c = d = \frac{1}{2}$ – крайові умови, еквівалентні крайовим умовам, які досліджено у статті [12].

Зауваження 14. У роботі [13] вивчався випадок задачі (1), (46), коли коефіцієнти крайових умов є комплексними числами: $h = 1$, $b = i$. Тоді оператор задачі (1), (32) є несамоспряженим, і система його власних функцій є базисом Барі [2]. Тому теорема 3 і наслідки 5, 6 залишаються правильними.

Висновки. Отже, в роботі отримано такі результати.

• Вивчено самоспряжені крайові задачі, оператори яких розщеплюються на просторах симетричних та антисиметричних функцій.

• Визначено класи крайових несамоспряжених задач з регулярними, але не сильно регулярними умовами. Побудовано системи власних функцій операторів досліджуваних задач і біортогональні системи функцій. Зокрема, вивчено крайову задачу, яка при певних значеннях коефіцієнтів крайових умов містить відомі сім'ї регулярних неспектральних за Данфордом [3] задач [3, 9, 12, 28].

• Виділено сім'ї суттєво несамоспряжених задач, кореневі функції яких утворюють базис Рісса. Зокрема, вивчено крайову задачу, яка при певних значеннях коефіцієнтів крайових умов включає нелокальні умови Іонкіна [7] і спряжені до них.

1. *Бассотти Л.* Линейные операторы, T-инвариантные относительно некоторой группы гомеоморфизмов // Успехи мат. наук. – 1988. – **43**, № 1. – С. 57–85.
   Те саме: *Bassotti L.* Linear operators that are T-invariant with respect to a group of homeomorphisms // Rus. Math. Surv. – 1988. – **43**, No. 1. – P. 67–101. http://dx.doi.org/10.1070/RM1988v043n01ABEH001538.
2. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. – Москва: Наука, 1965. – 448 с.
   Те саме: *Gohberg I. C., Krein M. G.* Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators. – Providence: Amer. Math. Soc., 1969. – xv+378 p.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 3. Спектральные операторы. Москва: Мир. 1974. – 662 с.
   Те саме: *Dunford N., Schwartz J. T.* Linear operators. Part III. Spectral operators. – New York: Wiley Intersci., 1971. – 688 p.
4. *Дезин А. А.* Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 2000. – **229**. – 176 с. – http://mi.mathnet.ru/book242.
   Те саме: *Dezin A. A.* Differential operator equations: A method of model operators in the theory of boundary value problems // Proc. Steklov Inst. Math. – 2000. – **229**. – 161 p. – Zbl 0981.47032.
5. *Ильин В. А.* О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1976. – **142**: Сб статей: Теория чисел, математический анализ и их приложения. – С. 148–155.
   Те саме: *Il'in V. A.* Existence of a reduced system of eigen- and associated functions for a nonselfadjoint ordinary differential operator // Proc. Steklov Inst. Math. – 1979. – **142**: Number theory, mathematical analysis and their applications. – P. 157–164. – Zbl 0434.34018.
6. *Ильин В. А., Крицков Л. В.* Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и ее прил. Темат. обзор. Функц. анализ. – **96**. – Москва: ВИНИТИ, 2006. – С. 5–105.
   Те саме: *Il'in V. A., Kritskov L. V.* Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators // J. Math. Sci. – 2003. – **116**, No. 5. – P. 3489–3550. – https://doi.org/10.1023/A:1024180807502.
7. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13,** № 2. – С. 294–304.
8. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – Киев: Наук. думка, 1993. – 230 с.
9. *Кесельман Г. М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов. Математика. – 1964. – **39**, №. 2. – С 82–93.
10. *Макин А. С.* О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференц. уравнения. – 2006. – **42,** № 4. – С. 560–562.
   Те саме: *Makin A. S.* On a nonlocal perturbation of a periodic eigenvalue problem // Differ. Equat. – 2006. – **42,** No. 4. – P. 599–602.

11. *Михайлов В. П.* О базисах Рисса в $\mathfrak{L}_2(0,1)$ // Докл. АН СССР. – 1962. – **144**, № 5. – С. 981–984.
12. *Мокин А. Ю.* Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. – 2009. – **45,** № 1. – С. 123–137.
    Те саме: *Mokin A. Yu.* On a family of initial-boundary value problems for the heat equation // Differ. Equat. – 2009. – **45,** No. 1. – P. 126–141.
13. *Муравей Л. А.* Базисы Рисса в $L_2(-1,1)$ // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. – 1967. – **91**: Граничные задачи для дифференциальных уравнений. – С. 113–131. – http://mi.mathnet.ru/book1220.
    Те саме: *Muravei L. A.* Riesz bases in $L_2(-1,1)$ // Proc. Steklov Inst. Math. – 1969. – **91**: Boundary problems for differential equations. – P. 117–136.
14. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука. 1969. – 526 с.
    Те саме: *Naimark M. A.* Linear differential operators. – London: G. Harrap, 1968. – 144 p.
15. *Шкаликов А. А.* О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // Успехи мат. наук. – 1979. – **34**, № 5. – С. 235–236.
    Те саме: *Shkalikov A. A.* On the basis problem of the eigenfunctions of an ordinary differential operator // Rus. Math. Surv. – 1979. – **34**, No. 5. – P. 249–250.
16. *Birkhoff G. D.* Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – **9**, No. 4. – P. 373–395.
17. *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – **9**, No. 2. – P. 219–231.
18. *Lang P., Locker J.* Spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$. I. Spectral properties // J. Math. Anal. Appl. – 1989. – **141**, No. 2. – P. 538–558.
19. *Lang P., Locker J.* Spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$. II. Analysis of cases // J. Math. Anal. Appl. – 1990. – **146**, No. 1. – P. 148–191.
20. *Locker J.* The spectral theory of second order two-point differential operators: I. A priory estimates for the eigenvalues and completeness // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. **A**. – 1992. – **121**, No. 3–4. – P. 279–301.
21. *Locker J.* The spectral theory of second order two-point differential operators: II. Asymptotic expansions and the characteristic determinant // J. Differ. Equat. – 1994. – **114**, No. 1. – P. 272–287.
22. *Locker J.* The spectral theory of second order two-point differential operators: III. The eigenvalues and their asymptotic formulas // Rocky Mountain J. Math. – 1996. – **26**, No. 2. – P. 679–706.
23. *Locker J.* The spectral theory of second order two-point differential operators: IV. The associated projections and the subspace $S_\infty(L)$ // Rocky Mountain J. Math. – 1996. – **26**, No. 4. – P. 1473–1498.
24. *Stone M. H.* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. – 1926. – **28**, No. 4. – P. 695–761.
25. *Stone M. H.* Irregular differential systems of order two and the related expansion problems // Trans. Amer. Math. Soc. – 1927. – **29**, No. 1. – P. 23–53.
26. *Tamarkin J. D.* Sur quelques points de la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires et sur la généralisation de la série de Fourier // Rend. Circ. Matem. Palermo. – 1912. – **34**. – P. 345–382.
27. *Tamarkin J.* Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions // Math. Zeit.. – 1928. – **27**, No. 1. – P. 1–54.
28. *Walker P. W.* A nonspectral Birkhoff-regular differential operator // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – **66**, No. 1. – P. 187–188.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С РЕГУЛЯРНЫМИ, НО НЕ УСИЛЕННО РЕГУЛЯРНЫМИ ПО БИРКГОФФУ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ДВУКРАТНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Исследованы самосопряженные задачи, операторы которых расщепляются на инвариантных подпространствах, индуцированных оператором инволюции $Iy(x) = y(1 - x)$. *Построены несамосопряженные возмущения таких задач, являющиеся регулярными, но не усиленно регулярными по Биркгоффу, которые при некоторых значениях коэффициентов краевых условий превращаются в неспектральные по Данфорду задачи. Изучены спектральные свойства операторов, соответствующих этим возмущениям, в частности, определены собственные значения и корневые функции, а также исследована полнота и базисность системы корневых функций. Найдены семейства краевых условий, порождающие существенно несамосопряженные задачи, которые включают нелокальные условия Самарского – Ионкина.*

BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH REGULAR BUT NOT STRENUOUSLY REGULAR BY BIRKHOFF CONDITIONS FOR THE SECOND-ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR

The self-adjoint problems the operators of whose split on invariant subspaces induced by the involution operator $Iy(x) = y(1 - x)$ *are investigated. The non-self-adjoint perturbations of such problems which are regular but not strenuously regular in the sense of Birkhoff and which, for some values of the coefficients of the boundary conditions, transform into the non-spectral by Dunford problems are constructed. The spectral properties of the operators corresponding to these perturbations are studied, in particular, the eigenvalues and root functions are determined, as well as the completeness and basis property of the system of root functions are investigated. The families of boundary conditions which generate essentially non-self-adjoint problems containing non-local Samarskii – Ionkin conditions are found.*

[1] Ін-т прикл. математики та фундам. наук нац. ун-ту «Львів. політехніка», Львів,
[2] Жешувський ун-т, Жешув, Польща

Одержано
21.08.16