

## МОДЕЛЮВАННЯ ПОТОКІВ ДОМІШКОВОЇ РЕЧОВИНИ У ВИПАДКОВІЙ ШАРУВАТІЙ СМУЗІ З ЙМОВІРНИМ РОЗМІЩЕННЯМ ВКЛЮЧЕНЬ БІЛЯ ГРАНИЦЬ ТІЛА

*Досліджено випадковий потік домішкової речовини у двофазній стохастично неоднорідній смузі з найбільш ймовірним розміщенням включень в околі поверхонь тіла. Математичну модель сформульовано для функції дифузійного потоку за ненульової сталої початкової концентрації. Випадковий дифузійний потік отримано у вигляді ряду Неймана. Проведено процедуру усереднення стохастичного потоку за ансамблем конфігурацій фаз із функцією густини арксинус-розподілу включень. Проаналізовано вплив характеристик середовища на розподіл потоку маси. Показано, що для коефіцієнта дифузії домішкової речовини у включенні, більшого, ніж у матриці, збільшення характерної товщини прошарків зменшує значення дифузійного потоку, тоді як при зростанні об'ємної частки включень потік маси збільшується в усьому тілі.*

В умовах неповної інформації про геометричні параметри тіл зі складною внутрішньою структурою виникає необхідність розгляду процесів масо-перенесення, зокрема концентрації мігруючої речовини, хімічних потенціалів і дифузійних потоків як стохастичних. Відповідно фізичні процеси, які протікають у таких середовищах, описують випадковими функціями або полями. Для встановлення основних закономірностей процесів дифузії використовують процедуру усереднення за ансамблем конфігурацій фаз. Однак при моделюванні дифузійних потоків у випадково неоднорідних структурах виконання такої процедури викликає значні труднощі, оскільки у випадку застосування першого закону Фіка невідомою є функція кореляції градієнта випадкового поля концентрації домішкової речовини та стохастичного коефіцієнта дифузії. У статтях [9, 13] для вирішення цієї проблеми запропоновано складати балансові рівняння для вже гомогенізованих середовищ з фізичними характеристиками, які є усередненими величинами, і враховують відмінності між фазами, проте за такого підходу нехтується взаємодією між ними. J. Keller [12] визначає випадковий потік за законом Дарсі, коефіцієнт фільтрації якого є випадковою функцією просторової координати і для побудови розв'язку задачі використовує методи малих збурень і згладжування з відповідними обмеженнями.

У працях [8, 10] запропоновано підхід до математичного опису дифузійних потоків у випадково неоднорідних шаруватих тілах, який базується на формулюванні крайових задач безпосередньо для функції потоку і побудові розв'язку у вигляді ряду Неймана, що дозволяє провести процедуру усереднення за ансамблем конфігурацій фаз із заданою функцією розподілу.

З використанням такого підходу у цій роботі досліджено випадкові дифузійні потоки у двофазній стохастично неоднорідній смузі із арксинус-розподілом шаруватих включень за умови наявності в тілі у початковий момент часу домішкової речовини.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо дифузію домішкової речовини у двофазному шарі товщини  $z_0$ . Вважаємо, що невідомим є розміщення включень у тілі, проте відомий їх ймовірнісний розподіл. Нехай включення розміщені за арксинус-розподілом з функцією густини вигляду [3]

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma^2(\alpha)} \left(\frac{z_0}{z}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{z_0}{z_0-z}\right)^{1-\alpha}, & z \in [0, z_0], \\ 0, & z \notin [0, z_0], \end{cases} \quad (1)$$

де  $\Gamma(x)$  – гамма-функція,  $\alpha$  – ступінь вільності розподілу ( $0 < \alpha < 1$ ).

Розподіл  $f(z)$  дозволяє описувати випадково неоднорідні структури із областями найбільш ймовірного розміщення неоднорідностей біля границь тіла (рис. 1).



Рис. 1. Неоднорідні структури: а) – булату із сорбітною матрицею і скупченням вторинного цементиту [15], б) – гірського каменю [14, 16].

На рис. 2а наведено залежність функції  $f(z)$  (1) густини арксинус-розподілу від різних значень ступеня вільності  $\alpha = 0.05, 0.2, 0.5, 0.7$ . На рис. 2б і рис. 2в проілюстровано структури двофазної багатошарової смуги, які можуть бути описані за допомогою такого розподілу. Зазначимо, що чим менше значення параметра  $\alpha$ , тим ймовірніше розміщення включень біля поверхонь  $z = 0$  і  $z = z_0$  (рис. 2б,  $\alpha = 0.1$ ). Области ймовірного розміщення включень при зростанні ступеня вільності арксинус-розподілу  $\alpha$  стають ширшими, при цьому збільшується ймовірність розміщення включень посередині структури (рис. 2в,  $\alpha = 0.5$ ). Чим ближче значення параметра  $\alpha$  до 1, тим більше випадкова структура наближається до структури із рівномірним розподілом включень.

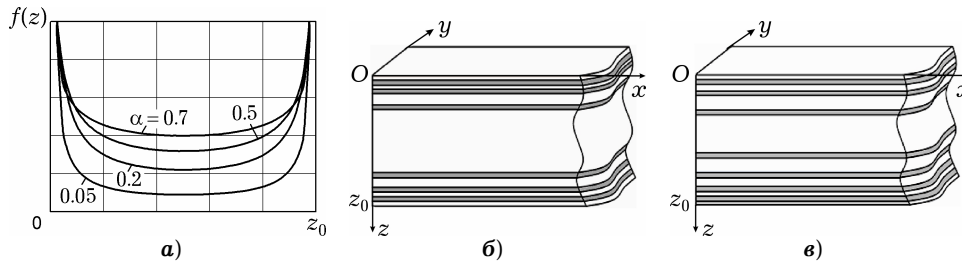


Рис. 2. Густина розподілу включень: а) –  $f(z)$  для різних значень  $\alpha$  в (1), б) – неоднорідні шаруваті структури з арксинус-розподілом при  $\alpha = 0.1$  і в) – при  $\alpha = 0.5$ .

Нехай у багатошаровій смугі, що містить  $n_0$  підшарів фази  $j = 0$  (матриці) та  $n_1$  підшарів фази  $j = 1$  (включення), відбувається процес дифузії домішкової речовини (рис. 2б, рис. 2в). Дифузійні властивості шарів, з яких складене тіло, можуть суттєво відрізнятись, координати розміщення включень, а, отже, і підшарів матриці, є невідомими. Нехай коефіцієнти дифузії домішки є сталими у межах кожної з фаз, а об'єм фази матриці набагато більший, ніж об'єм фази включення:  $v_0 \gg v_1$ .

Крайову задачу масоперенесення формулюємо на основі математичної моделі для дифузійного потоку, побудованої на основі рівняння балансу маси, з якого отримуємо рівняння дифузії безпосередньо для функції потоку та початкових і граничних умов, враховуючи певні обмеження для уникнення фізичних протиріч (наприклад, що в обмежене тіло надходить необмежена кількість домішкової речовини) [10]. Випадковий потік домішкової речовини  $J(z, t)$  у двофазній багатошаровій смугі з внутрішньою структурою типу поданих на рис. 2б і рис. 2в описується таким рівнянням дифузії [8]:

$$\frac{\partial J(z, t)}{\partial t} = D(z) \frac{\partial^2 J(z, t)}{\partial z^2}, \quad (2)$$

де  $D(z) = \begin{cases} D_0, & z \in \Omega_0, \\ D_1, & z \in \Omega_1, \end{cases}$  – випадковий коефіцієнт дифузії,  $\Omega_j$  – багатозв'язна область  $j$ -ї фази ( $j = 0, 1$ ).

Приймаємо, що у початковий момент часу дифузійний потік у тілі відсутній, на поверхні  $z = 0$  підтримується стале значення потоку  $J_*$ , а на границі  $z = z_0$  концентрація мігруючої речовини  $c(z, t)$  рівна нулеві, тобто задано наступні крайові умови:

$$J(z, t)|_{t=0} = 0, \quad J(z, t)|_{z=0} = J_* \equiv \text{const}, \quad c(z, t)|_{z=z_0} = 0. \quad (3)$$

Початкова умова на функцію  $J(z, t)$  означає, що в нульовий момент часу концентрація домішкової речовини у тілі є сталою  $c(z, t)|_{t=0} = c_*$ . Надалі приймаємо, що  $c_* \neq 0$ . Крім того, дифузійний потік на нижній границі,  $z = 0$ , тіла дорівнює деякій функції  $F(t)$ , яку необхідно визначити додатково.

**2. Еквівалентне інтегро-диференціальне рівняння і ряд Неймана.** Розв'язок сформульованої крайової задачі дифузії (2), (3) шукаємо у вигляді ряду Неймана [7]. Для цього вихідну задачу зводимо до еквівалентного інтегро-диференціального рівняння, яке є сумою розв'язку однорідної крайової задачі  $J_0(z, t)$  і згортки детермінованої функції Гріна  $G(z, z', t, t')$  з джерелом, при цьому неоднорідність структури тіла розглядаємо як внутрішні джерела:

$$J(z, t) = J_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') J(z', t') dz' dt'. \quad (4)$$

Тут  $L_s(z) = \sum_{i=1}^{n_1} (D_1 - D_0) \eta_{i1}(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ,  $\eta_{i1}(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Omega_{i1}, \\ 0, & z \notin \Omega_{i1}, \end{cases}$  – випадкова «функ-

ція структури» [6],  $\Omega_{i1}$  –  $i$ -та однозв'язна область фази  $j = 1$ ,  $\sum_{i=1}^{n_1} \Omega_{i1} = \Omega_1$ .

Для цього випадку однорідна крайова задача має вигляд

$$\frac{\partial J_0(z, t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 J_0(z, t)}{\partial z^2}, \quad (5)$$

$$J_0(z, t)|_{t=0} = 0, \quad J_0(z, t)|_{z=0} = J_* \equiv \text{const}, \quad J_0(z, t)|_{z=z_0} = F(t). \quad (6)$$

Функцію потоку на нижній границі тіла  $F(t)$  шукаємо з розв'язку однорідної крайової задачі для функції концентрації [8]:

$$c(z, t) = \frac{J_*}{D_0} (z_0 - z) - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left[ \frac{J_*}{D_0 \xi_n^2} + \frac{(-1)^n c_*}{\xi_n} \right] \cos(\xi_n z),$$

та першого закону Фіка [11]

$$J(z, t) = -D_0 \frac{\partial c(z, t)}{\partial z}.$$

Звідси отримаємо

$$J_0(z, t)|_{z=z_0} \equiv F(t) = J_* - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left( \frac{J_*}{\xi_n} + (-1)^n c_* D_0 \right).$$

Тоді, використовуючи теорію інтегральних перетворень, одержимо розв'язок крайової задачі (5), (6) у вигляді

$$J_0(z, t) = J_* - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left( \frac{J_*}{\xi_n} + (-1)^n c_* D_0 \right) \sin(\xi_n z), \quad (7)$$

де  $\xi_n = \pi(2n - 1)/2z_0$ .

Функція Гріна є розв'язком крайової задачі дифузії з точковим джерелом за нульових початкових і граничних умов [6]:

$$G(z, z', t, t') = \frac{\theta(t - t')}{z_0} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-D_0 y_k^2 (t-t')} [\cos(y_k(z - z')) - \cos(y_k(z + z'))], \quad (8)$$

де  $\theta(t - t')$  – одинична сходинова функція Гевісайда,  $y_k = k\pi/z_0$ .

Розв'язок інтегро-диференціального рівняння (4) шукаємо методом послідовних наближень [4], приймаючи за нульове наближення розв'язок однорідної крайової задачі (7):  $J^{(0)}(z, t) = J_0(z, t)$ . Тоді отримаємо такі рекурентні співвідношення:

$$J^{(1)}(z, t) = J_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') J^{(0)}(z', t') dz' dt',$$

.....,

$$J^{(n)}(z, t) = J_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') J^{(n-1)}(z', t') dz' dt',$$

.....

Враховуючи, що  $L_s(z)J_0(z, t) = (D_1 - D_0) \sum_{i=1}^{n_1} \eta_{i1}(z) \partial^2 \frac{J_0(z, t)}{\partial z^2}$ , загальний член побудованої послідовності функцій  $J^{(0)}, J^{(1)}, \dots, J^{(n)}, \dots$  подамо як

$$J^{(n)}(z, t) = J_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') J_0(z', t') dz' dt' + \dots$$

$$+ \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') L_s(z') \left[ \int_0^{t'} \int_0^{z_0} G(z', z'', t', t'') L_s(z'') \times \dots \right.$$

$$\times \int_0^{t^{(n-2)}} \int_0^{z_0} G(z^{(n-2)}, z^{(n-1)}, t^{(n-2)}, t^{(n-1)}) L_s(z^{(n-1)}) \times$$

$$\left. \times J_0(z^{(n-1)}, t^{(n-1)}) dz^{(n-1)} dt^{(n-1)} \dots \right] dz' dt' + R_n(z, t),$$

де  $R_n(z, t)$  – різниця між  $n$ -м та  $(n - 1)$ -м членами цієї послідовності.

Побудованій послідовності функцій поставимо у відповідність ряд

$$J(z, t) \equiv J_0(z, t) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(z, t). \quad (9)$$

Зазначимо, що ряд (9) є рядом Неймана [2, 4]. Цей ряд є абсолютно і рівномірно збіжним, якщо коефіцієнти дифузії є обмеженими, а коефіцієнт дифузії домішкової речовини у матеріалі базової фази відмінний від нуля [8]. На основі числового аналізу третього члена ряду Неймана (9) для різних

ймовірнісних розподілів, який описує парний взаємовплив підшарів, показано, що при дослідженні потоків у випадково неоднорідних шаруватих тілах достатньо врахувати два перші члени цього ряду [1].

**3. Усереднення випадкового потоку маси за ансамблем конфігурацій фаз.** Обмежившись двома першими членами ряду (9), проведемо процедуру усереднення за ансамблем конфігурацій фаз із функцією розподілу включень  $f(z)$  (1). Приймаємо, що включення мають характерну (середню) товщину  $h_1$ , а випадковою координатою, яка характеризує їх положення, є координата верхньої межі прошарку  $z_{i1}$ ,  $i = 1, \dots, n_1$ . Оскільки у ряді Неймана від випадкової координати  $z_{i1}$  залежить тільки функція  $\eta_{i1}(z')$  в операторі  $L_s(z')$ , то усереднений потік у двофазній випадково неоднорідній шаруватій смузі знаходимо за формулою

$$\begin{aligned} \langle J(z, t) \rangle_{\text{conf}} &= J_0(z, t) + (D_1 - D_0) \int_0^t \int_0^{z_0} G(z, z', t, t') \sum_{i=1}^{n_1} \langle \eta_{i1}(z') \rangle_{\text{conf}} \times \\ &\times \frac{\partial^2 J_0(z', t')}{\partial z'^2} dz' dt'. \end{aligned} \quad (10)$$

Враховуючи властивості функції  $\eta_{i1}(z')$  і використовуючи в інтегралі заміну змінних  $z' - z_{i1} = x$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_1} \langle \eta_{i1}(z') \rangle_{\text{conf}} &= \sum_{i=1}^{n_1} \int_0^{z_0} \eta_{i1}(z' - z_{i1}) f(z_{i1}) dz_{i1} = \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} \int_0^{z'} \eta_{i1}(x) f(z' - x) dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Підставимо в (11) функцію густини розподілу  $f(z)$  (1):

$$\sum_{i=1}^{n_1} \langle \eta_{i1}(z') \rangle_{\text{conf}} = \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma^2(\alpha)} \sum_{i=1}^{n_1} \int_0^{z'} \eta_{i1}(x) \left[ \left( \frac{z_0}{z' - x} \right) \left( \frac{z_0}{z_0 - (z' - x)} \right) \right]^{1-\alpha} dx.$$

Інтеграл в одержаній формулі залежить від значення змінної зовнішнього інтегрування  $z'$ , тому розглянемо такі два випадки:

1) якщо  $z' \leq h_1$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_1} \int_0^{z'} \eta_{i1}(x) \left[ \left( \frac{z_0}{z' - x} \right) \left( \frac{z_0}{z_0 - (z' - x)} \right) \right]^{1-\alpha} dx &= \\ &= n_1 z_0^{2-2\alpha} \int_0^{z'} (z_0(z' - x) - (z' - x)^2)^{\alpha-1} dx; \end{aligned}$$

2) якщо  $z' \geq h_1$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_1} \int_0^{z'} \eta_{i1}(x) \left[ \left( \frac{z_0}{z' - x} \right) \left( \frac{z_0}{z_0 - (z' - x)} \right) \right]^{1-\alpha} dx &= \\ &= n_1 z_0^{2-2\alpha} \int_0^{h_1} (z_0(z' - x) - (z' - x)^2)^{\alpha-1} dx. \end{aligned}$$

Враховуючи, що  $v_1 = n_1 h_1 / z_0$ , а також обчисливши відповідні інтеграли

[5], для усередненої функції структури остаточно маємо

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_1} \langle \eta_{i1}(z') \rangle &= \\ &= \frac{Bv_1}{h_1 z_0^{\alpha-2}} \begin{cases} z'^{\alpha} z_0^{\alpha-1} {}_2\bar{F}_1\left(\frac{z'}{z_0}\right), & z' \leq h_1, \\ h_1^{\alpha} (z_0 + h_1 - z')^{\alpha-1} {}_2\bar{F}_1\left(\frac{h_1}{h_1 + z_0 - z'}\right), & z' \geq h_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

де  $B = \frac{\Gamma(2\alpha)}{\alpha\Gamma^2(\alpha)}$ ,  ${}_2\bar{F}_1(z) = {}_2F_1(\alpha, 1 - \alpha; 1 + \alpha, z)$ ,  ${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m (b)_m}{(c)_m} \frac{z^m}{m!}$

– гіпергеометрична функція [5],  $(a)_m = a(a+1)\dots(a+m-1)$ ,  $(a)_0 = 1$ .

Підставивши співвідношення (12) у вираз (10), отримаємо формулу для визначення усередненого дифузійного потоку домішкових частинок у двофазній смузї з найбільш ймовірним розміщенням включень біля границь тіла:

$$\begin{aligned} \langle J(z, t) \rangle &= J_0(z, t) + \frac{(D_1 - D_0)Bv_1}{h_1} \times \\ &\times \int_0^t \int_0^{h_1} z'^{\alpha} z_0^{\alpha} {}_2\bar{F}_1\left(\frac{z'}{z_0}\right) G(z, z', t, t') \frac{\partial^2 J_0(z', t')}{\partial z'^2} dz' + \\ &+ \int_{h_1}^{z_0} z_0 h_1^{\alpha} (z_0 + h_1 - z')^{\alpha-1} {}_2\bar{F}_1\left(\frac{h_1}{z_0 + (z' - h_1)}\right) \times \\ &\times G(z, z', t, t') \frac{\partial^2 J_0(z', t')}{\partial z'^2} dz' dt'. \end{aligned} \quad (13)$$

Якщо у (13) підставити вирази (8) для функції Гріна  $G(z, z', t, t')$  і дифузійного потоку (7) в однорідному тілі  $J_0(z, t)$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\langle J(z, t) \rangle}{J_*} &= 1 - \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-D_0 \xi_n^2 t} \left( \frac{1}{\xi_n} + (-1)^n \frac{D_0 c_*}{J_*} \right) \sin(\xi_n z) + \\ &+ \frac{2(D_1 - D_0)v_1 B}{D_0 z_0^{\alpha} h_1} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{y_k^2 - \xi_n^2} (e^{-D_0 \xi_n^2 t} - e^{-D_0 y_k^2 t}) \times \\ &\times \left( 1 + (-1)^n \frac{D_0 c_*}{J_*} \xi_n \right) \sin(y_k z) \left[ z_0^{\alpha-1} \left( f^+(0, y_k - \xi_n) - \right. \right. \\ &- f^+(0, y_k + \xi_n) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha(1-\alpha)\dots(m-\alpha)}{(m+\alpha)m!} z_0^m \times \\ &\times [f^+(m, y_k - \xi_n) - f^+(m, y_k + \xi_n)] \Big) + \\ &+ h_1^{\alpha} \left( f^-(0, y_k - \xi_n) - f^-(0, y_k + \xi_n) + \right. \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha(1-\alpha)\dots(m-\alpha)h_1^m}{(m+\alpha)m!} \times \\ &\times [f^-(m, y_k - \xi_n) - f^-(m, y_k + \xi_n)] \Big), \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$f^+(a, p) = \int_0^{h_1} (z)^{\alpha+a} \cos(pz) dz,$$

$$f^-(a, p) = \int_{h_1}^{z_0} (z_0 + h_1 - z')^{\alpha-(a+1)} \cos(pz) dz.$$

Вираз (14) є розрахунковою формулою для усередненого за ансамблем конфігурацій фаз дифузійного потоку у двофазній смузі з арксинус-розподілом шаруватих включень за ненульової початкової концентрації домішки в тілі.

**4. Числовий аналіз усередненого потоку маси.** На основі отриманої розрахункової формули (14) проаналізуємо кількісну та якісну залежність усередненого дифузійного потоку у двофазній багатошаровій смузі з арксинус-розподілом включень від вхідних параметрів задачі. Числові розрахунки проводимо у безрозмірних змінних  $\zeta = z/z_0$ ,  $\tau = D_0 t/z_0^2$ . За параметри числового дослідження прийнято такі значення:  $\tau = 0.3$ ,  $v_1 = 0.2$ ,  $h_1 = 0.01$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $c_*/J_* = 0.1$ . На рис. 3а наведено розподіли потоків маси у смузі в різні моменти безрозмірного часу  $\tau = 0.03, 0.1, 0.3, 0.5, 1.0$  (криві 1''/1''–5''/5''). На рис. 3б показано поведінку усередненого дифузійного потоку при різних значеннях зведеного коефіцієнта дифузії  $D_1/D_0 = 0.01, 0.5, 0.8, 2.0, 3.0, 5.0$  (відповідно криві 1–6).

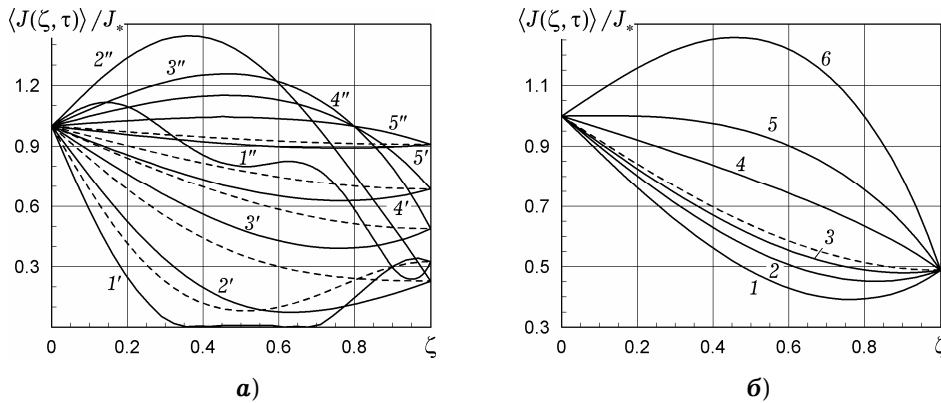


Рис. 3. Потоки маси у смузі: **а)** – в різні моменти безрозмірного часу  $\tau$ ; **б)** – для різних значень відношення  $D_1/D_0$ .

Рис. 4 ілюструє залежність функції потоку від різних значень товщини включення  $h_1 = 0.005, 0.01, 0.1$  (криві 1'/1''–3'/3'', рис. 4а) та об'ємної частки включень  $v_1 = 0.05, 0.1, 0.2$  (криві 1'/1''–3'/3'', рис. 4б). На рис. 5 показано залежності розподілу функції потоку від відношення  $c_*/J_* = 0.01, 0.1, 0.2, 0.4$  (криві 1'/1''–4'/4'', рис. 5а) і від значень ступеня вільності  $\alpha = 0.3, 0.5, 0.7$  (криві 1'/1''–3'/3'', рис. 5б) функції розподілу  $f(\zeta)$ . На рис. 3а криві 1'–5', на рис. 4 криві 1'–3' і на рис. 5 криві 1'–4' наведено для значення  $D_1/D_0 = 0.01$ , а відповідні криві з двома штрихами (1''–5'') – для значення  $D_1/D_0 = 5$ .

Штриховими лініями позначено дифузійні потоки в однорідному шарі, обчислені за формулою (7).

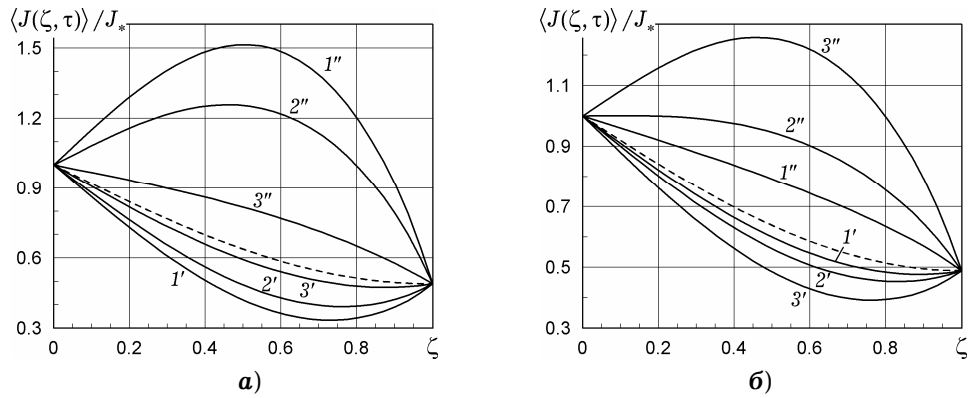


Рис. 4. Потоки маси у смузі: **а)** – для різних значень товщини прошарку  $h_1$ ; **б)** – для різних значень об'ємної частки включень  $v_1$ .

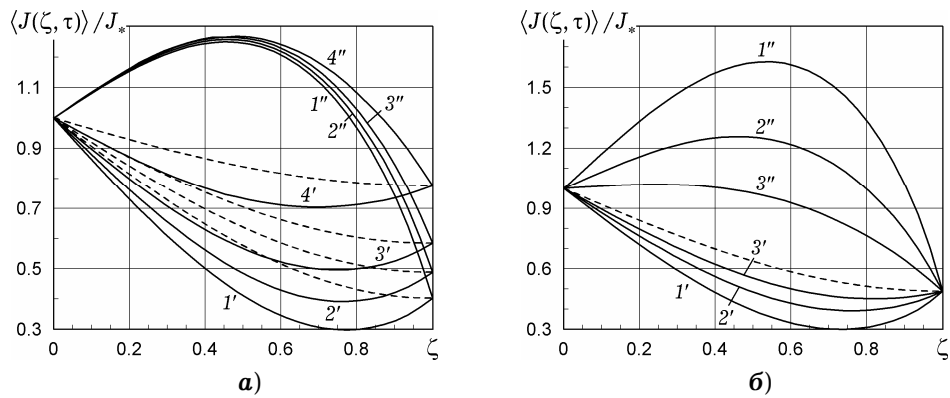


Рис. 5. Потоки маси у смузі: **а)** – для різних значень відношення  $c_*/J_*$ ; **б)** – для різних значень ступеня вільності  $\alpha$ .

Для малих часів протікання процесу масоперенесення ( $\tau < 0.05$ ) у випадку коефіцієнтів дифузії домішкової речовини у матриці більших, ніж у включенні,  $D_0 > D_1$ , потік маси від межі  $\zeta = 0$  спадає, всередині шару є близьким до нуля і стрімко зростає біля межі  $\zeta = 1$  (крива 1', рис. 3а) що пояснюється необхідністю забезпечити умову рівності нулеві концентрації домішки на границі  $\zeta = 1$ . Якщо  $D_1 > D_0$ , то для малих значень  $\tau$  ( $\tau = 0.01$ ) спостерігається утворення двох максимумів функції потоку всередині шару, біля границі  $\zeta = 1$  функція потоку різко спадає, утворюючи глобальний мінімум, при цьому усереднений дифузійний потік стає меншим від потоку в однорідній смузі (крива 1'', рис. 3а). Зі збільшенням часу другий локальний максимум функції потоку зменшується і функція  $\langle J(\zeta, \tau) \rangle / J_*$  стає опуклою вгору (крива 2'', рис. 3а). З подальшим збільшенням  $\tau$  відмінності між потоками в однорідній і неоднорідній смузі зменшуються (криві 3'/3'', 4'/4'', рис. 3а), і потоки виходять на усталений режим (криві 5'/5'', рис. 3а). Також зазначимо, що на границях шару потоки в однорідному і неоднорідному шарах співпадають.

Якщо коефіцієнт дифузії домішки у прошарку є меншим, ніж у матриці,  $D_1 < D_0$ , то потік в неоднорідному тілі є меншим, ніж в однорідному (рис. 3б). У протилежному випадку потік у багатошаровій смузі є більшим, ніж в однорідному шарі, а збільшення зведеного коефіцієнта дифузії  $D_1/D_0$  призводить до зростання усередненого потоку та утворення глобального максимуму всередині шару (крива 6, рис. 3б).



Зауважимо, що зі збільшенням характерної товщини  $h_1$  прошарків значення потоку маси для  $D_1 < D_0$  збільшується, а для  $D_1 > D_0$  – зменшується (рис. 4а). Протилежна ситуація спостерігається у випадку зміни об'ємної частки включень (рис. 4б). Зокрема, збільшення об'ємної частки включень  $v_1$  від 0.1 до 0.2 призводить до зменшення усередненого дифузійного потоку всередині шару до 14% для  $D_1 < D_0$  і збільшення до 33% – для  $D_1 > D_0$  (криві 2'/2'', 3'/3'', рис. 4б).

Зі збільшенням початкової концентрації  $c_*$  усереднений потік зростає на всьому проміжку  $\zeta \in [0, 1]$  (рис. 5а). При цьому у випадку  $D_1/D_0 > 1$  значення усередненого потоку, побудовані для різних відношень  $c_*/J_*$ , практично співпадають на відрізку  $\zeta \in [0, 0.5]$  (криві 1''–4'', рис. 5а). Зменшення ступеня вільності  $\alpha$  арксинус-розподілу, що відповідає ущільненню прошарків до границь тіла, при  $D_1 < D_0$  викликає зменшення усередненого потоку (криві 1'–4', рис. 5б). Натомість, для  $D_1 > D_0$  ущільнення прошарків призводить до зростання функції  $\langle J(\zeta, \tau) \rangle / J_*$  (криві 1''–3'', рис. 5б).

На рис. 6 проілюстровано порівняльні зображення розподілів усереднених дифузійних потоків у смузі з рівномірним розподілом фаз (криві 1'/1'') [10], у смугах з областю найбільш ймовірного розміщення включень біля нижньої поверхні  $z = z_0$  (криві 2'/2'') [8], біля верхньої границі  $z = 0$  (криві 3'/3'') [1], посередині тіла (криві 4'/4'') [8] і з найбільш ймовірним розміщенням включень біля обох границь тіла (криві 5'/5''). Обчислення проведено для безрозмірного значення часу  $\tau = 0.1$ . На рис. 6а криві 1'–5' відповідають значенню  $D_1/D_0 = 0.01$ , а криві 1''–5'' – значенню  $D_1/D_0 = 10$ . На рис. 6б наведено порівняння залежності розподілів потоків домішкової речовини від значень відношення  $c_*/J_*$  при  $D_1/D_0 = 0.01$ . Тут криві 1'–5' описують відповідні розподіли для  $c_*/J_* = 0.01$ , а криві 1''–5'' – для значення  $c_*/J_* = 0.4$ .

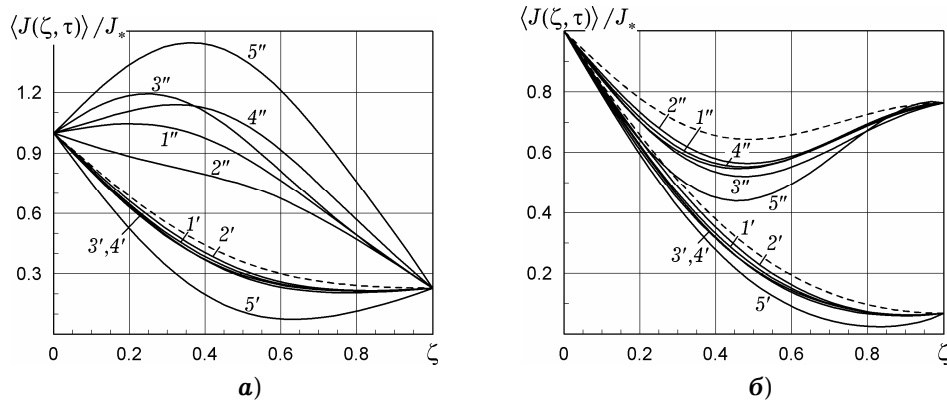


Рис. 6. Потоки маси у смузі: а) – для різних модельних випадків розміщення включень у момент часу  $\tau = 0.1$ ; б) – для різних значень відношення  $c_*/J_*$ .

У випадку менших значень коефіцієнта дифузії у включенні, ніж у матриці,  $c_*/J_* = 0.01$ , усереднені потоки у структурах з рівномірним розподілом фаз включеннями, сконцентрованими біля верхньої, нижньої поверхонь і всередині тіла, практично співпадають. Потік у смузі з арксинус-розподілом включень є меншим від потоків у чотирьох інших структурах до 64% (криві 1'–5' на рис. 6а, рис. 6б). Натомість, у випадку  $D_1 > D_0$  потік у смузі з арксинус-розподілом включень є найбільшим (крива 5'', рис. 6а), а у смузі

з ймовірнішим розміщенням включень біля нижньої границі є найменшим (крива 2", рис. 6а). Збільшення відношення  $c_*/J_*$  призводить до утворення локального мінімуму всередині тіла для всіх розглянутих модельних варіантів розміщення включень (криві 1"–5", рис. 6б). Зазначимо, що чим меншим є значення початкової концентрації, віднесеної до потоку на верхній межі смуги,  $c_*/J_*$ , тим меншою є відмінність між усередненими дифузійними потоками для різних типів шаруватих структур (рис. 6б).

**Висновки.** Досліджено потоки домішкової речовини у двофазній багатошаровій смугі з прошарками, які найбільш ймовірно розміщені біля границі тіла. Для опису випадкової структури використано частковий випадок бета-розподілу – арксинус-розподіл. Математичну модель для дифузійного потоку сформовано на основі рівняння дифузії для потоку домішкової речовини, отриманого з рівняння балансу маси, зокрема, прийнято, що концентрація домішкової речовини у початковий момент часу є сталою і відмінною від нуля. Побудовано інтегро-диференціальне рівняння, еквівалентне вихідній крайовій задачі. Його розв'язок знайдено методом послідовних наближень у вигляді абсолютно і рівномірно збіжного ряду Неймана. Проведено усереднення одержаного розв'язку за ансамблем конфігурацій фаз з функцією арксинус-розподілу для ненульової сталої концентрації частинок домішки в початковий момент часу. Встановлено залежність поведінки та величини усередненого дифузійного потоку від характеристик матеріалу смуги. Показано, що у випадку меншого коефіцієнта дифузії домішкової речовини у матриці, ніж у прошарку, ущільнення включень до границь тіла призводить до зростання усередненого потоку маси.

1. Давидок А. Є. Моделювання і дослідження парного взаємовпливу шаруватих включень на потік маси у випадково неоднорідній смугі за бета-розподілу фаз // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2014. – Вип. 12. – С. 146–153.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1974. – 831 с.  
Те саме: Korn G. A., Korn T. M. Mathematical handbook for scientists and engineers: Definitions, theorems, and formulas for reference and review. – New York: Dover Publ. Inc., 2000. – 1151 p.
3. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – Москва: Наука, 1985. – 640 с.
4. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. – Москва: Наука, 1975. – 303 с.
5. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды: В 3 т. – Т. 1: Элементарные функции. – Москва: Наука, 1981. – 798 с.  
То же: Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integrals and series: Vol. 1: Elementary functions. – New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1986. – 798 p.
6. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. – Ч. II. Случайные поля. – Москва: Наука, 1978. – 464 с.
7. Чапля Е. Я., Чернуха О. Ю. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. – Київ: Наук. думка, 2009. – 302 с.
8. Чернуха О. Ю., Білуцзяк Ю. І., Чучвара А. Є. Моделювання дифузійних процесів у стохастично неоднорідних шаруватих структурах. – Львів: Растр-7, 2016. – 262 с.
9. Bergins Ch., Crone S., Strauss K. Multiphase flow in porous media with phase change. Part II: Analytical solutions and experimental verification for constant pressure stream injection // Transport in Porous Media. – 2005. – **60**, No. 3. – P. 275–300. – <https://doi.org/10.1007/s11242-004-5740-5>
10. Chaplya Y., Chernukha O., Davydok A. Mathematical modeling of random diffusion flows in two-phase multilayered stochastically nonhomogeneous bodies // Task Quarterly. – 2015. – **19**, No. 3. – P. 297–320.
11. Crank J. The mathematics of diffusion. – Oxford: Clarendon Press, 1975. – ix+414 p.

12. Keller J. B. Flow in random porous media // Transport in Porous Media. – 2001. – **43**, No. 3. – P. 395–406. – <https://doi.org/10.1023/A:1010693520897>.
13. Schulenberg T., Müller U. An improved model for two-phase flow through beds of coarse particles // Int. J. Multiphase Flow. – 1987. – **13**, No. 1. – P. 87–97. – [https://doi.org/10.1016/0301-9322\(87\)90009-7](https://doi.org/10.1016/0301-9322(87)90009-7).
14. <http://www.emedard.pagesperso-orange.fr/>
15. <http://www.knives.com.ua>
16. <http://www.sandatlas.org/hematite/>

#### **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКОВ ПРИМЕСНОГО ВЕЩЕСТВА В СЛУЧАЙНОЙ СЛОИСТОЙ ПОЛОСЕ С ВЕРОЯТНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ ВКЛЮЧЕНИЙ ВОЗЛЕ ГРАНИЦ ТЕЛА**

*Исследован случайный поток примесного вещества в двухфазной стохастически неоднородной полосе с наиболее вероятным расположением включений в окрестности поверхностей тела. Математическая модель сформулирована для функции диффузионного потока при ненулевой постоянной начальной концентрации. Случайный диффузионный поток получен в виде ряда Неймана. Проведена процедура усреднения стохастического потока по ансамблю конфигураций фаз с функцией плотности арксинус-распределения включений. Проанализировано влияние характеристик среды на распределение потока массы. Показано, что для большего коэффициента диффузии примесного вещества во включении, чем в матрице, увеличение характерной толщины слоев уменьшает значение диффузионного потока, тогда как при росте объемной доли включений поток массы увеличивается во всем теле.*

#### **MODELING FLOWS OF ADMIXTURE SUBSTANCE IN A RANDOM LAYERED STRIP WITH PROBABLE DISPOSITION OF INCLUSIONS NEAR THE BODY BOUNDARIES**

*The random flow of admixture substance is investigated in a two-phase stochastically nonhomogeneous strip with the most probable location of inclusions in the vicinity of the body surfaces. Mathematical model is formulated for the function of diffusion flow at nonzero constant initial concentration. The random diffusion flow is obtained in the form of Neumann series. Averaging procedure of the random mass flow is carried out over the ensemble of phase configurations with arcsine distribution function. Influence of the medium characteristics on distribution of mass flow is analyzed. It is shown that for a larger diffusion coefficient of the admixture substance in the inclusion than in the matrix, increase of the characteristic thickness of layers decreases the value of diffusion flow, whereas at growth of the volume fraction of inclusions, mass flow increases in the whole body.*

<sup>1</sup> Центр мат. моделювання  
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

Одержано  
22.09.16

<sup>2</sup> Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів