

АНАЛІЗ ЗАДАЧІ СТІЙКОСТІ ТОНКИХ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ

За допомогою скінченноелементної методики досліджується стійкість оболонок, податливих до зсуву та стиснення. З використанням співвідношень геометрично нелінійної теорії тонких оболонок, податливих до зсуву та стиснення (шестимодальний варіант), записано ключові рівняння для визначення початкового післякритичного стану таких оболонок і сформульовано відповідну варіаційну задачу. Побудовано числову схему методу скінченних елементів для розв'язування задачі стійкості оболонок, податливих до зсуву та стиснення. Досліджено порядок швидкості збіжності побудованої схеми числового розв'язування задач стійкості.

Нелінійна теорія оболонок [6, 11] дає ключ до пояснення процесу втрати їх стійкості. Задачі стійкості тонкостінних оболонок обговорювалися у працях [2–5, 10, 12] і продовжують залишатися найбільш важливими з практичної точки зору.

У статті записано ключові співвідношення для визначення початкового післякритичного стану гнучких оболонок, податливих до зсуву та стиснення, з використанням методу скінченних елементів. Особливість математичної моделі полягає у напівдискретизації на основі кінематичних гіпотез Тимошенка – Міндліна вектора переміщень пружного тіла за товщиною координатою зі збереженням повного вектора поворотів нормалі серединної поверхні.

1. Головні співвідношення теорії тонких оболонок, податливих до зсуву та стиснення. Розглянемо оболонку як тривимірне тіло сталої товщини h . Віднесемо серединну поверхню Ω оболонки до криволінійної ортогональної системи координат $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ і введемо ортогональну до неї змінну α_3 так, що $|\alpha_3| \leq h/2$. Вважаємо, що координатні лінії серединної поверхні збігаються із лініями головних кривин, а товщина оболонки є істотно меншою від інших її розмірів.

Вектор переміщень довільної точки оболонки, податливої до зсуву та стиснення, повністю визначають компоненти вектора переміщень $u_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$, та вектора кутів повороту нормалі до серединної поверхні оболонки $\gamma_i(\alpha)$, $i = 1, 2, 3$. Введемо позначення: $u = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ – вектор узагальнених переміщень точок серединної поверхні оболонки, $e_L = (e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, \alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23})^T$ – вектор компонент тензора лінійної деформації, $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix}^T$ – вектор компонент тензора поворотів, $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \chi_{11}, \chi_{22}, \chi_{12}, \chi_{13}, \chi_{23})^T$ – вектор компонент тензора деформацій Гріна.

Тоді вирази для визначення компонент тензора лінійної деформації і тензора повороту з точністю до $o(h)$ подамо в матричній формі у вигляді:

$$\begin{aligned} e_L &= C_L u, \\ \omega &= C_\Omega u. \end{aligned} \quad (1)$$

Деформаційні співвідношення для гнучких оболонок з урахуванням лінійної і нелінійної складових деформації запишемо таким чином:

$$\varepsilon = e_L + e_N, \quad (2)$$

де

$$e_N = \frac{1}{2} (C_\Omega u)_{11}^\top E_\Omega (C_\Omega u).$$

Тут C_L та C_Ω – матриці диференціальних операторів розмірностей 11×6 та 6×6 відповідно, E_Ω – матриця вигляду $E_\Omega = (E_1, E_2, \dots, E_{11})^\top$, де E_i – матриці розмірностей 6×6 . Повний вигляд C_L наведено в [1], а C_Ω та E_i – у [9].

Зауважимо, що співвідношення (1) визначають геометричні співвідношення теорії оболонок, податливих до зсуву та стиснення, в лінійній постановці, а співвідношення (2) пов'язують компоненти тензора деформацій Гріна з переміщеннями в геометрично нелінійній постановці для розглядуваних оболонок.

Співвідношення пружності, що пов'язують деформації з внутрішніми зусиллями та моментами, подамо у матричному вигляді:

$$\sigma = B \varepsilon,$$

де $\sigma = (N_{11}, N_{22}, N_{33}, S, N_{13}, N_{23}, M_{11}, M_{22}, H, M_{13}, M_{23})^\top$ – вектор внутрішніх (симетричних) зусиль-моментів, B – симетрична матриця пружних характеристик матеріалу розмірності 11×11 [1].

Диференціальні рівняння, що описують рівновагу деформованого тіла, та статичні крайові умови на частині Γ_σ контуру серединної поверхні оболонки $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ отримаємо з принципу можливих переміщень [6] і запишемо у матричному вигляді:

$$C_\sigma \sigma^* + P = 0, \quad (3)$$

$$G_\sigma \sigma^* \Big|_{\Gamma_\sigma} = \sigma_g. \quad (4)$$

Для встановлення кінематичної визначеності системи необхідно додати також крайові умови в зміщеннях:

$$G_u u \Big|_{\Gamma_u} = u_g, \quad \Gamma_u = \Gamma \setminus \Gamma_\sigma. \quad (5)$$

У виразах (3)–(5) введено такі позначення:

$P = (P_1, P_2, P_3, m_1, m_2, m_3)^\top$ – вектор зовнішнього навантаження, $\sigma^* = (N_{11}^*, N_{22}^*, N_{33}^*, N_{12}^*, N_{21}^*, N_{13}^*, N_{31}^*, N_{23}^*, N_{32}^*, M_{11}^*, M_{22}^*, M_{12}^*, M_{21}^*, M_{13}^*, M_{23}^*)^\top$ – вектор введених зусиль-моментів, $\sigma_g = (N_t, N_s, N_n, M_t, M_s, M_n)^\top$ – вектор крайових зусиль-моментів, $u_g = (u_t^b, u_s^b, u_n^b, \gamma_t^b, \gamma_s^b, \gamma_n^b)^\top$ – вектор крайових зміщень, C_σ – матриця диференціальних операторів розмірності 6×15 , G_σ , G_u – матриці розмірностей 6×15 та 6×6 відповідно. Повний вигляд матриць C_σ , G_σ , G_u подано у [9].

Зв'язок між симетричними зусиллями-моментами та їх нововведеними характеристиками подамо у матричному вигляді:

$$\sigma^* = F \sigma,$$

де F – матриця розмірності 15×11 , відмінні від нуля коефіцієнти якої наведено у [9].

Лінійне формулювання рівнянь рівноваги й відповідних крайових умов теорії оболонок, податливих до зсуву та стиснення, подано у [1].

2. Задача стійкості оболонок, податливих до зсуву та стиснення. Для запису задачі стійкості розглядуваної математичної моделі оболонок використаємо енергетичний критерій визначення стійкості і критичного навантаження втрати стійкості [7].

Умова для визначення критичного навантаження, тобто навантаження, при якому стійкий стан рівноваги переходить у нестійкий, має вигляд

$$\delta^2\Pi = 0, \quad (6)$$

де Π – функціонал повної потенціальної енергії в геометрично нелінійній теорії оболонок, податливих до зсуву та стиснення [7]:

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \varepsilon^\top(u) E_0 B \varepsilon(u) d\Omega - \iint_{\Omega} u^\top P d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} (G_u u)^\top \sigma_g d\Gamma_\sigma.$$

Функціонал Π визначаємо як різницю функціоналів енергії деформацій U і роботи зовнішніх сил A :

$$\Pi = U - A.$$

Зауважимо, що $\delta^2\Pi = \delta^2U$.

Повні переміщення u_* у початковому післякритичному стані визначаємо як суму переміщень початкового (докритичного) стану u_0 і збурених переміщень u :

$$u_* = u_0 + \alpha u.$$

Тут α – малий параметр, $0 < \alpha \ll 1$.

Енергію деформацій U_* у початковому післякритичному стані запишемо як

$$U_* = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \varepsilon_*^\top(u) E_0 B \varepsilon_*(u) d\Omega = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (e_L(u_0) + \alpha e_L(u) + \alpha^2 e_N(u))^\top \times \\ \times E_0 (\sigma_0 + \alpha \sigma_L(u) + \alpha^2 \sigma_N(u)) d\Omega = U_0 + \alpha U_1 + \alpha^2 U_2 + \dots$$

Тут ε_* – деформації у початковому післякритичному стані, що визначаються як суми лінійних докритичних деформацій і нелінійних деформацій, зумовлених збуреними переміщеннями,

$$U_0 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} e_L^\top(u_0) E_0 \sigma_0 d\Omega,$$

$$U_1 = \iint_{\Omega} e_L^\top(u) E_0 \sigma_0 d\Omega,$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (e_L^\top(u) E_0 \sigma_L(u) + 2e_N^\top(u) E_0 \sigma_0) d\Omega,$$

де σ_0 – напруження у докритичному стані; σ_L та σ_N – напруження, зумовлені збуреними лінійними деформаціями e_L та поворотами ω відповідно.

Функціонал U_2 містить квадратичні члени від збурених переміщень, а його друга варіація приводить до рівняння стійкості (6).

Використовуючи скінченноелементну апроксимацію

$$u = Nq,$$

де q – вектор шуканих переміщень і поворотів у всіх вузлах скінченних елементів, N – блочно-діагональна матриця апроксимуючих поліномів, функціонал U_2 подамо як

$$U_2 = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} q^\top (C_L N)^\top E_0 B (C_L N) q d\Omega + \\ + \iint_{\Omega} q^\top \left(\sum_{k=1}^{11} (E_0 \sigma_0)_k (C_\Omega N)_{11}^\top E_k C_\Omega N \right)^\top q d\Omega. \quad (7)$$

Оскільки докритичний стан визначається за лінійною теорією, то інтегральні характеристики σ_0 змінюються пропорційно до параметра навантаження λ :

$$\sigma_0 = \lambda \sigma_0^*, \quad (8)$$

де σ_0^* – напруження при заданому зовнішньому навантаженні.

Враховуючи (8), з виразу (7) отримуємо рівняння стійкості

$$\iint_{\Omega} (C_L N)^\top E_0 B C_L N q \, d\Omega + \lambda \iint_{\Omega} \sum_{k=1}^{11} (E_0 \sigma_0)_k (C_\Omega N)_{11}^\top E_k C_\Omega N q \, d\Omega = 0,$$

яке подамо у матричному вигляді

$$K_T(0)q + \lambda G(q_0)q = 0, \quad (9)$$

де

$K_T(q) = K_U(q) + G(q)$ – матриця тангенціальної жорсткості,

$K_U(q) = \iint_{\Omega} ((C_L + (C_\Omega N q)_{11}^\top E_\Omega C_\Omega) N)^\top E_0 B (C_L + (C_\Omega N q)_{11}^\top E_\Omega C_\Omega) N \, d\Omega$ – матриця переміщень,

$G(q_0) = \iint_{\Omega} \sum_{k=1}^{11} T_k(N q_0) (C_\Omega N)_{11}^\top E_k C_\Omega N \, d\Omega$ – геометрична матриця жорсткості або матриця початкових напружень,

q_0 – вектор шуканих переміщень лінійної статичної задачі,

$$T(q) = (T_1, T_2, \dots, T_{11})^\top = E_0 B \left(C_L N q + \frac{1}{2} (C_\Omega N q)_{11}^\top E_\Omega C_\Omega N q \right).$$

Найменше власне значення рівняння (9) визначає критичний параметр навантаження λ^* , при якому оболонка з початкового стійкого стану рівноваги переходить у суміжний стан рівноваги.

Введемо простір кінематично допустимих векторів переміщень

$$V = \{v = (v_1, v_2, v_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in [W_2^1(\Omega)]^6 \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_u\}$$

і такі форми:

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} (C_L v)^\top E_0 B C_L u \, d\Omega,$$

$$g(u, v) = \iint_{\Omega} \sum_{k=1}^{11} c_k (C_\Omega v)_{11}^\top E_k C_\Omega u \, d\Omega, \quad c_k = (E_0 \sigma_0)_k.$$

Сформулюємо варіаційну задачу стійкості:

задано: $\sigma_0 = B e_L(u_0)$, де u_0 – розв'язок лінійної варіаційної задачі,

знайти: пару $\{u, \lambda\} \in V \times R$, $\|u\|_V = 1$, таку, що

$$a(u, v) + \lambda g(u, v) = 0 \quad \forall u, v \in V.$$

Схему розв'язування задач дослідження стійкості оболонок методом скінченних елементів реалізовано у вигляді проблемно-орієнтованого комплексу програм.

3. Числовий приклад. Розглянемо задачу про знаходження критичних навантажень при осесиметричному випучуванні затиснутої по контуру круглої пластинки радіуса R і товщини h , що знаходиться під дією радіальних рівномірно розподілених уздовж контуру стискуючих зусиль P (рис. 1). Вважаємо, що точки контуру можуть вільно зміщуватися у площині пластини, а її зігнута поверхня є осесиметричною.

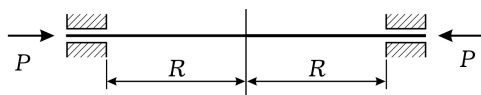


Рис. 1. Затиснута по контуру круга пластинка під дією радіального стиску.

Наведемо порівняння результатів числового та аналітичного розрахунків критичного навантаження P_{cr} для розглядуваної задачі у випадку, коли модуль Юнга матеріалу пластинки $E = 0.625 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.22$ і $h/R = 1/20$ ($h = 0.5 \text{ м}$, $R = 10 \text{ м}$). Аналітичне значення критичного навантаження за теорією Кірхгофа – Лява подано у праці [2]: $P_{cr} \cdot 10^{-8} = 1.0043391$.

У табл. 1 наведено порівняння результатів числового розрахунку P_{cr} для цієї задачі за п'ятимодальним варіантом теорії оболонок типу Тимошенка – Міндліна та шестимодальним варіантом теорії оболонок, податливих до зсуву та стиснення.

Для обчислення порядків швидкості збіжності використаємо формулу

$$k(\varepsilon) = \log_2 \left(\frac{f_\varepsilon - f_{\varepsilon/2}}{f_{\varepsilon/2} - f_{\varepsilon/4}} \right),$$

де f_ε , $f_{\varepsilon/2}$ та $f_{\varepsilon/4}$ – значення наближених розв'язків, отримані на сітках з кроками ε , $\varepsilon/2$, $\varepsilon/4$ відповідно. Обчислені показники швидкості збіжності за просторовою змінною добре узгоджені з відповідними теоретичними даними, наведеними у [8].

Таблиця 1

| Поділ | $P_{cr} \cdot 10^{-8}$ (п'ятимодальний варіант) | $P_{cr} \cdot 10^{-8}$ (шестимодальний варіант) | $k(\varepsilon)$ |
|-------|--|--|------------------|
| 4×1 | 1.0222421 | 1.0271414 | 2.60 |
| 8×1 | 1.0045389 | 1.0055348 | 3.32 |
| 16×1 | 1.0023116 | 1.0019751 | 3.77 |
| 32×1 | 1.0021293 | 1.0016176 | 3.95 |
| 64×1 | 1.0021170 | 1.0015914 | 4.08 |
| 128×1 | 1.0021162 | 1.0015897 | – |
| 256×1 | 1.0021161 | 1.0015896 | – |

З аналізу поданих у табл. 1 результатів бачимо, що критичне навантаження, необхідне для втрати стійкості круглої пластинки, зменшується при врахуванні стиснення.

Висновки. З проведених числових експериментів і порівняльного аналізу отриманих числових результатів з урахуванням податливості до зсуву та стиснення із класичними результатами, наведеними в літературі, а також виконаного дослідження порядку швидкості збіжності застосованого методу впливає, що запропонована методика числового розв'язування задач стійкості теорії оболонок, податливих до зсуву та стиснення, дозволяє отримати достовірні результати. У майбутньому доцільно виконати розрахунки критичних навантажень для оболонок складнішої геометрії.

1. Вагін П., Шот І. Аналіз напружено-деформованого стану тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2006. – Вип. 11. – С. 135–147.

2. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. – Москва: Наука, 1967. – 984 с.
3. Григolloк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. – Москва: Наука, 1978. – 360 с.
4. Григоренко Я. М., Влайков Г. Г., Григоренко А. Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – Киев: Академ-періодика, 2006. – 472 с.
5. Муштарі Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задаче устойчивости упругого равновесия // Изв. физ.-мат. об-ва при Казан. ун-те. Сер. 3. – 1938. – Т. 9. – С. 71–150.
6. Новожилон В. В. Основы нелинейной теории упругости. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1948. – 212 с.
7. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
8. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – Москва: Мир, 1977. – 351 с.
 The same: *Strang G., Fix G. J. An analysis of the finite element method.* – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1973. – xiv+306 p.
9. Шот І. Я. Чисельне розв'язування задач теорії тонких оболонок, податливих на зсув та стиснення // Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. Математика і механіка. – 2013. – 18, Вип. 1 (17). – С. 132–141.
10. Bushnell D. Stress, stability and vibration of complex shell of revolution: Analysis and user's manual for BOSOR 3. – SAMSO TR 69-375. LMSC Rept. N-5J-69-1. Lockheed Missiles and Spase Co., Sept. 1969.
11. Libai A., Simmonds J. G. The nonlinear theory of elastic shells. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. – 560 p.
12. Stein M. Some recent advances in the investigation of shell buckling // AIAA Journal. – 1968. – 6, No. 12. – P. 2339–2345. – <https://doi.org/10.2514/3.4992>.

АНАЛИЗ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДАТЛИВЫХ К СДВИГУ И СЖАТИЮ

С помощью конечно-элементной методики исследуется устойчивость оболочек, податливых к сдвигу и сжатию. С использованием соотношений геометрически нелинейной теории тонких оболочек, податливых к сдвигу и сжатию (шести-модальный вариант), записаны ключевые уравнения для определения начального после критического состояния рассматриваемых оболочек и сформулирована соответствующая вариационная задача. Построена числовая схема метода конечных элементов для решения задачи устойчивости оболочек, податливых к сдвигу и сжатию. Исследован порядок скорости сходимости построенной схемы численного решения задач устойчивости.

ANALYSIS OF PROBLEM ON STABILITY OF THIN SHELLS COMPLIANT TO SHEAR AND COMPRESSION

Using finite element method the stability of shells compliant to shear and compression is studied. On the basis of relations of geometrically nonlinear theory of thin shells compliant to shear and compression (the six-modal variant) the key equations for determining their initial post-critical state are written. Corresponding variational problem is formulated. Numerical scheme of finite element method for solving the problems of stability of shells compliant to shear and compression is constructed. The order of convergence rate of the constructed scheme of numerical solution of the problems of stability is investigated.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
28.04.16