

## ПОСТРОЕНИЕ УТОЧНЕННОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ГИБКИХ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН ИЗ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ЯВНОЙ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ ТИПА «КРЕСТ»

*В приближении Кармана сформулирована начально-краевая задача динамического деформирования гибких армированных пластин при нелинейно-упругом поведении материалов компонентов композиции. Получены уравнения, позволяющие с разной степенью точности определять напряженно-деформированное состояние таких пластин с учетом их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. Из этих уравнений как частный случай вытекают соотношения неклассической теории Редди. Для численного интегрирования поставленной задачи используется метод шагов по времени с привлечением явной численной схемы типа «крест». Исследуется динамический отклик относительно толстых и тонких кольцевых композитных пластин с жесткой внутренней шайбой при воздействии нагрузок, вызванных воздушной взрывной волной. Пластины жестко закреплены по внешнему контуру и рационально армированы по радиальным и радиально-окружным направлениям. Показано, что при использовании схемы типа «крест» численные процедуры, основанные на уравнениях уточненных теорий, обладают большей практической устойчивостью, чем в рамках теории Редди. Обнаружено, что при временах порядка одной секунды и более расчетное динамическое поведение армированных пластин, определенное по теории Редди, существенно отличается от поведения, рассчитанного по уточненным теориям.*

**Введение.** Тонкостенные элементы композитных конструкций находят широкое применение в судо- и машиностроении [21, 25 и др.], поэтому актуальной является проблема адекватного расчета механического поведения (как статического, так и динамического [22 и др.]) армированных пластин, в том числе изготовленных из нелинейно-упругих материалов компонентов композиции.

Изгибное деформирование анизотропных пластин в рамках классической теории, не учитывающей поперечные сдвиги, изучалось, например, в [8, 29]. Ослабленное сопротивление композитных пластин и оболочек поперечным сдвигам, как правило, учитывается в рамках теорий Рейсснера – Миндлина [1, 4, 24, 28 и др.] или теории Редди [3, 10, 26, 27 и др.] (или, что то же самое, первого и второго вариантов теории Тимошенко [10]). В [3] показано, что при линейно-упругом изгибе анизотропных пластин не требуется дополнительное уточнение решений, полученных в рамках теории Редди, т. е. для получения приемлемых с практической точки зрения результатов не нужно использовать более сложные теории повышенной точности [1, 23 и др.].

В работе [20] в рамках теории Редди была построена модель нелинейно-упругого изгибного деформирования армированных пластин, нагруженных квазистатически. Однако открытым остается вопрос о том, гарантирует ли эта теория приемлемую точность расчетов механического поведения таких пластин, в частности, при их динамическом нагружении. В [14] на примере продольно-армированной балки-стенки продемонстрировано, что при статическом нагружении таких балок, изготовленных из нелинейно-упругих материалов, уточнение второго варианта теории Тимошенко (а значит, и теории Редди) действительно требуется.

На основе явной численной схемы типа «крест» в рамках теории Рейсснера динамическое поведение гибких элементов тонкостенных композитных конструкций, выполненных из линейно-упругих материалов, изучалось в [1], где приведен обзор публикаций по этой тематике. В работе [19] выполнен краткий анализ явных и неявных численных методов, используе-

мых для решения динамических задач механики деформируемого твердого тела.

Настоящее исследование посвящено построению уточненной (по сравнению с теорией Редди) модели динамического поведения гибких армированных пластин, изготовленных из нелинейно-упругих материалов компонентов композиции, и адаптированной (модели) под применение явной численной схемы типа «крест».

**1. Постановка задачи.** В прямоугольной декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  рассмотрим пластину толщиной  $2h$ , состоящую из регулярно чередующихся элементарных армированных слоев, параллельных отсчетной плоскости  $Ox_1x_2$ , которую совместим со срединной плоскостью пластины, а ось  $Ox_3$  направим по ее толщине (рис. 1). В направлении  $Ox_3$  структура армирования квазиоднородна.

Для уточненного описания ослабленного сопротивления такой пластины поперечным сдвигам осредненные деформации ее композиции  $\varepsilon_{i3}$  аппроксимируем так [14]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = & \frac{x_3 + h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \frac{x_3 - h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(-)}(t, \mathbf{x}) + \\ & + \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \sum_{k=0}^K x_3^k \varepsilon_{i3}^{(k)}(t, \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\} \in G$ ;  $|x_3| \leq h$ ;  $t \geq t_0$ ;  $\mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$ ;  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(k)}$ ,  $i = 1, 2$ , – функции только двух пространственных переменных  $x_1, x_2$  и времени  $t$ , подлежащие определению и имеющие следующий смысл:  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$  – деформации поперечных сдвигов на верхней и нижней ( $x_3 = \pm h$ ) лицевых поверхностях пластины, при  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)} = 0$  функции  $\varepsilon_{i3}^{(0)}$  определяют деформации поперечных сдвигов в срединной плоскости  $x_3 = 0$ ;  $K$  – целое число, определяющее количество слагаемых, удерживаемых в разложении (1);  $t_0$  – начальный момент времени;  $G$  – область, занимаемая пластиной в плане. При  $K = 0$  получаем соотношения, соответствующие теории Редди [26, 27] (второму варианту теории Тимошенко [3, 10, 20]).

Согласно традиционной для тонкостенных элементов конструкций кинематической гипотезе, изменяемостью перемещения  $U_3(t, \mathbf{r})$  в направлении  $x_3$  пренебрегаем [1–4, 8, 10, 20, 24, 26–29]:

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0. \quad (2)$$

Используя дифференциальные соотношения, связывающие деформации с перемещениями, на основании (1), (2) в приближении Кармана [2, 5] получим

$$\begin{aligned} U_i(t, \mathbf{r}) = & u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{x_3^2}{k+3} \right) \varepsilon_{i3}^{(k)} + \\ & + \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) \varepsilon_{i3}^{(+)} - \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) \varepsilon_{i3}^{(-)}, \\ & \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

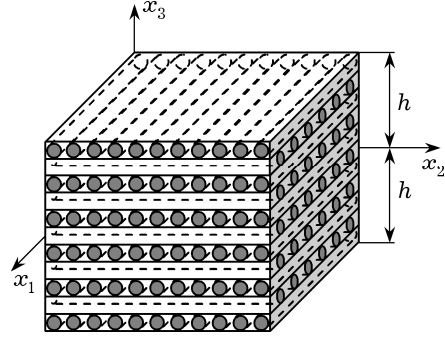


Рис. 1. Элемент армированной композитной пластины.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{12}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) - x_3 \partial_1 \partial_2 w + \\
&+ \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{x_3^2}{k+3} \right) (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(k)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(k)}) + \\
&+ \frac{x_3}{2h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(+)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(+)} - \\
&- \frac{x_3}{2h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(-)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(-)}) + \frac{1}{2} \partial_1 w \partial_2 w, \\
\varepsilon_{ii}(t, \mathbf{r}) &= \partial_i u_i - x_3 \partial_i^2 w + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{x_3^2}{k+3} \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(k)} + \\
&+ \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(+)} - \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(-)} + \frac{1}{2} (\partial_i w)^2, \\
\mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2. \quad (4)
\end{aligned}$$

Здесь  $U_i$  – перемещения точек пластины в тангенциальных направлениях  $Ox_i$ ,  $i = 1, 2$ ;  $u_i$  – перемещения точек срединной плоскости  $x_3 = 0$ ;  $\partial_i$  – оператор частного дифференцирования по переменной  $x_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Таким образом, в соотношениях (1)–(4) неизвестными являются функции  $w$ ,  $u_i$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(k)}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 \leq k \leq K$ , зависящие только от двух пространственных переменных  $x_1$ ,  $x_2$  и времени  $t$ .

Как и в работах [18, 20], предполагаем, что материалы всех компонентов композиции пластины изотропны и однородны, а их нелинейно-упругое поведение описывается обобщенными квазилинейными определяющими уравнениями [6]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^{(n)} - \delta_{ij} \sigma_0^{(n)} &= g_*^{(n)}(\varepsilon_*^{(n)}, \varepsilon_0^{(n)}) (\varepsilon_{ij}^{(n)} - \delta_{ij} \varepsilon_0^{(n)}), \quad i, j = 1, 2, 3, \\
\sigma_0^{(n)} &= g_0^{(n)}(\varepsilon_*^{(n)}, \varepsilon_0^{(n)}) \varepsilon_0^{(n)}, \\
\sigma_*^{(n)} &= \frac{3}{2} g_*^{(n)}(\varepsilon_*^{(n)}, \varepsilon_0^{(n)}) \varepsilon_*^{(n)}, \quad 0 \leq n \leq N, \quad (5)
\end{aligned}$$

где  $\sigma_{ij}^{(n)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(n)}$  – компоненты тензоров напряжений и деформаций в материале  $n$ -го компонента композиции (индексом  $n = 0$  помечаем характеристики связующего, а индексом  $n = 1, 2, \dots, N$  – характеристики материала  $n$ -го семейства арматуры,  $N$  – количество семейств армирующих волокон);  $\sigma_0^{(n)}$ ,  $\varepsilon_0^{(n)}$  – среднее нормальное напряжение и средняя линейная деформация в  $n$ -м компоненте композиции, а  $\sigma_*^{(n)}$ ,  $\varepsilon_*^{(n)}$  – интенсивности напряжений и деформаций в тех же материалах (см. (4) в [18]);  $g_*^{(n)}(\varepsilon_*^{(n)}, \varepsilon_0^{(n)})$  – известная из эксперимента функция, являющаяся при умножении ее на  $3/2$  коэффициентом пропорциональности между  $\sigma_*^{(n)}$  и  $\varepsilon_*^{(n)}$ ;  $g_0^{(n)}(\varepsilon_*^{(n)}, \varepsilon_0^{(n)})$  – известный из эксперимента утроенный модуль объемного расширения материала  $n$ -го компонента композиции;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера. Зависимости функций  $g_*^{(n)}$  и  $g_0^{(n)}$  в (5) от аргумента  $\varepsilon_0^{(n)}$  в общем случае позволяют учесть эффект разносопротивляемости материала  $n$ -го компонента композиции [6, 17].

Соотношения (5) целесообразно записать в матричной форме [10]

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{A}_n \boldsymbol{\varepsilon}_n, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_n &= \{\sigma_{11}^{(n)}, \sigma_{22}^{(n)}, \sigma_{33}^{(n)}, \sigma_{23}^{(n)}, \sigma_{31}^{(n)}, \sigma_{12}^{(n)}\}^*, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_n &= \{\varepsilon_{11}^{(n)}, \varepsilon_{22}^{(n)}, \varepsilon_{33}^{(n)}, \varepsilon_{23}^{(n)}, \varepsilon_{31}^{(n)}, \varepsilon_{12}^{(n)}\}^*, \end{aligned} \quad (7)$$

$\mathbf{A}_n = (A_{ij}^{(n)})$  – симметричные  $6 \times 6$ -матрицы, ненулевые компоненты которых, согласно (5), определяются по формулам (24) из [18]. Звездочка в верхнем индексе означает операцию транспонирования.

Предполагаем, что определяющие уравнения (5), как и (6) с учетом (7), удовлетворяют достаточным условиям сходимости метода последовательных приближений [6, с. 199], аналогичного методу переменных параметров упругости [9]. Согласно этому, далее в рассматриваемый момент времени  $t$  соотношения (5), (6) считаем линеаризованными. При этом матричные равенства (6) формально полностью совпадают с соотношениями (22) из [18] (где ядра ползучести нужно принять равными нулю), поэтому, повторяя рассуждения из [18], на каждой итерации получим линейные определяющие уравнения для армированной среды, которые в матричной форме имеют вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (8)$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – шестикомпонентные векторы-столбцы осредненных напряжений и деформаций в композиции, имеющие структуру, аналогичную (7);  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  – известная  $6 \times 6$ -матрица, которую на каждой итерации можно трактовать как матрицу эффективных жесткостей армированной композиции. Компоненты  $a_{ij}$  матрицы  $\mathbf{A}$  в (8) определяются матричными равенствами (27) из [18] и зависят от деформированного состояния композиции  $\varepsilon_{ij}$ , известного из решения на предыдущей итерации, а также от параметров армирования: плотностей  $\omega_n$  и направлений армирования, определяемых сферической системой координат  $\theta_n$  и  $\varphi_n$  (рис. 2, где, согласно [18], изображена взаимная ориентация глобальной  $x_i$  и локальной  $x_i^{(n)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , связанной с волокнами  $n$ -го семейства, систем координат).

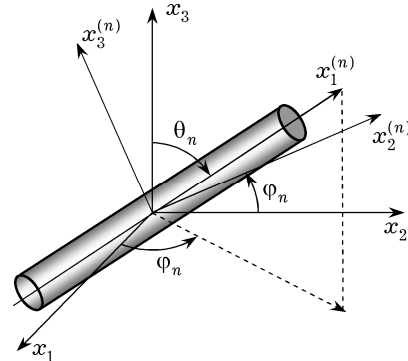


Рис. 2. Локальная система координат, связанная с волокном  $n$ -го семейства.

Если из решения начально-краевой задачи для армированного тела (в частности, пластины), механическое поведение которого описывается определяющим уравнением (8), в рассматриваемый момент времени на текущей итерации известны осредненные деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , то по матричным формулам (31) и (32) из [18] можно определить и деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}_n$  в  $n$ -м компоненте композиции (см. (6) и (7)). Затем, согласно методу последовательных приближений, можно уточнить значения коэффициентов  $g_*^{(n)}$  и  $g_0^{(n)}$  в (5) (или, что то же самое, значения компонентов матриц  $\mathbf{A}_n$  в (6)), и по приведенному выше и в [18] алгоритму можно построить следующее приближение решения и т. д., пока итерационный процесс не сойдется с требуемой точностью.

При плоском армировании ( $\theta_n = \pi/2$ , см. рис. 1 и рис. 2), рассматриваемом в настоящем исследовании, структура матрицы  $\mathbf{A}$  в (8) такова, что ее компоненты в 4-й и 5-й строках и в 4-м и 5-м столбцах, кроме диагональных, тождественно равны нулю, т. е. согласно обозначениям, аналогичным (7), имеем

$$\sigma_{23} = a_{44}\varepsilon_{23}, \quad \sigma_{13} = a_{55}\varepsilon_{13}. \quad (9)$$

Используя традиционную для тонкостенных элементов конструкций силовую гипотезу  $\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) \approx 0$  [1–5, 8, 10, 14, 17, 19, 20, 24, 26–29], систему шести алгебраических равенств (8) с учетом (9) можно преобразовать к следующему виду, исключив из рассмотрения деформацию  $\varepsilon_{33}$ :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \sigma_{i3} = b_i\varepsilon_{i3}, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}} &\equiv \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^*, \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}\}^*, \\ \varepsilon_{33} &= -\frac{1}{a_{33}}(a_{31}\varepsilon_{11} + a_{32}\varepsilon_{22}), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} b_{ij} &\equiv a_{ij} - \frac{1}{a_{33}}a_{i3}a_{3j}, \quad b_{i3} \equiv a_{i6}, \quad b_{3j} \equiv a_{6j}, \\ b_{33} &\equiv a_{66}, \quad b_1 \equiv a_{55}, \quad b_2 \equiv a_{44}, \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (12)$$

$a_{ij}$  – компоненты матрицы  $\mathbf{A}$  в (8);  $b_{ij}$  – компоненты  $3 \times 3$ -матрицы  $\mathbf{B}$ ;  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты осредненных напряжений и деформаций композиции (компоненты векторов-столбцов  $\boldsymbol{\sigma}$  и  $\boldsymbol{\varepsilon}$  в (8)). Согласно (12), величины  $b_{ij}$  и  $b_i$  в (10) в рассматриваемый момент времени  $t$  предполагаются известными из решения исследуемой задачи на предыдущей итерации метода последовательных приближений.

Зная выражения для компонентов осредненных деформаций композиции  $\varepsilon_{ij}$  (см. (1), (4)) и используя равенства (10) с учетом (11), в данный момент времени  $t$  на текущей итерации можно определить все компоненты осредненных напряжений  $\sigma_{ij}$  в каждой точке рассматриваемой пластины:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\sigma}}(t, \mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^2 \mathbf{B}_i \left[ \partial_i u_i - x_3 \partial_i^2 w + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{x_3^2}{k+3} \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(k)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(+)} - \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(-)} + \frac{1}{2} (\partial_i w)^2 \right] + \\ &\quad + \mathbf{B}_3 \left[ \frac{1}{2} (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) - x_3 \partial_1 \partial_2 w + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{x_3^2}{k+3} \right) (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(k)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(k)}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x_3}{2h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(+)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(+)}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{x_3}{2h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(-)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(-)}) + \frac{1}{2} \partial_1 w \partial_2 w \right], \\ \sigma_{i3}(t, \mathbf{r}) &= b_i \left( \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \sum_{k=0}^K x_3^k \varepsilon_{i3}^{(k)} + \frac{x_3 + h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(+)} - \frac{x_3 - h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(-)} \right), \\ i &= 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\mathbf{B}_i = \{b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}\}^*, \quad i = 1, 2, 3, \quad (14)$$

$\mathbf{B}_i$  – трехкомпонентный вектор-столбец, элементы которого равны компонентам  $b_{ji}$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $i$ -го столбца  $3 \times 3$ -матрицы  $\mathbf{B}$ , определенной равенствами (12).

На основании равенств (13) в данный момент времени  $t$  на текущей итерации можно определить все внутренние силовые факторы в армированной пластине:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(\ell)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-h}^h \bar{\boldsymbol{\sigma}} x_3^\ell dx_3 = \sum_{i=1}^2 \left( \mathbf{A}_i^{(\ell)} \partial_i u_i - \mathbf{B}_i^{(\ell)} \partial_i^2 w + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{k=0}^K \mathbf{C}_i^{(\ell, k)} \partial_i \varepsilon_{i3}^{(k)} + 2 \mathbf{D}_i^{(\ell)} \partial_i \varepsilon_{i3}^{(+)} - 2 \mathbf{E}_i^{(\ell)} \partial_i \varepsilon_{i3}^{(-)} + \frac{1}{2} \mathbf{A}_i^{(\ell)} (\partial_i w)^2 \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{A}_3^{(\ell)} (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) - \mathbf{B}_3^{(\ell)} \partial_1 \partial_2 w + \sum_{k=0}^K \mathbf{C}_3^{(\ell, k)} (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(k)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(k)}) + \\ &\quad + \mathbf{D}_3^{(\ell)} (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(+)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(+)}) - \mathbf{E}_3^{(\ell)} (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(-)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(-)}) + \frac{1}{2} \mathbf{A}_3^{(\ell)} \partial_1 w \partial_2 w, \\ M_{i3}^{(\ell)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-h}^h \sigma_{i3} x_3^\ell dx_3 = \sum_{k=0}^K g_i^{(\ell, k)} \varepsilon_{i3}^{(k)} + h_i^{(\ell)} \varepsilon_{i3}^{(+)} - f_i^{(\ell)} \varepsilon_{i3}^{(-)}, \\ &\quad i = 1, 2, \quad \ell = 0, 1, \dots, K+1, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь, в соответствии с (11),

$$\mathbf{M}^{(\ell)} = \{M_{11}^{(\ell)}, M_{22}^{(\ell)}, M_{12}^{(\ell)}\}^*, \quad \ell = 0, 1, \dots, K+1, \quad (16)$$

$\mathbf{A}_i^{(\ell)}$ ,  $\mathbf{B}_i^{(\ell)}$ ,  $\mathbf{C}_i^{(\ell, k)}$ ,  $\mathbf{D}_i^{(\ell)}$ ,  $\mathbf{E}_i^{(\ell)}$  – трехкомпонентные векторы-столбцы, элементы которых совпадают с компонентами  $i$ -х столбцов  $3 \times 3$ -матриц  $\mathbf{A}^{(\ell)} = (a_{ji}^{(\ell)})$ ,  $\mathbf{B}^{(\ell)} = (b_{ji}^{(\ell)})$ ,  $\mathbf{C}^{(\ell, k)} = (c_{ji}^{(\ell, k)})$ ,  $\mathbf{D}^{(\ell)} = (d_{ji}^{(\ell)})$ ,  $\mathbf{E}^{(\ell)} = (e_{ji}^{(\ell)})$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , определяемых на основании (14), (16) так:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(\ell)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-h}^h \mathbf{B} x_3^\ell dx_3, \quad \mathbf{B}^{(\ell)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \mathbf{B} x_3^{\ell+1} dx_3, \\ \mathbf{D}^{(\ell)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-h}^h \mathbf{B} \frac{x_3^{\ell+1}}{2h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) dx_3, \quad \mathbf{E}^{(\ell)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \mathbf{B} \frac{x_3^{\ell+1}}{2h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) dx_3, \\ \mathbf{C}^{(\ell, k)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-h}^h \mathbf{B} \frac{x_3^{\ell+k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{x_3^2}{k+3} \right) dx_3, \\ g_i^{(\ell, k)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-h}^h b_i \frac{x_3^{\ell+k}}{h^2} (h^2 - x_3^2) dx_3, \quad h_i^{(\ell)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h b_i \frac{x_3^\ell}{2h} (x_3 + h) dx_3, \\ f_i^{(\ell)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-h}^h b_i \frac{x_3^\ell}{2h} (x_3 - h) dx_3, \quad \mathbf{B}^{(\ell)} = \mathbf{A}^{(\ell+1)}, \quad \mathbf{C}^{(\ell, k)} = \mathbf{C}^{(k, \ell)}, \\ g_i^{(\ell, k)} &= g_i^{(k, \ell)}, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq \ell \leq K+1, \quad 0 \leq k \leq K, \end{aligned} \quad (17)$$

$\mathbf{B}$  –  $3 \times 3$ -матрица из (10), столбцы которой определены в (14). Согласно левым равенствам в (15) с учетом (16), имеем  $M_{ij}^{(0)} \equiv F_{ij}$ ,  $M_{ij}^{(1)} \equiv M_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$ ,

– мембранные усилия и изгибающие и крутящие механические моменты в пластине;  $M_{i3}^{(0)} \equiv F_{i3}$ ,  $i = 1, 2$ , – поперечные силы. Остальные силовые факторы – математические моменты высших порядков.

Для получения дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять внутренние силовые факторы (15) и (16), используем уравнения движения для армированной среды, которые в рассматриваемом здесь приближении имеют вид [2, 12]

$$\rho \ddot{U}_i(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \partial_j (\sigma_{ij} - \sigma_{j3} \partial_i w) + X_i(t, \mathbf{r}), \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

$$\rho \ddot{U}_3(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( \sigma_{j3} + \sum_{\ell=1}^2 \sigma_{j\ell} \partial_\ell w \right) + \partial_3 \sigma_{33} + X_3(t, \mathbf{r}),$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad (19)$$

где, согласно [7],

$$\rho = \rho_0 \omega_0 + \sum_{n=1}^N \rho_n \omega_n, \quad \omega_0 = 1 - \sum_{n=1}^N \omega_n, \quad (20)$$

$\rho_0$ ,  $\rho_k$  – объемная плотность материала связующего и арматуры  $n$ -го семейства в представительном элементе композиции;  $X_i$  – компоненты объемной нагрузки, действующей на композиционный материал; точка означает дифференцирование по времени  $t$ . Проинтегрируем уравнения (18) по толщине пластины с весом  $x_3^\ell$ , а равенство (19) – с весом 1. Тогда с учетом (2) получим

$$\rho \ddot{u}_i^{(\ell)} = \sum_{j=1}^2 \partial_j (M_{ij}^{(\ell)} - M_{j3}^{(\ell)} \partial_i w) - \ell M_{i3}^{(\ell-1)} + \ell M_{33}^{(\ell-1)} \partial_i w +$$

$$+ h^\ell [\sigma_{i3}^{(+)} - (-1)^\ell \sigma_{i3}^{(-)}] - h^\ell [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^\ell \sigma_{33}^{(-)}] \partial_i w + X_i^{(\ell)},$$

$$i = 1, 2, \quad 0 \leq \ell \leq K + 1, \quad (21)$$

$$2h\rho \dot{w} = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} + X_3^{(0)},$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad (22)$$

где

$$X_i^{(\ell)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h X_i(t, \mathbf{r}) x_3^\ell dx_3, \quad \sigma_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \sigma_{i3}(t, \mathbf{x}, \pm h), \quad i = 1, 2, 3,$$

$$u_j^{(\ell)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h U_j(t, \mathbf{r}) x_3^\ell dx_3, \quad M_{33}^{(\ell)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^\ell dx_3, \quad j = 1, 2. \quad (23)$$

При выводе равенств (21) использовалась формула интегрирования по частям.

Согласно (23), напряжения  $\sigma_{i3}^{(\pm)}$  известны из силовых граничных условий, заданных на лицевых поверхностях пластины  $x_3 = \pm h$ . Так как толщина пластины намного меньше ее характерного размера в плане, напряжение  $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$  аппроксимируем линейно по переменной  $x_3$ :

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2},$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0. \quad (24)$$

На основании последнего из равенств (23) с учетом (24) вычислим в (21) следующий множитель:

$$\begin{aligned} \ell M_{33}^{(\ell-1)}(t, \mathbf{x}) &= \ell \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{\ell-1} dx_3 = \frac{h^\ell}{2} \left[ (\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (1 - (-1)^\ell) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\ell}{\ell+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (1 + (-1)^\ell) \right], \quad 0 \leq \ell \leq K+1. \end{aligned} \quad (25)$$

К системе уравнений движения (21), (22) необходимо добавить четыре силовых граничных условия на лицевых поверхностях пластины (см. (13)):

$$\begin{aligned} b_i(t, \mathbf{x}, \pm h) \left( \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \sum_{k=0}^K x_3^k \varepsilon_{i3}^{(k)} + \frac{x_3 + h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(+)} - \frac{x_3 - h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(-)} \right) \Big|_{x_3 = \pm h} &= \sigma_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (26)$$

где правые части и коэффициенты  $b_i$  известны в данный момент времени  $t$  на текущей итерации.

Для однозначного интегрирования рассматриваемой начально-краевой задачи должны быть заданы соответствующие начальные и граничные условия. Пусть на одной части торцевой поверхности пластины (обозначим её через  $G_\sigma$ ) заданы силовые граничные условия, которые в рамках принятого здесь приближения имеют вид

$$\begin{aligned} n_1(\sigma_{i1} - \sigma_{13} \partial_i w) + n_2(\sigma_{i2} - \sigma_{23} \partial_i w) &= p_i(t, \mathbf{r}), \quad i = 1, 2, \quad (27) \\ \sum_{j=1}^2 n_j \left( \sigma_{j3} + \sum_{\ell=1}^2 \sigma_{j\ell} \partial_\ell w \right) &= p_3(t, \mathbf{r}), \\ n_1 = \cos \gamma, \quad n_2 = \sin \gamma, \quad \mathbf{r} \in G_\sigma, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (28)$$

На другой части торцевой поверхности (обозначим её через  $G_u$ ) зададим кинематические граничные условия (см. (2), (3)):

$$\begin{aligned} w(t, \mathbf{x}) &= U_{*3}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (29) \\ U_j(t, \mathbf{r}) &= U_{*j}(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in G_u, \quad t \geq t_0, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (30)$$

В (27)–(30)  $p_i$  – заданные на  $G_\sigma$  внешние поверхностные нагрузки, действующие в направлении  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $\Gamma_u$  – проекция части торцевой поверхности  $G_u$  на отсчетную плоскость  $x_3 = 0$  (т. е.  $\Gamma_u$  – часть контура  $\Gamma$ , ограничивающего область  $G$ , занимаемую пластиной в плане до деформирования);  $U_{*3}$  – заданный на  $\Gamma_u$  прогиб;  $U_{*j}$  – заданные на торцевой поверхности  $G_u$  перемещения в тангенциальных направлениях  $x_j$ ,  $j = 1, 2$ ;  $\gamma$  – угол, задающий направление внешней нормали к контуру  $\Gamma$  (или, что то же самое, к торцевой поверхности  $G_\sigma \cup G_u$ ) и отсчитываемый от направления  $x_1$ .

В начальный момент времени  $t = t_0$  выполняются следующие начальные условия (см. (2), (3)):

$$\begin{aligned} w(t_0, \mathbf{x}) &= U_{03}(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = V_{03}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad (31) \\ U_j(t_0, \mathbf{r}) &= U_{0j}(\mathbf{r}), \quad \dot{U}_j(t_0, \mathbf{r}) = V_{0j}(\mathbf{r}), \\ \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (32)$$

где  $U_{0i}$ ,  $V_{0i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – заданные в начальный момент времени  $t_0$  перемещения и скорости точек пластины.



Для получения силовых граничных условий, записанных в силовых факторах (15), проинтегрируем (28) по толщине пластины, а (27) – по  $x_3$  с весами  $x_3^\ell$ . Тогда с учетом левых равенств (15) и соотношений (11), (16) будем иметь

$$\begin{aligned} n_1(M_{i1}^{(\ell)} - M_{13}^{(\ell)}\partial_i w) + n_2(M_{i2}^{(\ell)} - M_{23}^{(\ell)}\partial_i w) &= P_i^{(\ell)}(t, \mathbf{x}), \\ & i = 1, 2, \quad 0 \leq \ell \leq K + 1, \\ \sum_{j=1}^2 n_j \left( M_{j3}^{(0)} + \sum_{\ell=1}^2 M_{j\ell}^{(0)} \partial_\ell w \right) &= P_3^{(0)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$P_j^{(\ell)} \equiv \int_{-h}^h p_j x_3^\ell dx_3, \quad j = 1, 2, 3. \quad (34)$$

Здесь  $\Gamma_\sigma$  – проекция части торцевой поверхности  $G_\sigma$  на отсчетную плоскость  $x_3 = 0$ ,  $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$ ;  $P_i^{(\ell)}$ ,  $P_3^{(0)}$  – заданные на контуре  $\Gamma_\sigma$  силовые факторы, причем, согласно (34),  $P_i^{(0)}$  и  $P_3^{(0)}$  – заданные погонные усилия, действующие в направлениях  $x_i$  и  $x_3$ , а  $P_i^{(1)}$ ,  $i = 1, 2$ , – заданные погонные механические моменты (остальные величины в правых частях (33) – это заданные математические моменты высших порядков).

Так как разложения (3) по полиномам в направлении  $x_3$  являются конечными, кинематические граничные условия (30) и начальные условия (32) нельзя удовлетворить в каждой точке  $\mathbf{r}$  пластины (в случае (32)) и торцевой поверхности  $G_u$  (в случае (30)) при произвольных зависимостях функций  $U_{*i}$ ,  $U_{0i}$ ,  $V_{0i}$  от  $x_3$ . Поэтому, как и силовые граничные условия (см. (27), (28), (33), (34)), начальные (32) и кинематические граничные (30) условия будем удовлетворять в интегральном смысле. С этой целью проинтегрируем равенства (30), (32) по толщине пластины с весами  $x_3^\ell$ . Тогда с учетом (23) получим

$$\begin{aligned} u_i^{(\ell)}(t, \mathbf{x}) &= u_{*i}^{(\ell)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq \ell \leq K + 1, \quad (35) \\ u_i^{(\ell)}(t_0, \mathbf{x}) &= u_{0i}^{(\ell)}(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_i^{(\ell)}(t_0, \mathbf{x}) = v_{0i}^{(\ell)}(\mathbf{x}), \\ & \mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq \ell \leq K + 1, \quad (36) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_{*i}^{(\ell)}(t, \mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h U_{*i}(t, \mathbf{r}) x_3^\ell dx_3, \quad u_{0i}^{(\ell)}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) x_3^\ell dx_3, \\ v_{0i}^{(\ell)}(\mathbf{x}) &\equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) x_3^\ell dx_3, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq \ell \leq K + 1, \end{aligned} \quad (37)$$

$u_{*i}^{(\ell)}$ ,  $u_{0i}^{(\ell)}$ ,  $v_{0i}^{(\ell)}$  – известные функции указанных аргументов.

Таким образом, для однозначного интегрирования рассматриваемой начально-краевой задачи в каждой точке области  $G$  в момент времени  $t_0$  должны быть заданы начальные условия (31), (36) с учетом (37), а в каждой точке контура  $\Gamma$  – силовые граничные условия (33) с учетом (34) или кинематические условия (29), (35) с учетом (37). Возможно задание и смешанных из (29), (33), (35) граничных условий, например, шарнирного опирания кромки.

Проинтегрировав равенства (3) по толщине пластины с весами  $x_3^\ell$ , с учетом обозначений (23) получим следующее матричное уравнение:

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{U}_i + \mathbf{W}\partial_i w - \mathbf{E}^{(+)}\boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^+ + \mathbf{E}^{(-)}\boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^-, \quad i = 1, 2, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i &= \{u_i^{(0)}, u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(K)}, u_i^{(K+1)}\}^*, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i &= \{u_i, \varepsilon_{i3}^{(0)}, \varepsilon_{i3}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{i3}^{(K-1)}, \varepsilon_{i3}^{(K)}\}^*, \end{aligned} \quad (39)$$

$\mathbf{C} = (c_{ij})$  –  $(K+2) \times (K+2)$ -матрица,  $\mathbf{W} = \{w_i\}$ ,  $\mathbf{E}^{(\pm)} = \{e_i^{(\pm)}\}$  –  $(K+2)$ -компонентные векторы-столбцы, элементы которых вычисляются так:

$$\begin{aligned} c_{\ell+1,1} &= h^{\ell+1} \frac{1+(-1)^\ell}{\ell+1}, \quad w_{\ell+1} = h^{\ell+2} \frac{1-(-1)^\ell}{\ell+2}, \\ c_{\ell+1,k+2} &= 2h^{\ell+k+2} (1-(-1)^{\ell+k}) \left( \frac{1}{(k+1)(\ell+k+2)} - \frac{1}{(k+3)(\ell+k+4)} \right), \\ e_{\ell+1}^{(\pm)} &= h^{\ell+2} \left( \frac{1+(-1)^\ell}{2(\ell+3)} \pm \frac{1-(-1)^\ell}{\ell+2} \right), \quad 0 \leq \ell \leq K+1, \quad 0 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (40)$$

Согласно (40), компоненты матрицы  $\mathbf{C}$  и векторов-столбцов  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{E}^{(\pm)}$  вычисляются один раз, поэтому равенство (38) целесообразно преобразовать к виду

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{U}_i + \bar{\mathbf{W}} \partial_i w - \bar{\mathbf{E}}^{(+)} \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(+)} + \bar{\mathbf{E}}^{(-)} \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(-)}, \quad i = 1, 2, \quad (41)$$

где

$$\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{W}, \quad \bar{\mathbf{E}}^{(\pm)} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{E}^{(\pm)}, \quad (42)$$

$\mathbf{C}^{-1}$  – матрица, обратная  $\mathbf{C}$ .

Если из каких-то соображений в данный момент времени  $t$  известны функции  $u_i^{(\ell)}$ ,  $w$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(\pm)}$ ,  $0 \leq \ell \leq K+1$ , то из (41) с учетом (39), (40), (42) можем вычислить функции  $u_i$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(k)}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 \leq k \leq K$ , определяющие осредненные деформации (1), (4) и перемещения (3) в пластине.

Из равенств (26) следует

$$\varepsilon_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \frac{\sigma_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x})}{b_i(t, \mathbf{x}, \pm h)}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \quad (43)$$

т. е. в рассматриваемый момент времени  $t$  текущие приближения деформаций поперечного сдвига на лицевых поверхностях пластины можно считать известными, так как приближения «эффективных жесткостей»  $b_i$ , согласно (12), предполагаются уже известными из решения, полученного на предыдущей итерации.

Таким образом, в дальнейшем функции  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$  в соотношениях (1), (3), (4), (13), (15), (38), (41) в каждый момент времени можем считать известными на текущей итерации из равенств (43).

После подстановки внутренних силовых факторов (15) с учетом соотношений (16), (39), (41) в уравнения движения (21), (22) и в силовые граничные условия (33) получим систему разрешающих уравнений и соответствующие ей силовые граничные условия, записанные в обобщенных перемещениях  $w$ ,  $u_i^{(\ell)}$  (см. (23), (39)). Эти уравнения являются громоздкими, поэтому не будем их здесь выписывать, тем более что далее предполагается использовать явную численную схему интегрирования сформулированной начально-краевой задачи, для реализации которой не требуется использовать уравнения движения и силовые граничные условия, выраженные в явном виде через переменные  $w$ ,  $u_i^{(\ell)}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 \leq \ell \leq K+1$ .

**2. Метод расчета.** Для численного интегрирования сформулированной в предыдущем разделе начально-краевой задачи применим метод шагов по времени [1, 6, 18, 19, 22 и др.], т. е. будем определять решение в дискретные моменты времени  $t_{n+1} = t_n + \tau$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , где  $\tau = \text{const} > 0$  – шаг по времени.

Предполагаем, что в моменты времени  $t_m$  известны значения следующих функций:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}) &\equiv w(t_m, \mathbf{x}), & u_i^{(\ell)}(\mathbf{x}) &\equiv u_i^{(\ell)}(t_m, \mathbf{x}), & \sigma_{j3}^{(\pm)}(\mathbf{x}) &\equiv \sigma_{j3}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \\ a_{kp}(\mathbf{r}) &\equiv a_{kp}(t_m, \mathbf{r}), & i &= 1, 2, & j &= 1, 2, 3, & k, p &= 1, \dots, 6, \\ m &= n-1, n, & 0 &\leq \ell \leq K+1, & \mathbf{x} &\in G, & |x_3| &\leq h \end{aligned} \quad (44)$$

(здесь  $a_{kp}$  – компоненты  $6 \times 6$ -матрицы  $\mathbf{A}$  в соотношении (8)). Тогда по формулам (15) с учетом равенств (1), (4), (12), (16), (17), (25), (39), (41), (43) в момент времени  $t_n$  можем вычислить значения всех внутренних силовых факторов  $M_{ij}^{(\ell)}$ , входящих в уравнения движения (21), (22) и силовые граничные условия (33).

Далее для аппроксимации вторых производных по времени  $t$  от неизвестных функций используем центральные конечные разности [1, 13, 15]. Это позволяет построить явную схему для численного интегрирования рассматриваемой задачи. Согласно такой аппроксимации, конечноразностные аналоги уравнений (21), (22) с учетом обозначений, аналогичных (44), примут вид

$$\begin{aligned} \frac{2h\rho}{\tau^2} \left( w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w^n \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} + X_3^{(0)}, \\ \frac{\rho}{\tau^2} \left( u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{ij}^{(\ell)} - M_{j3}^{(\ell)} \partial_i w^n \right) - \\ &\quad - \ell M_{i3}^{(\ell-1)} + \ell M_{33}^{(\ell-1)} \partial_i w^n + h^\ell \left[ \sigma_{i3}^{(+)} - (-1)^\ell \sigma_{i3}^{(-)} \right] - \\ &\quad - h^\ell \left[ \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^\ell \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_i w^n + X_i^{(\ell)}, \quad i = 1, 2, \\ &\quad 0 \leq \ell \leq K+1, \quad \mathbf{x} \in G, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (45)$$

Так как правые части в (45) известны, с учетом обозначений (44) из этих уравнений можем определить неизвестные функции  $w^{n+1}$  и  $u_i^{n+1(\ell)}$  в следующий момент времени  $t_{n+1}$ . Строго говоря, при  $t = t_n$  к системе (45) следует добавить граничные условия (29), (33) и (35) с учетом обозначений, аналогичных (44). При известных  $w^{n+1}$  и  $u_i^{n+1(\ell)}$ ,  $0 \leq \ell \leq K+1$ , по формулам (41) с учетом (40), (42), (43) и обозначений (39) можем вычислить функции  $u_i^{n+1}$ ,  $\varepsilon_{i3}^{n+1(k)}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 \leq k \leq K$ , а затем на основании (1), (4) с учетом (11) – осредненные деформации композиции  $\varepsilon_{ij}^{n+1}$  во всех точках пластины при  $t = t_{n+1}$ . В силу того, что  $\varepsilon_{ij}^{n+1}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , известны, по формулам (31), (32) из [18] в момент времени  $t_{n+1}$  можно вычислить соответствующие приближения для деформаций компонентов композиции, а по формулам (24) и (27) из [18] можно определить и компоненты  $6 \times 6$ -матрицы  $\mathbf{A}$  в соотношении (8). При этом в каждой точке пластины (независимо от соседних точек) требуется реализовать итерационный процесс, аналогичный методу переменных параметров упругости, который, согласно допущению 6, принятому в [18], предполагается сходящимся, как и в настоящем исследовании. Для

начала такого итерационного процесса можно взять уже известные при  $t = t_n$  матрицы, используемые в равенствах (31), (32) и (27) из [18], что вполне оправданно при достаточно малом шаге по времени  $\tau$ .

Таким образом, после окончания этого итерационного процесса при  $m = n$  и  $m = n + 1$  известны все функции, указанные в (44), поэтому по предложенной схеме можно построить решение рассматриваемой задачи в следующий момент времени  $t_{n+2}$  и т. д. Согласно структуре левых частей уравнений (45), для начала расчета по приведенной выше явной схеме необходимо знать не только значения функций  $w^0$  и  $u_i^{(l)}$  (известные из начальных условий (31), (36)), но и  $w^1$ ,  $u_i^{(l)}$  (при  $n = 1$  в (45)). Эти величины получим, используя формулу Тейлора при учете начальных условий (31), (36) и уравнений (21), (22) при  $t = t_0$  [15]:

$$\begin{aligned} w^1(\mathbf{x}) &= w^0(\mathbf{x}) + \tau \dot{w}^0(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{w}^0(\mathbf{x}) + O(\tau^3) \approx 0, \\ u_i^{(l)1}(\mathbf{x}) &= u_i^{(l)0}(\mathbf{x}) + \tau \dot{u}_i^{(l)0}(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}_i^{(l)0}(\mathbf{x}) + O(\tau^3) \approx 0, \\ i &= 1, 2, \quad 0 \leq l \leq K + 1, \quad \mathbf{x} \in G, \end{aligned} \quad (46)$$

где приближенные равенства выполняются с точностью порядка  $\tau^3$ , а правые нулевые части соответствуют случаю естественного состояния, когда в начальный момент времени  $t_0$  пластина покоится ( $U_{0i} \equiv 0$ ,  $V_{0i} \equiv 0$ , см. (31) и (32)) и внешние нагрузки отсутствуют ( $\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$ ,  $X_i(t_0, \mathbf{r}) \equiv 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ , см. (21)–(23)).

Если пластина в плане является прямоугольной, то, заменяя в уравнениях (45) и в граничных условиях (33) производные  $\partial_i(\cdot)$  по пространственным переменным  $x_i$  от известных (в силу предположения (44)) функций их конечноразностными аналогами, получим явную численную схему типа «крест» [1, 15, 13, 19]. Если же область  $G$  не является канонической, то для дискретизации уравнений (45) по пространственным переменным  $x_i$ ,  $i = 1, 2$ , можно применить вариационно-разностный подход, использованный в [1], где показано, что для тонкостенных конструкций необходимыми условиями устойчивости схемы типа «крест» являются следующие неравенства, вытекающие из условий устойчивости Куранта [13]:

$$\frac{\Delta_{\mathbf{e}}}{\tau} > a_{\mathbf{e}}, \quad \frac{2h}{\tau} > a_3, \quad a_{\mathbf{e}} = \sqrt{\frac{E_{\mathbf{e}\mathbf{e}}}{\rho}}, \quad a_3 = \sqrt{\frac{E_{33}}{\rho}}. \quad (47)$$

Здесь  $\rho$  определено в (20);  $\Delta_{\mathbf{e}}$  – наибольший размер ячейки дискретизации области  $G$  в направлении вектора  $\mathbf{e}$ , лежащего в плоскости пластины;  $E_{\mathbf{e}\mathbf{e}}$ ,  $E_{33}$  – эффективные модули упругости первого рода в направлениях  $\mathbf{e}$  и  $Ox_3$ , которые определяются, исходя из компонент матрицы эффективных податливостей, обратной матрице  $\mathbf{A}$  (см. (8) при линейно-упругом поведении материалов компонентов композиции) [10]. В силу того, что первое из неравенств (47) должно выполняться для произвольного направления  $\mathbf{e}$ , в общем случае при криволинейных неоднородных структурах армирования пластин выбор шага по времени  $\tau$  из условий (47) представляет весьма трудоемкую задачу. Однако легко показать, что если неравенства, аналогичные (47), выполняются для каждого компонента композиции, то необходимо будут выполняться и условия (47) для армированной пластины в целом, поэтому далее будем использовать именно такой критерий устойчивости разработанной явной численной схемы.

Используя известные формулы перехода от декартовой прямоугольной системы координат к цилиндрической [12], полученные выше разрешающие уравнения и соответствующие им граничные условия можно записать в полярной системе координат, что удобно, когда область  $G$ , занимаемая пластиной в плане, является кругом, кольцом либо сектором круга или кольца.

**3. Обсуждение результатов расчетов.** В качестве конкретных примеров рассмотрим динамическое изгибное поведение кольцевых армированных пластин, ограниченных кромками радиусов  $r_0 = 10$  см,  $r_1 = 60$  см и имеющих толщину  $2h = 1$  см или  $2h = 5$  см. Объемными нагрузками пренебрегаем:  $X_j \equiv 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Касательные нагрузки на лицевых поверхностях отсутствуют:  $\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$ , поэтому на основании (43) получаем  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$ ,  $i = 1, 2$ . Пластины нагружаются снизу фронтальной нагрузкой, вызванной воздушной взрывной волной (см. (21), (22), (24), (25), (45)) [22]:

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp(-\alpha(t - t_{\max})), & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (48)$$

где

$$\alpha = -\ln(0.01) / (t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}, \quad (49)$$

$t_{\max}$  – момент времени, в который давление  $p(t)$  достигает максимального по модулю значения  $p_{\max}$ ;  $t_{\min}$  – момент времени, в который давление  $p(t)$  становится пренебрежимо малым по сравнению со значением  $p_{\max}$  (так, формула (49) соответствует случаю  $p(t_{\min}) = 0.01p_{\max}$ ). На основе экспериментальных данных [22] в расчетах используем значения  $t_{\max} = 0.1$  мс и  $t_{\min} = 2$  мс или  $t_{\min} = 200$  мс.

Предполагается, что пластины осесимметрично армированы либо одним,  $N = 1$ , семейством волокон в радиальном направлении  $\theta_1 = \pi/2$ ,  $\varphi_1 = 0$  (рис. 2), либо двумя,  $N = 2$ , семействами волокон в радиальном  $\theta_1 = \pi/2$ ,  $\varphi_1 = 0$ ,  $n = 1$  и окружном  $\theta_2 = \pi/2$ ,  $\varphi_2 = \pi/2$ ,  $n = 2$  направлениях. В этом разделе  $x_1$  – полярный радиус,  $x_2$  – полярный угол в цилиндрической системе координат. Так как волокна имеют постоянные поперечные сечения [7], плотность армирования  $\omega_1$  в осесимметричном случае при укладке волокон в радиальном направлении определяется по формуле [11, 20]

$$\omega_1(x_1) = r_0 \omega_{01} / x_1, \quad \omega_{01} \equiv \omega_1(r_0), \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1, \quad (50)$$

где  $\omega_{01}$  – плотность армирования волокнами радиального семейства, заданная на внутренней кромке  $x_1 = r_0$ . В случае только радиального армирования пластин в расчетах примем  $\omega_{01} = 0.7$ , что на практике, как правило, соответствует предельно допустимому значению плотности армирования.

Согласно (50), плотность армирования  $\omega_1$  волокнами радиального семейства монотонно убывает от внутренней кромки  $x_1 = r_0$  к внешней  $x_1 = r_1$ . Так как при окружной укладке волокон плотность армирования  $\omega_2(x_1)$  может быть задана произвольной функцией от  $x_1$  [11], зададим  $\omega_2(x_1)$  так, чтобы в случае радиально-окружной укладки волокон суммарная плотность армирования  $\omega(x_1) = \omega_1(x_1) + \omega_2(x_1)$  была величиной постоянной, причем потребуем выполнения равенства  $\omega(x_1) = \bar{\omega}_{01} = \text{const}$ , где  $\bar{\omega}_{01} = \omega_1(r_0)$  при радиально-окружной укладке волокон. В расчетах

пластин с такой структурой армирования примем  $\bar{\omega}_{01} = 0.5$ . При этом  $\omega_1(x_1)$  определяется по формуле (50), где  $\omega_{01}$  нужно заменить на  $\bar{\omega}_{01}$ .

На внешней кромке пластины жестко закреплены, т. е. в (29) и (35) следует принять  $U_{*3} \equiv 0$ ,  $u_{*i}^{(\ell)} \equiv 0$ ,  $0 \leq \ell \leq K+1$ , так как  $U_{*i} \equiv 0$ ,  $i = 1, 2$ , при  $x_1 = r_1$  (см. (37)). В отверстие пластины вставлена абсолютно жесткая шайба, которая жестко скреплена с пластиной по ее внутренней кромке, т. е. выполняются условия сопряжения

$$w_0(t) = w|_{x_1=r_0}, \quad u_i^{(\ell)}|_{x_1=r_0} = 0, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq \ell \leq K+1, \quad t \geq t_0, \quad (51)$$

где  $w_0$  – осевое перемещение шайбы как жесткого целого в направлении  $Ox_3$ .

При заданных типах нагружения (48), (49), закрепления (см. (51)) и структурах армирования в композитных пластинах реализуется случай осесимметричного изгиба, т. е. решения соответствующих динамических задач не зависят от полярного угла  $x_2$ . Кроме того, тангенциальное перемещение и поперечный сдвиг в окружном направлении отсутствуют ( $u_2^{(\ell)} \equiv 0$ ,  $0 \leq \ell \leq K+1$ , а значит, согласно (39), (41),  $u_2 \equiv 0$ ,  $\varepsilon_{23}^{(\ell)} \equiv 0$ ,  $0 \leq \ell \leq K$ ).

Рассматриваемые здесь структуры армирования условно можно считать рациональными, так как при  $\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$ , по крайней мере на лицевых поверхностях  $x_3 = \pm h$ , направления армирования совпадают с направлениями главных напряжений и деформаций.

При наличии жесткой шайбы для замыкания системы разрешающих уравнений необходимо использовать ее уравнение движения, которое с учетом (48) имеет вид

$$M_0 \ddot{w}_0 = \pi r_0^2 p(t) + 2\pi r_0 M_{13}^{(0)}(t, x_1)|_{x_1=r_0}, \quad t \geq t_0, \quad (52)$$

где  $M_0$  – масса шайбы;  $M_{13}^{(0)}$  – поперечная сила, вычисленная по формуле (15) при  $x_1 = r_0$ .

В начальный момент времени  $t = t_0 = 0$  пластины и шайбы находятся в состоянии покоя (см. (31), (36) с учетом (37) при  $U_{0i} \equiv 0$ ,  $V_{0i} \equiv 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), и, согласно (48), внешняя нагрузка отсутствует, т. е. справедливы соотношения (46). После замены в (52) второй производной по времени от  $w_0$  ее конечноразностным аналогом рассматриваемая задача с учетом (51) может быть численно проинтегрирована по явной схеме типа «крест» (см. предыдущий раздел).

Предполагаем, что нелинейно-упругая связь между напряжением  $\sigma$  и деформацией  $\varepsilon$  в каждом компоненте композиции при одноосном растяжении и сжатии описывается идеализированной диаграммой с линейным упрочнением [9]:

$$\sigma = \begin{cases} E_n \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(n)} = \sigma_s^{(n)} / E_n, \\ \text{sgn}(\varepsilon) \sigma_s^{(n)} + E_s^{(n)} (\varepsilon - \text{sgn}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(n)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(n)}, \quad 0 \leq n \leq N, \end{cases}$$

где  $E_n$ ,  $E_s^{(n)}$  – модули Юнга и линейного упрочнения материала  $n$ -го компонента композиции;  $\sigma_s^{(n)}$ ,  $\varepsilon_s^{(n)}$  – напряжение и соответствующая ему деформация, при превышении которых материал ведет себя нелинейно. Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции пластин приведены в табл. 1 (здесь  $\nu$  – коэффициент Пуассона). Характеристики связующего материала условно соответствуют эпоксидной смоле, отвержденной ароматическим аммиаком [16], а характеристики арматуры –

волокон из L-стекла [7]. В табл. 1 приведены также значения скорости звука  $a$  в материалах компонентов композиции, рассчитанные по формулам, аналогичным (47).

Таблица 1. Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции [7, 16].

Материал	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$\nu$	$\sigma_s$ , МПа	$E$ , ГПа	$E_s$ , ГПа	$a$ , м/с
Связующая матрица	1210	0.4	20	2.8	1.114	1521.2
Армирующие волокна	4300	0.25	1500	51.0	10.851	3443.9

Для шайб примем  $\bar{\rho} = 2710$  кг/м<sup>3</sup>, что условно соответствует алюминиевым сплавам [7], а их толщины зададим вдвое большими, чем толщины  $2h$  соответствующих пластин. Эти данные позволяют определить массы шайб  $M_0$  (см. (52)).

При проведении численных расчетов вдоль полярного радиуса  $x_1$  вводилась равномерная сетка с шагом  $\Delta x_1 = (r_1 - r_0)/100 = 5$  мм, а шаг по времени  $\tau$  выбирался равным 1 мкс. При этом, исходя из первого из соотношений (47), получаем  $\Delta x_1/\tau = 5$  км/с. Для толщин рассматриваемых пластин (1 и 5 см) на основе второго из неравенств (47) имеем  $2h/\tau = 10$  и 50 км/с. Рассчитанные отношения существенно превышают значения  $a$ , приведенные в табл. 1 для материалов компонентов композиции, поэтому необходимые условия устойчивости (47) используются численной схемы «крест» выполняются с запасом.

На рис. 3–5 изображены зависимости  $w_0(t)$ , т. е. осцилляции жестких шайб, определенные для пластин разной толщины, при разных структурах армирования и при разных амплитудах и продолжительности динамического воздействия. Штриховые кривые 1 на рисунках соответствуют расчетам по теории Редди ( $K = 0$  в соотношениях (1), (3), (4)), а сплошные линии 2 определены по уточненным теориям при разных  $K \geq 2$ .

Кривые на рис. 3 получены для пластин толщиной  $2h = 1$  см с радиально-окружной структурой армирования при параметрах нагружения  $p_{\max} = 0.6$  МПа и  $t_{\min} = 200$  мс. Сплошная линия 2 при этом рассчитана для случая  $K = 5$  (в разложении (1) удерживалось шесть слагаемых). В окрестности начального момента времени,  $0 \leq t < 0.1$  с, сплошная и штриховая кривые в этом случае визуально почти не различаются, однако деформации в связующем материале различаются в разы, поэтому осцилляции шайбы на этом интервале времени на рис. 3 не изображены.

Проведенные расчеты показали, что в случае нелинейно-упругого поведения фазовых материалов для получения деформаций компонентов композиции с точностью до трех значащих цифр на каждом шаге интегрирования по времени нужно делать не менее пяти итераций по методу переменных параметров упругости (см. предыдущие разделы).

Из сравнения кривых на рис. 3 следует, что с течением времени уточненное решение все больше отличается от решения, полученного по традиционной неклассической теории Редди. В частности, амплитуды колебаний шайбы, рассчитанные по уточненной теории, становятся заметно меньше, чем амплитуды, определенные по теории Редди. На уточненной зависимости  $w_0(t)$  появляются дополнительные локальные экстремумы, которых не выявляет теория Редди. Такое расхождение решений, полученных по уточненной теории и по теории Редди, которое накапливается с течением времени и становится существенным при временах порядка одной секунды и более, может сыграть принципиальное значение в тех случаях, когда пластина подвергается повторному динамическому нагружению. В

этом случае низкая точность теории Редди может привести к значительным ошибкам в определении механического поведения рассматриваемой конструкции после ее повторного нагружения.

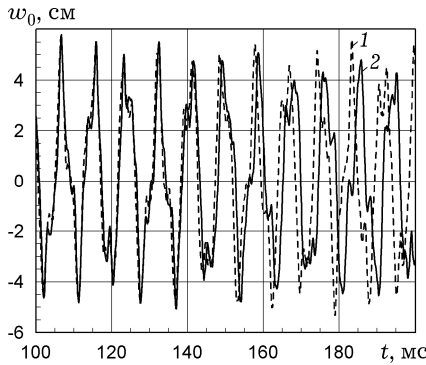


Рис. 3. Осцилляции шайбы в случае радиально-окружного армирования пластины, рассчитанные по разным теориям.

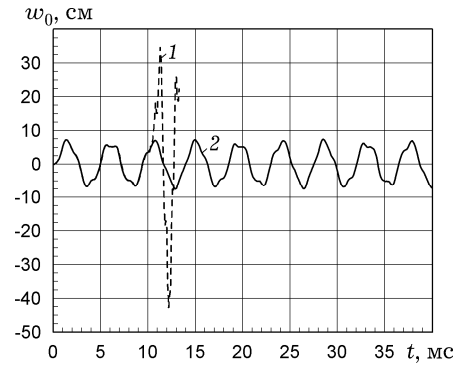


Рис. 4. Демонстрация неустойчивости численной схемы типа «крест» в рамках теории Редди и устойчивости этой схемы в рамках уточненной теории.

Дополнительные расчеты показали, что при  $K \geq 6$  в исследуемом случае разработанная численная схема (см. предыдущий раздел) проявляет свойство неустойчивости. По-видимому, это связано с тем, что для рассматриваемой относительно тонкой пластины ( $2h = 1$  см,  $2h/(r_1 - r_0) = 1/50$ ) матрица  $\mathbf{C}$  в соотношении (38) (см. (40)) при  $K \geq 6$  становится плохо обусловленной (расчеты проводились с двойной точностью), поэтому численное обращение этой матрицы (см. (41) и (42)) приводит к значительным ошибкам и сказывается на устойчивости используемой численной схемы.

В работе [19] на примерах расчетов гибких композитных балок-стенок из линейно-упругих материалов, проведенных (расчетов) в рамках первого и второго вариантов теории Тимошенко, было показано, что неравенства (47) являются необходимыми, но не достаточными условиями устойчивости численной схемы типа «крест», т. е. в геометрически нелинейных задачах можно говорить только о практической устойчивости этой схемы. Там же было показано, что данный вывод справедлив и в случае цилиндрического изгиба гибких прямоугольных удлиненных композитных пластин, изготовленных из линейно-упругих материалов. Очевидно, что этот же результат переносится и на более общий случай гибких армированных пластин, выполненных из нелинейно-упругих фазовых материалов. Многочисленные расчеты, проведенные в рамках настоящего исследования, показали, что при использовании теории Редди (или, что то же самое, второго варианта теории Тимошенко [10]) встречаются ситуации, когда численная схема типа «крест» проявляет неустойчивость, хотя условия Куранта (47) выполняются со значительным запасом. При этом оказалось, что, как правило, расчеты по уточненным теориям ( $K \geq 2$ ) проявляют большую устойчивость, чем расчеты, выполненные по теории Редди ( $K = 0$ , см. (1), (3), (4)). Объяснить этот факт автору пока не удалось.

На рис. 4 изображен случай, демонстрирующий неустойчивость расчетов по теории Редди (кривая 1) и устойчивость расчета по уточненной теории (линия 2, которая получена при  $K = 3$ ). Кривые на рис. 4 характеризуют движение шайбы в случае относительно толстой пластины ( $2h = 5$  см,  $2h/(r_1 - r_0) = 1/10$ ) с радиальной структурой армирования при параметрах нагружения  $p_{\max} = 15$  Мпа и  $t_{\min} = 2$  мс (см. (48), (49)). Крайняя правая точка на штриховой кривой 1 соответствует «авосту» при выполнении расчета по теории Редди, свидетельствующему о неустойчивости в этом случае схемы типа «крест».



Дополнительные расчеты показали, что редко, но все же встречаются случаи, когда численная схема типа «крест» проявляет неустойчивость при любых значениях  $K \geq 0$  (см. (1), (3), (4)), т. е. не всегда уточненные теории гарантируют устойчивость этой численной схемы даже при выполнении условий (47). Так, на рис. 5 изображен случай, демонстрирующий этот факт. Зависимости  $w_0(t)$  на рис. 5 рассчитаны для относительно тонкой пластины ( $2h = 1$  см,  $2h/(r_1 - r_0) = 1/50$ ) с радиальной структурой армирования при параметрах нагружения  $p_{\max} = 4$  Мпа и  $t_{\min} = 2$  мс. Сплошная линия 2 определена по уточненной теории при  $K = 2$ . Крайние правые точки на кривых 1 и 2 соответствуют «авосту», причем видно, что в этом случае при расчете по уточненной теории «авост» наступает раньше, чем в расчете по теории Редди (кривая 1). Дополнительные расчеты показали, что при  $K = 1$  зависимость  $w_0(t)$  визуально практически неотличима от линии 1, а при  $K = 3$  – от кривой 2. При  $K \geq 4$  «авост» наступает даже раньше, чем при  $K = 2$  (линия 2).

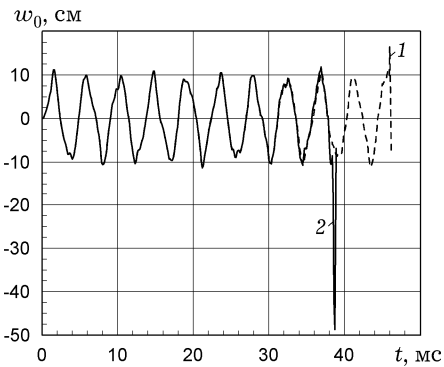


Рис. 5. Демонстрация неустойчивости численной схемы типа «крест» как в рамках теории Редди, так и в рамках уточненных теорий.

Таким образом, использование явной численной схемы типа «крест» не всегда гарантирует получение надежных результатов расчетов динамического поведения гибких композитных тонкостенных элементов конструкций даже в рамках уточненных теорий их деформирования и при выполнении условий Куранта (47). Очевидно, что для получения гарантированно устойчивых численных решений таких задач следует использовать абсолютно устойчивые неявные численные методы (в частности, метод Ньюмарка [30]), но предварительно необходимо построить соответствующие модели механического поведения гибких армированных пластин, адаптированные под применение этих методов (как это сделано в [18]).

**Заключение.** Проведенные расчеты показали, что при изучении динамического поведения гибких армированных пластин, изготовленных из нелинейно-упругих фазовых материалов, использование традиционной неклассической теории Редди при расчетных временах порядка одной секунды и более может приводить к существенным расхождениям с решениями, полученными по уточненным теориям, особенно это касается определения напряженно-деформированных состояний материалов компонентов композиции. При использовании для интегрирования соответствующих начально-краевых задач явной схемы типа «крест» численные процедуры, основанные на уравнениях уточненных теорий, как правило, обладают большей практической устойчивостью, чем в рамках теории Редди. Следовательно, для проведения адекватных расчетов динамического поведения таких композитных конструкций целесообразно использовать уточненные теории, предложенные в настоящем исследовании.

1. Абросимов Н. А., Баженов В. Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2002. – 400 с.
2. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания. – Москва: Наука, 1987. – 360 с.
4. Баженов В. А., Кривенко О. П., Соловей Н. А. Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – Москва: Книжный дом «Либроком», 2013. – 336 с.

5. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – Москва: Мир, 1987. – 542 с.  
То же: *Washizu K.* Variational methods in elasticity and plasticity. – Oxford etc.: Pergamon Press, 1982. – 630 p.
6. *Ильюшин А. А.* Труды. Т. 3: Теория термовязкоупругости / Составители: Е. А. Ильюшина, В. Г. Тунгускова. – Москва: Физматлит, 2007. – 288 с.
7. *Композиционные материалы.* Справочник / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
8. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. – Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1947. – 355 с.
9. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – Москва: Машиностроение, 1968. – 400 с.
10. *Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.
11. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения // *Механика композиц. материалов и конструкций.* – 1997. – **3**, № 2. – С. 20–41.
12. *Новожилов В. В.* Теория упругости. – Ленинград: Судпромгиз, 1958. – 374 с.  
Те same: *Novozhilov V. V.* Theory of elasticity. – Oxford: Pergamon Press, 1961. – xii+448 p.
13. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 418 с.  
То же: *Richtmyer R. D., Morton K. W.* Difference methods for initial-value problems. – New York etc.: Intersci. Publ., 1967. – xiv+405 p.
14. *Романова Т. П., Янковский А. П.* Сравнительный анализ моделей изгибного деформирования армированных балок-стенок из нелинейно-упругих материалов // *Проблемы прочности и пластичности.* – 2014. – **76**, № 4. – С. 297–309.
15. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1989. – 616 с.
16. *Справочник по композитным материалам:* В 2 кн. Кн. 1 / Под ред. Дж. Любина. – Москва: Машиностроение, 1988. – 448 с.  
То же: *Handbook of composites* / Ed. G. Lubin. – New York: Van Nostrand Reinhold, 1982. – xi+786 p.
17. *Трецёв А. А.* Изотропные пластины и оболочки, выполненные из материалов, чувствительных к виду напряженного состояния. – Москва–Тула: РААСН; Изд-во Тул. гос. ун-та, 2013. – 249 с.
18. *Янковский А. П.* Моделирование механического поведения композитов с пространственной структурой армирования из нелинейно-наследственных материалов // *Конструкции из композиц. материалов.* – 2012. – № 2. – С. 12–25.
19. *Янковский А. П.* Практическая устойчивость схемы «крест» при численном интегрировании уравнений динамики для гибких тонкостенных элементов конструкций, подчиняющихся гипотезам теории Тимошенко // *Мат. методы та фіз.-мех. поля.* – 2015. – **58**, № 1. – С. 65–83.  
Те same: *Yankovskii A. P.* Practical stability of the «cross» scheme in the numerical integration of dynamic equations for flexible thin-walled structural elements obeying the hypotheses of the Timoshenko theory // *J. Math. Sci.* – 2017. – **222**, No. 1. – P. 81–102.
20. *Янковский А. П.* Упругопластическое деформирование изгибаемых армированных пластин при ослабленном сопротивлении поперечному сдвигу // *Прикл. математика и механика.* – 2013. – **77**, № 6. – С. 853–876.  
То же: *Yankovskii A. P.* Elastoplastic deformation of flexible reinforced plates with a reduced shear strength // *J. Appl. Math. Mech.* – 2013. – **77**, No. 6. – P. 613–628.
21. *Gill S. K., Gupta M., Satsangi P. S.* Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastic composite // *Front. Mech. Eng.* – 2013. – **8**, No. 2. – P. 187–200.
22. *Houlston R., DesRochers C. G.* Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading // *Comput. & Struct.* – 1987. – **26**, No. 1-2. – P. 1–15.
23. *Lo K. H., Christensen R. M., Wu E. M.* A high-order theory of plate deformation – Part 1: Homogeneous plates // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1977. – **44**, No. 4. – P. 663–668.
24. *Mindlin R. D.* Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates // *J. Appl. Phys.* – 1951. – **22**, No. 3. – P. 316–323. – <https://doi.org/10.1063/1.1699948>.

25. Mouritz A. P., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines // Compos. Struct. – 2001. – 53, No. 1. – P. 21–42.
26. Reddy J. N. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation // Int. J. Solids Struct. – 1984. – 20, No. 9-10. – P. 881–896.
27. Reddy J. N. Energy and variational methods in applied mechanics. – New York: John Wiley & Sons, 1984. – 545 p.
28. Reissner E. The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plate // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1945. – 12, No. 2. – P. A68–A77.
29. Whitney J. M., Leissa A. W. Analysis of heterogeneous anisotropic plates // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1969. – 36, No. 2. – P. 261–266.
30. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The finite element method. – Vol. 1. The basis. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – xvi + 689 p.

**ПОБУДОВА УТОЧНЕНОЇ МОДЕЛІ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ  
ГНУЧКИХ АРМОВАНИХ ПЛАСТИН ІЗ НЕЛІНІЙНО-ПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ НА  
ОСНОВІ ЯВНОЇ ЧИСЕЛЬНОЇ СХЕМИ ТИПУ «ХРЕСТ»**

*У наближенні Кармана сформульовано початково-крайову задачу динамічного деформування гнучких армованих пластин при нелінійно-пружній поведінці матеріалів компонент композиції. Отримано рівняння, які дозволяють з різним ступенем точності визначати напружено-деформований стан таких пластин з урахуванням їх ослабленого опору до поперечного зсуву. З цих рівнянь як частковий випадок випливають співвідношення неklasичної теорії Редді. Для чисельного інтегрування поставленої задачі використано метод кроку за часом із застосуванням явної чисельної схеми типу «хрест». Досліджено динамічну відповідь відносно товстих та тонких кільцевих композитних пластин з жорсткою внутрішньою шайбою під дією навантажень, спричинених повітряною вибуховою хвилею. Пластини жорстко закріплені по зовнішньому контуру і раціонально армовані у радіальних та радіально-окружних напрямках. Показано, що при використанні схеми типу «хрест» чисельні процедури, що ґрунтуються на рівняннях уточнених теорій, мають більшу практичну стійкість, ніж у рамках теорії Редді. Виявлено, що при часах порядку однієї секунди і більше розрахована динамічна поведінка армованих пластин, визначена за теорією Редді, істотно відрізняється від поведінки, розрахованої за уточненими теоріями.*

**REFINED MODELING OF THE DYNAMIC BEHAVIOR OF FLEXIBLE  
REINFORCED PLATES OF NONLINEAR ELASTIC MATERIALS ON THE BASIS  
OF AN EXPLICIT NUMERICAL «CROSS» SCHEME**

*In Kármán approximation, an initial-boundary-value problem is formulated for the dynamic deformation of flexible reinforced plates with nonlinear elastic behavior of the material components of the composition. The equations are derived in order to determine, within the different accuracy degrees, the stress-strain state of such plates with account for their weakened resistance to the transverse shear were obtained. As a particular case, the relations of the non-classical Reddy theory follow from these equations. The method of steps in time with the making use of the explicit numerical «cross» scheme is employed for the numerical integration of the problem formulated. The dynamic response of comparatively thick and thin annular composite plates with internal rigid penny-shaped inclusion subject to the air blast loads is investigated. The plates are clamped at the periphery and rationally reinforced in radial and radial-circumferential directions. It is shown that when using the «cross» scheme, the numerical procedures, based on the equations of the refined theory, have higher practical stability than in the Reddy theory. It was found that for times of the order of one or more seconds, the calculated dynamic behavior of reinforced plates, defined according to the Reddy theory, differs significantly from the behavior calculated according to refined theories.*

Ин-т теорет. и прикл. механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено  
09.01.17